

# Teoria do Consumidor: Escolha Envolvendo Risco

Roberto Guena de Oliveira

USP

25 de maio de 2012

# Estrutura da aula

## 1 Motivação

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Exemplos

- 1 Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.

# Exemplos

- 1 Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.
- 2 Quando você sai de casa com um guarda-chuva você leva consigo apenas um peso a mais para carregar (caso não chova) ou proteção contra a chuva (caso chova).

# Exemplos

- 1 Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.
- 2 Quando você sai de casa com um guarda-chuva você leva consigo apenas um peso a mais para carregar (caso não chova) ou proteção contra a chuva (caso chova).
- 3 Quando você aluga uma casa na praia, você compra um fim-de-semana sob o sol ou um fim-de-semana jogando baralho.

# Exemplos

- 1 Um bilhete de loteria representa alguns milhões a mais ou alguns reais a menos.
- 2 Quando você sai de casa com um guarda-chuva você leva consigo apenas um peso a mais para carregar (caso não chova) ou proteção contra a chuva (caso chova).
- 3 Quando você aluga uma casa na praia, você compra um fim-de-semana sob o sol ou um fim-de-semana jogando baralho.
- 4 Quando você faz seguro de seu caso você compra reembolso de despesas com acidentes (caso eles ocorram) ou dinheiro jogado fora (caso nada aconteça).

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 **Consumo contingente**
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Estado da natureza

## Definição

Um **estado da natureza** ou **estado do mundo** ou, simplesmente, **resultado** é uma especificação completa dos valores de todas as variáveis relevantes no horizonte de tempo relevante.

## Exemplo

Suponha um mundo em que tudo dependa de dois lançamentos seguidos de uma moeda. Notemos por  $C$  a ocorrência de cara e por  $R$  a ocorrência de coroa. Os estados de natureza são:

$$(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)$$

# Eventos

## Definição

Um **evento** é um conjunto de estados de natureza. Dizemos que um evento ocorre quando ocorre um de seus elementos.

## Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, são, entre outros, eventos: “o primeiro lançamento dar cara” –  $\{(C, R), (CC)\}$ – e “o primeiro lançamento resulta diferente do segundo lançamento” –  $\{(C, R), (R, C)\}$ .

# Consumo contingente

Um plano de consumo contingente é uma descrição completa das quantidades consumidas de cada bem em cada possível estado de natureza.

# Redefinindo mercadoria

## Mercadoria

Em mercados contingentes, uma mercadoria é um bem a ser entregue desde que ocorra um determinado evento.

## Exemplo

Em um mundo no qual tudo depende de dois lançamentos seguidos de moedas, e só existe dinheiro, são, entre outras, mercadorias: “R\$ 1,00 caso o primeiro lançamento der cara”, “R\$ 1,00 caso os dois lançamentos dêem cara” e “R\$ 1,00 independentemente dos resultados dos dois lançamentos.”

# Mercados contingentes

São mercados em que há negociação de mercadorias definidas em função de diferentes eventos.

# Mercados contingentes: exemplo

Considere um mundo no qual há apenas dois estados de natureza:

**Estado  $b$**  Parte do patrimônio de um consumidor é detruída.

**Estado  $g$**  O patrimônio do consumidor é mantido intacto.

- As preferências desse consumidor dependem apenas do valor de seu patrimônio em cada um desses estados.
- Há um mercado de seguros que oferece um seguro contra o estado  $b$  cobrando, nos dois estados de natureza,  $\gamma$  reais por R\$1,00 segurado.

# Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

$w_b^0$  o patrimônio no estado  $b$  quando não é feito o seguro.

$w_g^0$  o patrimônio no estado  $g$  quando não é feito o seguro.

$w_b$  o patrimônio no estado  $b$

$w_g$  o patrimônio no estado  $g$

$K$  o valor segurado

# Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

$w_b^0$  o patrimônio no estado  $b$  quando não é feito o seguro.

$w_g^0$  o patrimônio no estado  $g$  quando não é feito o seguro.

$w_b$  o patrimônio no estado  $b$

$w_g$  o patrimônio no estado  $g$

$K$  o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

# Exemplo – restrição orçamentária

Sejam

$w_b^0$  o patrimônio no estado  $b$  quando não é feito o seguro.

$w_g^0$  o patrimônio no estado  $g$  quando não é feito o seguro.

$w_b$  o patrimônio no estado  $b$

$w_g$  o patrimônio no estado  $g$

$K$  o valor segurado

Então

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

Resolvendo as duas equações, de modo a eliminar o  $K$ , obtemos

$$w_g + \frac{\gamma}{1 - \gamma} w_b = w_g^0 + \frac{\gamma}{1 - \gamma} w_b^0$$

# Exemplo – escolha do consumidor

Se as preferências do consumidor forem representadas pela função de utilidade

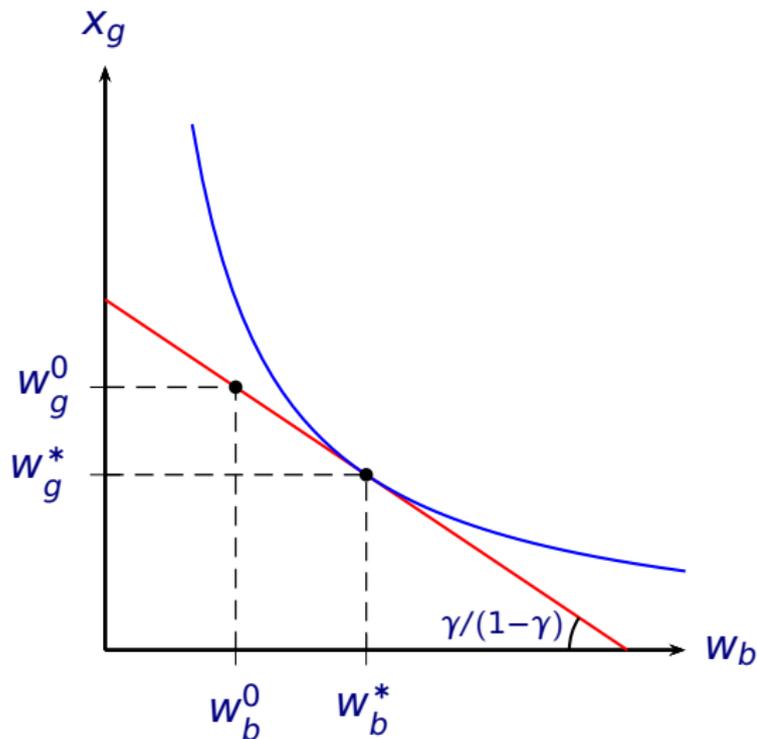
$$U(w_b, w_g),$$

seu problema é escolher  $w_b$  e  $w_g$  de modo a maximizar essa função, respeitando a restrição orçamentária:

$$w_g = w_g^0 - \gamma K \quad \text{e} \quad w_b = w_b^0 + K(1 - \gamma)$$

# Exemplo – escolha do consumidor

Ilustração gráfica



# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada**
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Loterias

## Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sendo que o prêmio  $i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) é associado a uma probabilidade de ocorrência  $\pi_i$  de tal sorte que  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ .

# Loterias

## Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sendo que o prêmio  $i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) é associado a uma probabilidade de ocorrência  $\pi_i$  de tal sorte que  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ . Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

# Loterias

## Definição

Uma loteria é um conjunto de prêmios alternativos e mutuamente excludentes,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sendo que o prêmio  $i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) é associado a uma probabilidade de ocorrência  $\pi_i$  de tal sorte que  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ . Os prêmios podem ser cestas de bens, prêmios monetários ou outras loterias.

## notação

$$(c_1, c_2, \dots, c_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

# Valor esperada de uma loteria

Caso uma loteria

$$(C_1, C_2, \dots, C_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

ofereça apenas prêmios monetários, é possível definir o valor esperado dessa loteria por

$$VE = \pi_1 C_1 + \pi_2 C_2 + \dots + \pi_n C_n = \sum_{i=1}^n \pi_i C_i$$

# Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza  $w$  em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade  $3/4$  ou desvalorizar-se 10% com probabilidade  $1/4$ . A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

# Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza  $w$  em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade  $3/4$  ou desvalorizar-se 10% com probabilidade  $1/4$ . A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

$$(1.2w, 0.9w; 0.75, 0.25).$$

# Exemplo

Uma pessoa investiu toda sua riqueza  $w$  em ações de uma empresa que podem, em um ano, valorizar-se 20% com probabilidade  $3/4$  ou desvalorizar-se 10% com probabilidade  $1/4$ . A riqueza dessa pessoa daqui a um ano pode ser representada pela loteria

$$(1.2w, 0.9w; 0.75, 0.25).$$

O valor esperado dessa loteria, ou seja o valor esperado de sua riqueza para daqui a um ano, é

$$0.75 \times 1.2w + 0.25 \times 0.9w = 1.125w.$$

# Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern <sup>1</sup> mostraram que, dadas algumas hipóteses razoáveis sobre as preferências do consumidor entre loterias, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade  $U(\cdot)$  com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

---

<sup>1</sup>*Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton Un. Press, 1943. 

# Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern <sup>1</sup> mostraram que, dadas algumas hipóteses razoáveis sobre as preferências do consumidor entre loterias, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade  $U(\cdot)$  com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

na qual  $u(c_1)$  e  $u(c_2)$  são as utilidade de se ganhar os prêmios  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente, com 100% de certeza.

---

<sup>1</sup>*Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Un. Press, 1943.* 

# Utilidade Esperada

John Von Neumann e Oskar Morgenstern <sup>1</sup> mostraram que, dadas algumas hipóteses razoáveis sobre as preferências do consumidor entre loterias, tais preferências podem ser representadas por uma função de utilidade  $U(\cdot)$  com a seguinte propriedade:

$$U(c_1, c_2; \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2).$$

na qual  $u(c_1)$  e  $u(c_2)$  são as utilidade de se ganhar os prêmios  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente, com 100% de certeza. Qualquer função de utilidade com essa propriedade é chamada de **função de utilidade de Von Neumann e Morgenstern** ou de **função de utilidade com propriedade utilidade esperada**.

---

<sup>1</sup>*Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton Un. Press, 1943. 

# Transformações afim

## Definição

Caso tenhamos  $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ . Dizemos que  $V(\cdot)$  é uma transformação monotônica afim de  $U(\cdot)$ .

# Transformações afim

## Definição

Caso tenhamos  $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ . Dizemos que  $V(\cdot)$  é uma transformação monotônica afim de  $U(\cdot)$ .

## Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$  e  $V(\cdot)$  são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

# Transformações afim

## Definição

Caso tenhamos  $V(\cdot) = a + bU(\cdot)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ . Dizemos que  $V(\cdot)$  é uma transformação monotônica afim de  $U(\cdot)$ .

## Propriedade da utilidade esperada

$U(\cdot)$  e  $V(\cdot)$  são funções de utilidade que representam as mesmas preferências e têm propriedade utilidade esperada, se, e somente se, forem transformações monotônicas afim uma da outra.

## Concavidade

Note que a concavidade ou convexidade de uma função é preservada por transformações monotônicas afim.

# Exemplo: questão 15 – ANPEC 2007

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional  $u(x) = K - a/x$ , em que  $a$  e  $K$  são constantes positivas e  $x > a/k$ . Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade  $p$  e a reduz à terça parte com probabilidade  $1 - p$ . Qual deve ser o valor mínimo de  $p$  para que o indivíduo aceite participar da loteria? Multiplique a probabilidade encontrada por 100.

# Exemplo: questão 15 – ANPEC 2007

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional  $u(x) = K - a/x$ , em que  $a$  e  $K$  são constantes positivas e  $x > a/k$ . Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade  $p$  e a reduz à terça parte com probabilidade  $1 - p$ . Qual deve ser o valor mínimo de  $p$  para que o indivíduo aceite participar da loteria?

Multiplique a probabilidade encontrada por 100.

**R:75**

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco**
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco**
  - **Definições**
    - Representações gráficas
    - Prêmio do risco
    - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Definições

## Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é **aveso ao risco** caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

# Definições

## Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é avesso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

## Propensão ao risco

Diz-se que um consumidor é **propenso ao risco** caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

# Definições

## Aversão ao risco

Diz-se que um consumidor é avesso ao risco caso ele prefira o valor esperado dos prêmios de uma loteria com prêmios monetário a essa loteria.

## Propensão ao risco

Diz-se que um consumidor é propenso ao risco caso ele prefira uma loteria com prêmios monetário ao valor esperado dos prêmios dessa loteria.

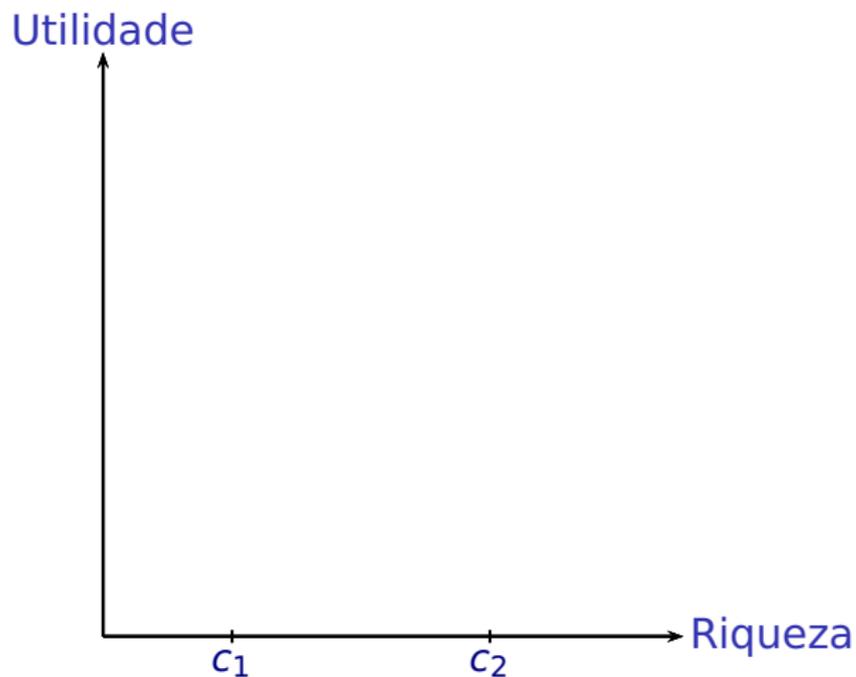
## Neutralidade frente ao risco

Diz-se que um consumidor é **risco neutro** caso ele seja indiferente entre uma loteria com prêmios monetário e o valor esperado dos prêmios dessa loteria.

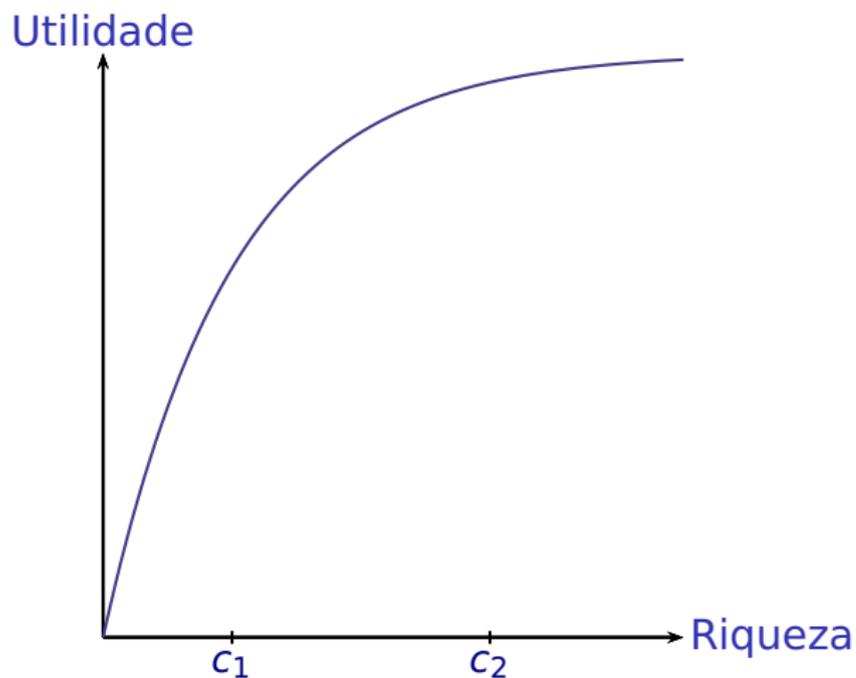
# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco**
  - Definições
  - Representações gráficas**
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

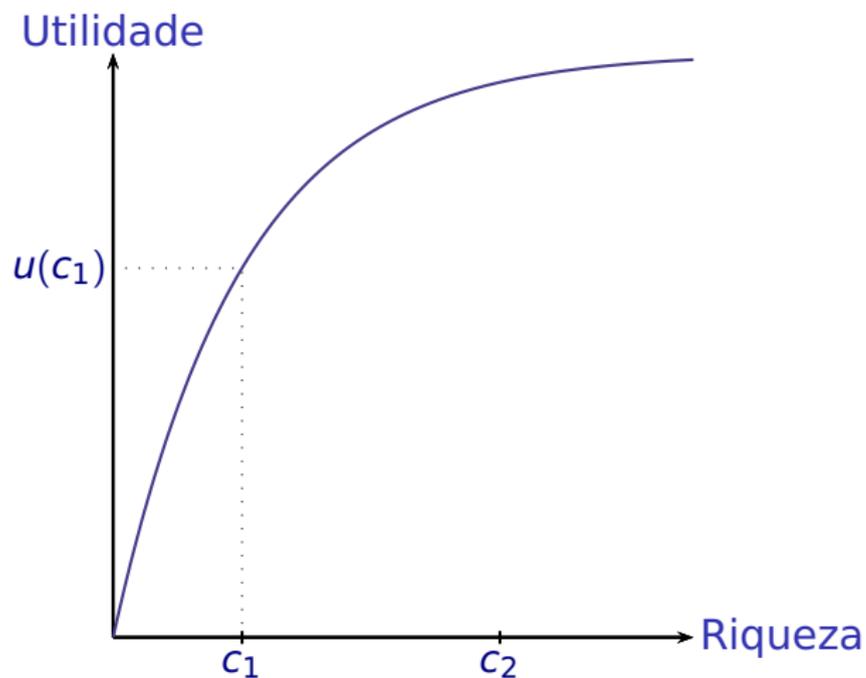
# Aversão ao risco: representação gráfica



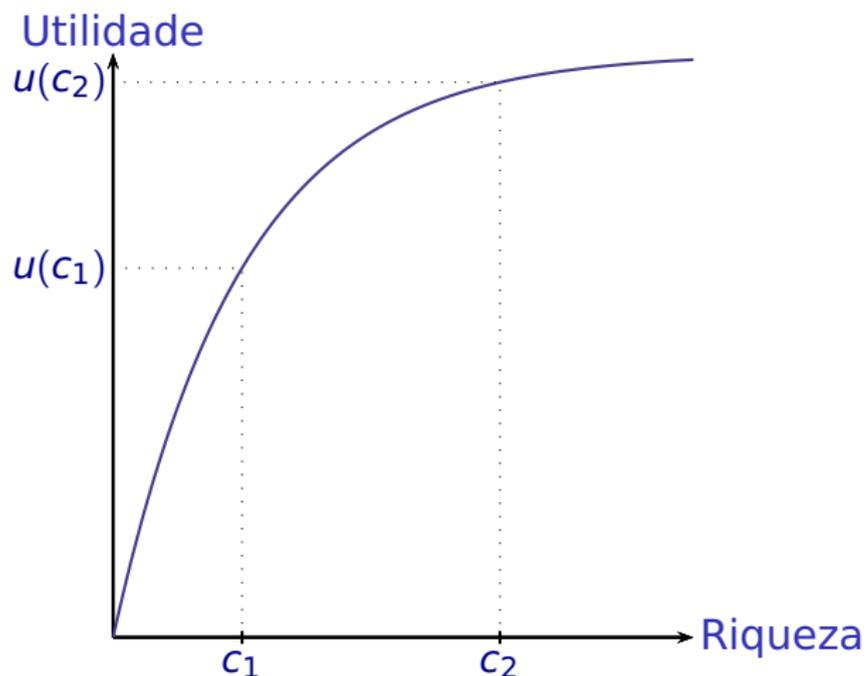
# Aversão ao risco: representação gráfica



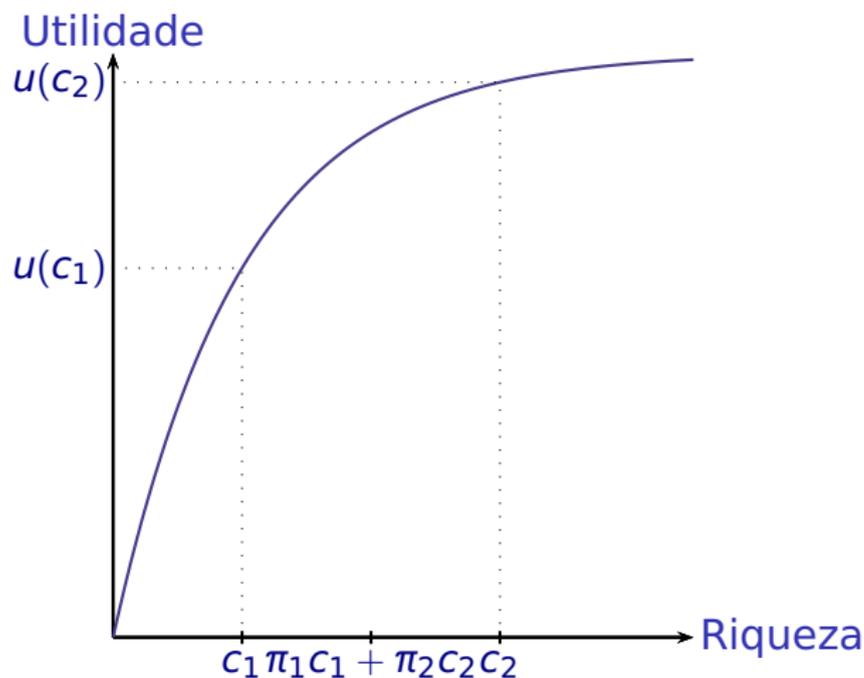
# Aversão ao risco: representação gráfica



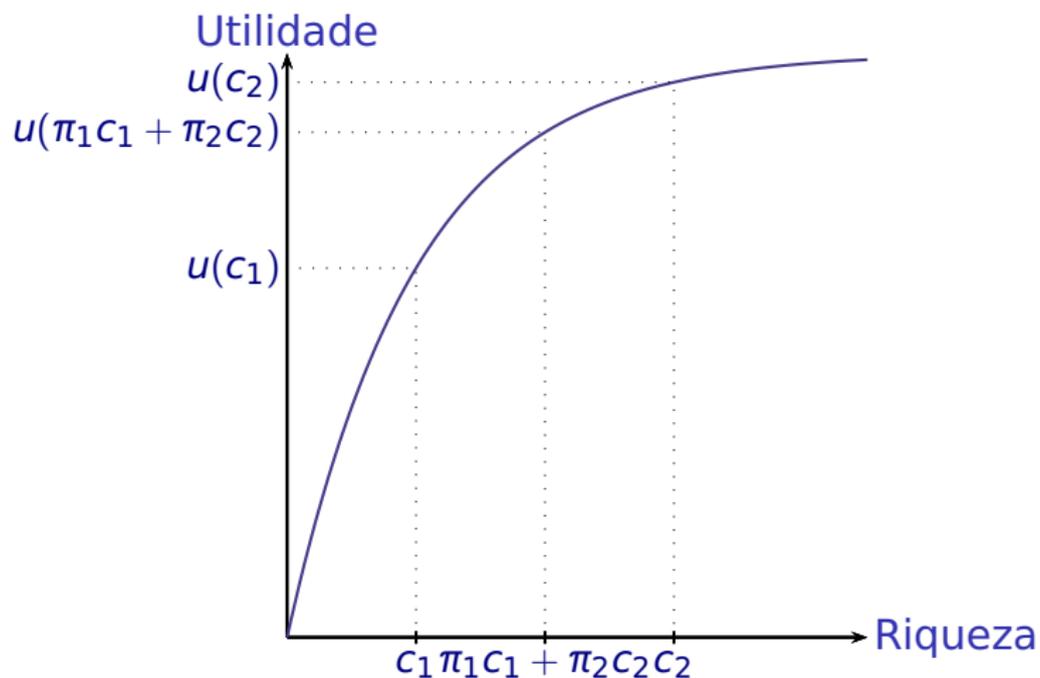
# Aversão ao risco: representação gráfica



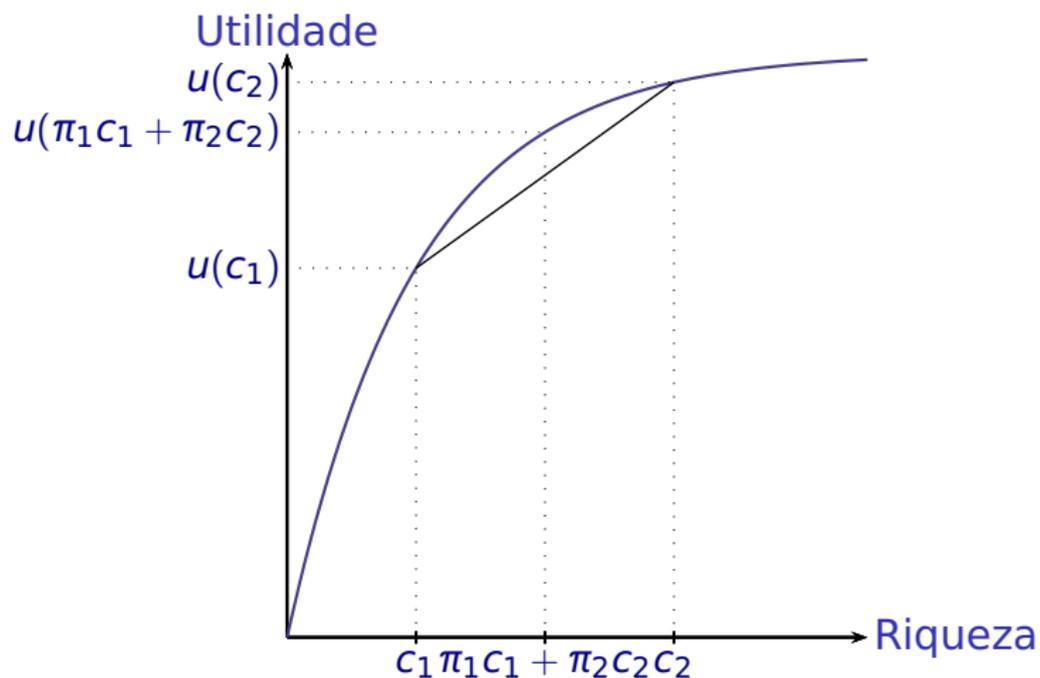
# Aversão ao risco: representação gráfica



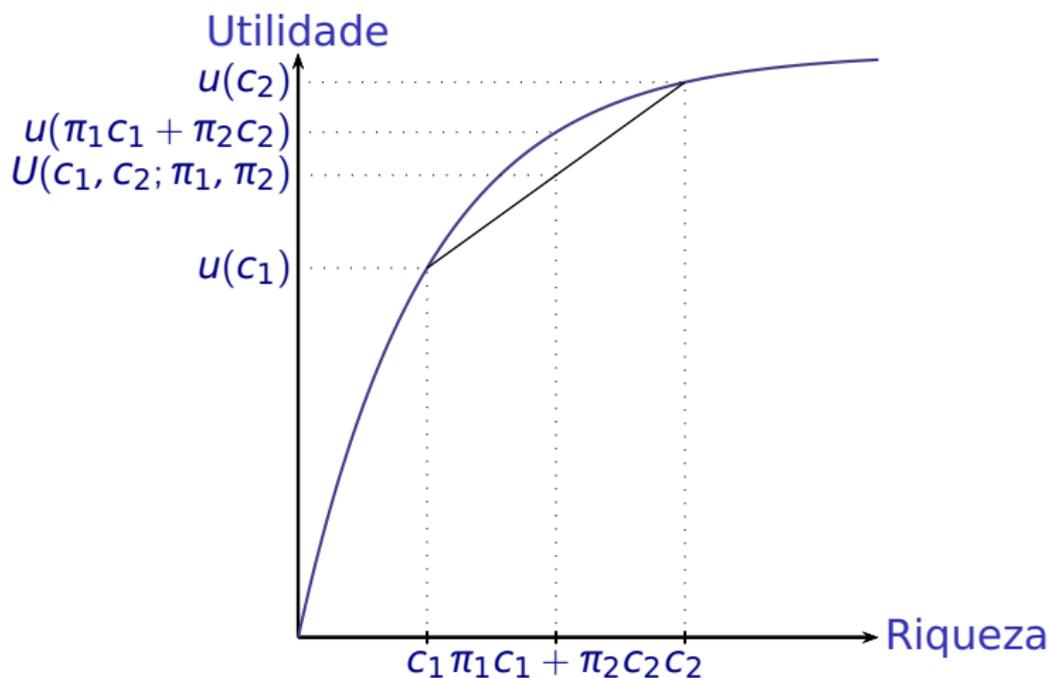
# Aversão ao risco: representação gráfica



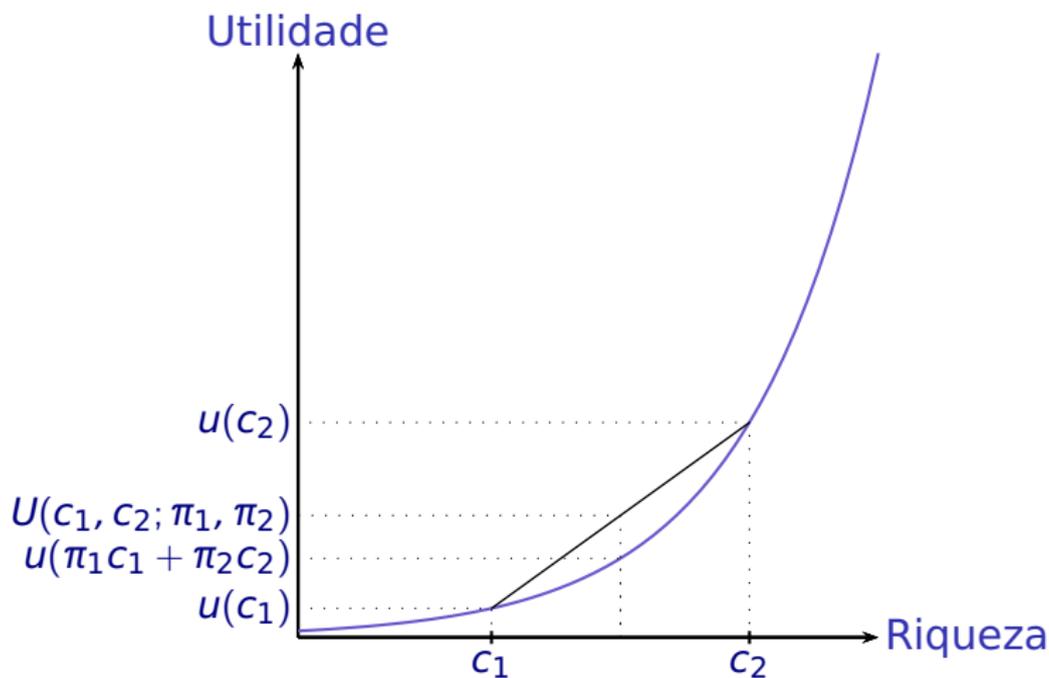
# Aversão ao risco: representação gráfica



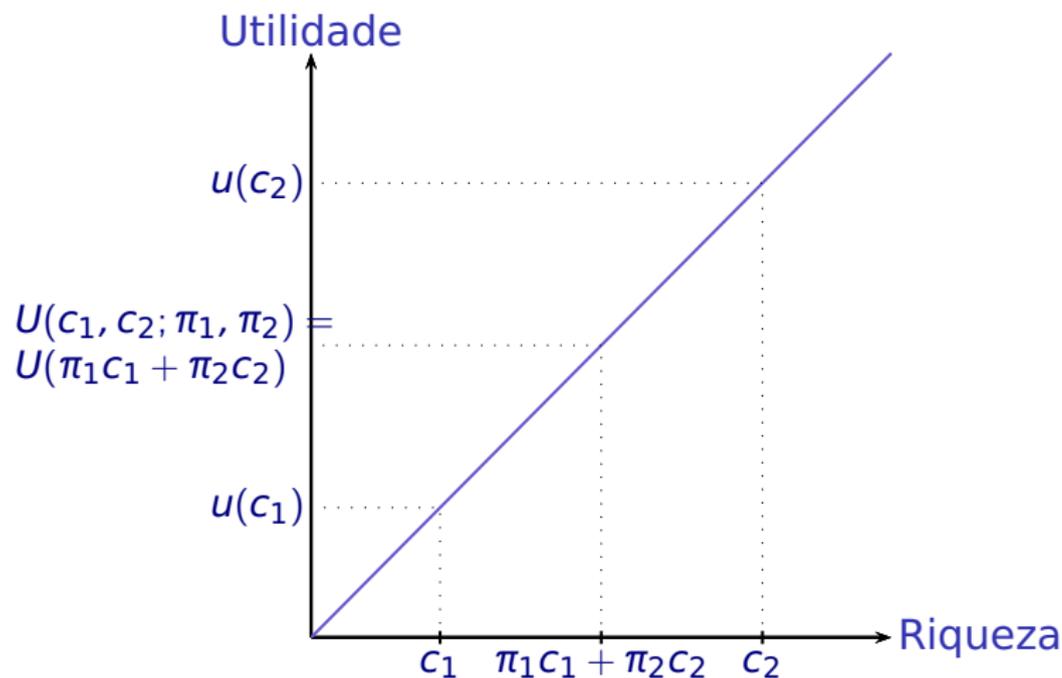
# Aversão ao risco: representação gráfica



# Propensão ao risco: representação gráfica



# Neutralidade frente ao risco: representação gráfica



# Questão 05 ANPEC 2011

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

- 0 Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza  $W$ , de tal modo que sua função utilidade é dada por  $U(W) = 1 - CW^{-\alpha}$  em que  $\alpha$  e  $C$  são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco.

# Questão 05 ANPEC 2011

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

- 0 Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza  $W$ , de tal modo que sua função utilidade é dada por  $U(W) = 1 - CW^{-\alpha}$  em que  $\alpha$  e  $C$  são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco.

V

# Questão 05 ANPEC 2011

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

- 0 Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza  $W$ , de tal modo que sua função utilidade é dada por  $U(W) = 1 - CW^{-\alpha}$  em que  $\alpha$  e  $C$  são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco. V
- 1 Supondo que João deve pagar \$2 para participar de uma competição cujo prêmio é \$19 e a probabilidade de ganhar  $1/3$ . Se o agente possui uma função utilidade esperada definida por  $U(x) = \log x$  e o seu nível corrente de riqueza é \$10, então não faz sentido que ele venha participar da competição.

# Questão 05 ANPEC 2011

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

- 0 Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza  $W$ , de tal modo que sua função utilidade é dada por  $U(W) = 1 - CW^{-\alpha}$  em que  $\alpha$  e  $C$  são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco. V
- 1 Supondo que João deve pagar \$2 para participar de uma competição cujo prêmio é \$19 e a probabilidade de ganhar  $1/3$ . Se o agente possui uma função utilidade esperada definida por  $U(x) = \log x$  e o seu nível corrente de riqueza é \$10, então não faz sentido que ele venha participar da competição. F

## Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 2 Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta.

## Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 2 Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta. V

## Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 2 Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta. ✓
- 3 Joana possui uma propriedade que vale \$ 300.000, mas está preocupada com seu futuro, cujo bem estar ( $U$ ) depende integralmente daquele valor, segundo a relação  $U(W) = W^{5/4}$ . Em um dado ano, existe uma chance de 2% de que a propriedade pegue fogo, o que resultaria numa redução de seu valor para \$ 30.000. Neste caso, os indícios são de que Joana é avessa ao risco.

## Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 2 Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$ 100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece pagamento anual de \$ 70.000 em troca de toda a sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta. V
- 3 Joana possui uma propriedade que vale \$ 300.000, mas está preocupada com seu futuro, cujo bem estar ( $U$ ) depende integralmente daquele valor, segundo a relação  $U(W) = W^{5/4}$ . Em um dado ano, existe uma chance de 2% de que a propriedade pegue fogo, o que resultaria numa redução de seu valor para \$ 30.000. Neste caso, os indícios são de que Joana é avessa ao risco. F

# Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 4 Supondo que Antonio possui uma função utilidade dada por  $U(W) = \frac{W^{1/2}}{10}$ , em que  $W$  equivale ao seu nível de riqueza. Supondo que ele participe de um jogo com distribuição de pay-offs apresentada no quadro abaixo, então a utilidade esperada do jogo equivale a \$ 2,5.

Situação do jogo	Pay-offs	Probabilidade
1	\$ 400	1/3
2	\$ 225	1/3
3	\$ 100	1/3

# Questão 05 ANPEC 2011 (continuação)

- 4 Supondo que Antonio possui uma função utilidade dada por  $U(W) = \frac{W^{1/2}}{10}$ , em que  $W$  equivale ao seu nível de riqueza. Supondo que ele participe de um jogo com distribuição de pay-offs apresentada no quadro abaixo, então a utilidade esperada do jogo equivale a \$ 2,5. F

Situação do jogo	Pay-offs	Probabilidade
1	\$ 400	1/3
2	\$ 225	1/3
3	\$ 100	1/3

## Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada;

## Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada;

F

# Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada;
- 1 Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independe das escolhas em outro estado da natureza;

F

# Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada; F
- 1 Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independe das escolhas em outro estado da natureza; V

# Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada; F
- 1 Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independe das escolhas em outro estado da natureza; V
- 2 Se a função de utilidade for linear nas probabilidades, a utilidade atribuída a um jogo de azar será apenas o produto das utilidades dos diversos resultados possíveis, com cada utilidade elevada a sua probabilidade;

# Questão 04 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 0 Se submetermos uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada; F
- 1 Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independe das escolhas em outro estado da natureza; V
- 2 Se a função de utilidade for linear nas probabilidades, a utilidade atribuída a um jogo de azar será apenas o produto das utilidades dos diversos resultados possíveis, com cada utilidade elevada a sua probabilidade; F

## Questão 04 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 3 Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco;

## Questão 04 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 3 Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco; **F**

## Questão 04 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 3 Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco; F
- 4 Se  $c_1$  representa o consumo no estado 1 e  $c_2$  o consumo no estado 2, e da mesma forma  $p_1$  representa a probabilidade do estado 1 e  $p_2$  a probabilidade do estado 2, uma função de utilidade Von Neumann- Morgenstern assumiria a forma:  $c_1^{p_1} c_2^{p_2}$ .

## Questão 04 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

- 3 Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco; F
- 4 Se  $c_1$  representa o consumo no estado 1 e  $c_2$  o consumo no estado 2, e da mesma forma  $p_1$  representa a probabilidade do estado 1 e  $p_2$  a probabilidade do estado 2, uma função de utilidade Von Neumann- Morgenstern assumiria a forma:  $c_1^{p_1} c_2^{p_2}$  . F

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco**
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco**
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Definições

## Equivalente Seguro

O **equivalente seguro** de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

# Definições

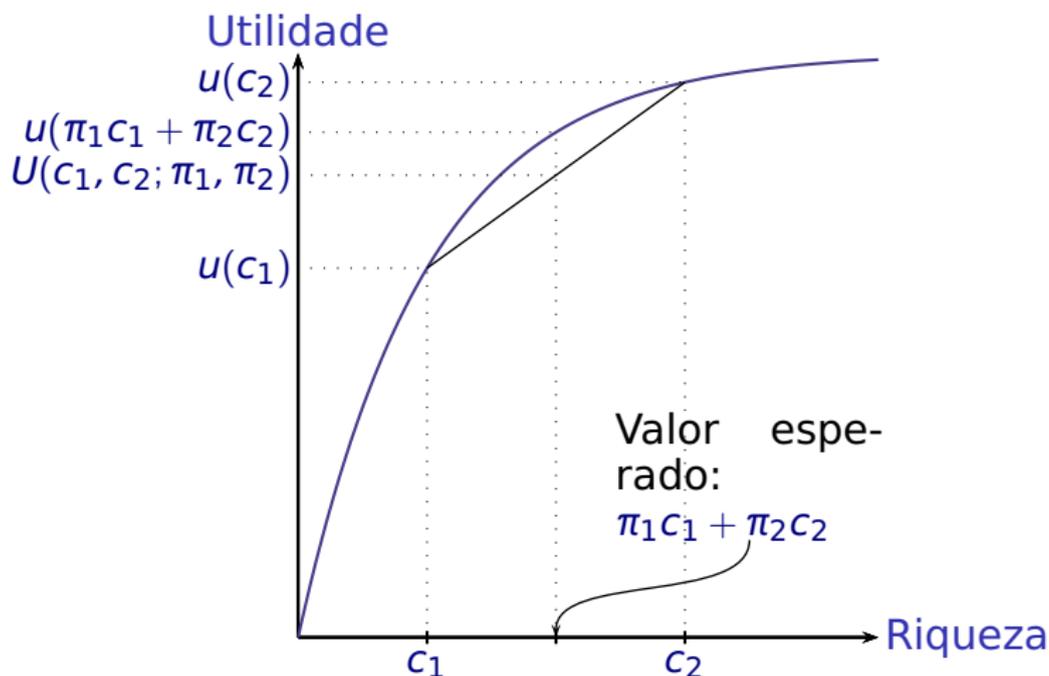
## Equivalente Seguro

O equivalente seguro de uma loteria monetária é o valor 100% seguro que o consumidor considera indiferente à loteria.

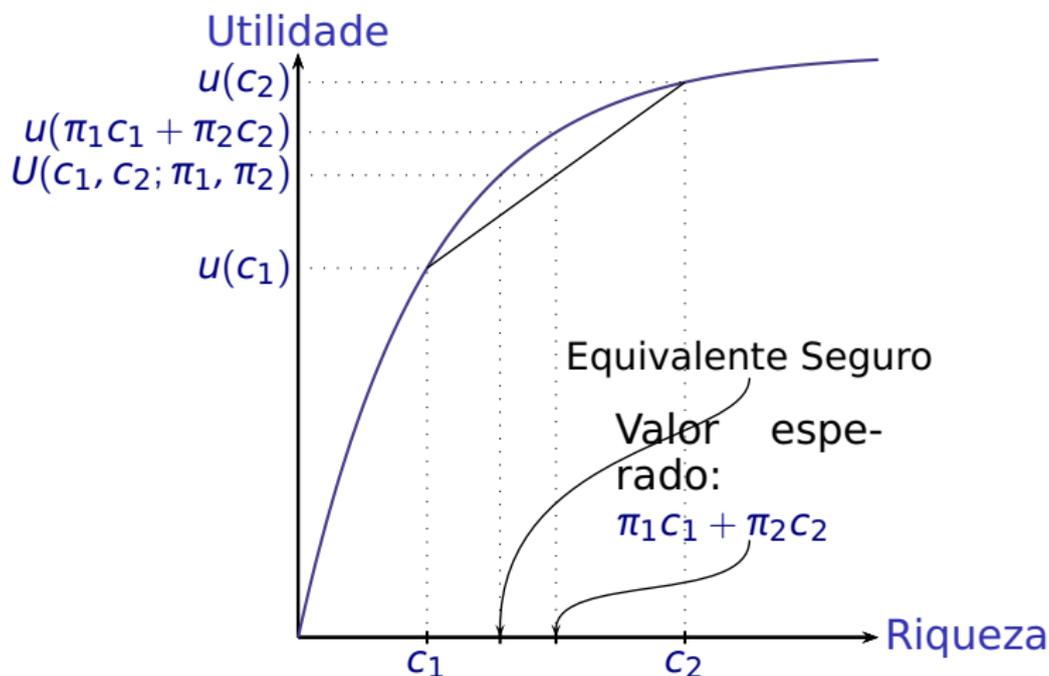
## Prêmio do risco

O **prêmio do risco** de uma loteria monetária é a diferença entre o valor esperado dessa loteria e seu equivalente seguro.

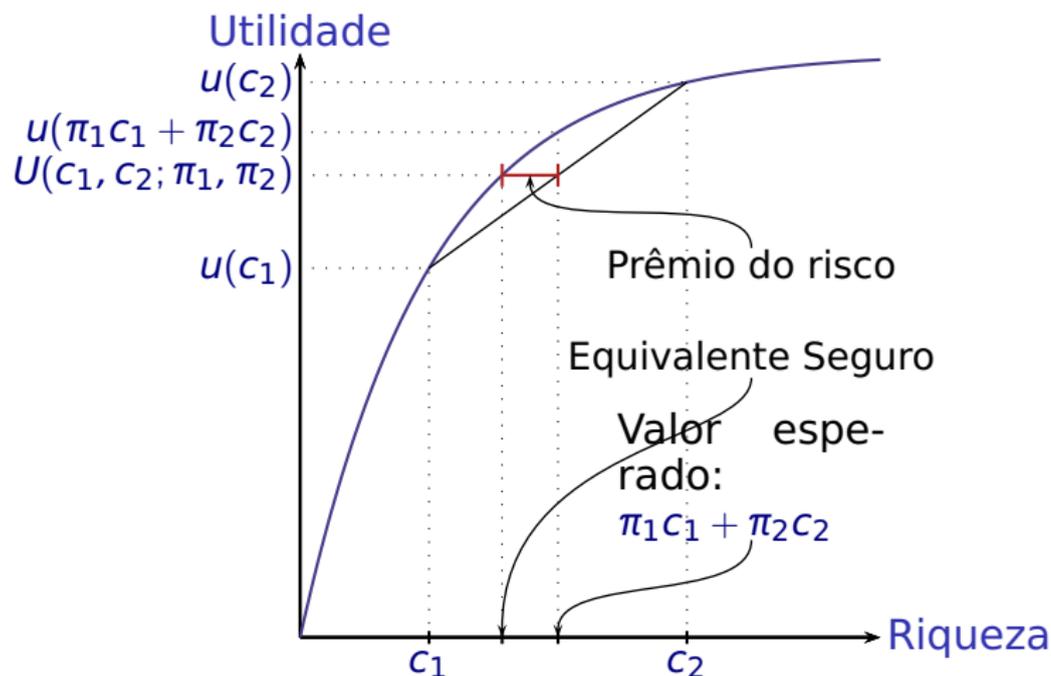
# Representação gráfica



# Representação gráfica



# Representação gráfica



# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que  $w$  pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que  $w$  pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado:  $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que  $w$  pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

$$\text{Valor esperado: } VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$$

$$\text{Utilidade esperada: } UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que  $w$  pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado:  $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada:  $UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$

Equivalente seguro:  $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

# Exemplo numérico

Função de utilidade V. Neumann - Morgenstern:  $u(w) = \sqrt{w}$

Valores que  $w$  pode assumir: 9 com 50% de chance ou 25 com 50% de chance.

Valor esperado:  $VE = \frac{9 + 25}{2} = 17$

Utilidade esperada:  $UE = \frac{3 + 5}{2} = 4$

Equivalente seguro:  $\sqrt{ES} = 4 \Rightarrow ES = 16$

Prêmio do risco:  $PR = VE - ES = 17 - 16 = 1$

## Questão 12 — ANPEC 2006

Um consumidor tem uma função utilidade de von Neumann-Morgenstern representada por  $u(z) = \log_2 z$ . Ele possui uma riqueza inicial de R\$ 128 e participará gratuitamente de uma loteria que pagará R\$ 384,00 com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e R\$ 0 com probabilidade  $\frac{1}{2}$ . O menor valor que o consumidor estaria disposto a receber em troca do bilhete de loteria é de  $2^\beta$ . Qual o valor de  $\beta$ ?

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco**
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco**
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

# Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

## Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

# Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

## Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

## Aversão absoluta ao risco constante:

$$u(w) = -e^{-\alpha w}, \alpha > 0$$

# Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

## Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

## Aversão relativa

$$-w \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

## Aversão absoluta ao risco constante:

$$uw = -e^{-\alpha w}, \alpha > 0$$

# Medidas de Arrow-Pratt aversão ao risco

## Aversão absoluta

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

## Aversão relativa

$$-w \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

## Aversão absoluta ao risco constante:

$$uw = -e^{-\alpha w}, \alpha > 0$$

## Aversão relativa ao risco constante:

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{para } \alpha \neq 1$$

$$u(w) = \ln w \quad \text{para } \alpha = 1$$

## Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008

Um indivíduo possui riqueza  $W = \$100$  e se depara com uma loteria que pode acrescentar  $\$44$  a sua riqueza, com probabilidade  $1/4$ , ou subtrair  $\$36$ , com probabilidade  $3/4$ . Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ . Julgue as afirmações:

- 0 A medida relativa de aversão ao risco desse indivíduo é estritamente decrescente.

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008

Um indivíduo possui riqueza  $W = \$100$  e se depara com uma loteria que pode acrescentar  $\$44$  a sua riqueza, com probabilidade  $1/4$ , ou subtrair  $\$36$ , com probabilidade  $3/4$ . Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ . Julgue as afirmações:

- 0 A medida relativa de aversão ao risco desse indivíduo é estritamente decrescente.

F

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008

Um indivíduo possui riqueza  $W = \$100$  e se depara com uma loteria que pode acrescentar  $\$44$  a sua riqueza, com probabilidade  $1/4$ , ou subtrair  $\$36$ , com probabilidade  $3/4$ . Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ . Julgue as afirmações:

- 0 A medida relativa de aversão ao risco desse indivíduo é estritamente decrescente. F
- 1 O máximo que o indivíduo está disposto a pagar para se livrar do risco é  $\$19$ .

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008

Um indivíduo possui riqueza  $W = \$100$  e se depara com uma loteria que pode acrescentar  $\$44$  a sua riqueza, com probabilidade  $1/4$ , ou subtrair  $\$36$ , com probabilidade  $3/4$ . Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ . Julgue as afirmações:

- 0 A medida relativa de aversão ao risco desse indivíduo é estritamente decrescente. F
- 1 O máximo que o indivíduo está disposto a pagar para se livrar do risco é  $\$19$ . V

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco.

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco. V

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco. V
- 3 Se a riqueza do indivíduo aumentasse, sua aversão absoluta ao risco diminuiria.

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco. V
- 3 Se a riqueza do indivíduo aumentasse, sua aversão absoluta ao risco diminuiria. V

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco. V
- 3 Se a riqueza do indivíduo aumentasse, sua aversão absoluta ao risco diminuiria. V
- 4 Para esse indivíduo, a utilidade esperada da riqueza é maior do que a utilidade do valor esperado da riqueza.

# Exemplo: Questão 03, ANPEC 2008 (continuação)

- 2 O indivíduo está disposto a pagar \$3 a mais do que o prêmio de seguro justo (fair insurance premium) para se livrar do risco. V
- 3 Se a riqueza do indivíduo aumentasse, sua aversão absoluta ao risco diminuiria. V
- 4 Para esse indivíduo, a utilidade esperada da riqueza é maior do que a utilidade do valor esperado da riqueza. F

## Questão 08, ANPEC 2009

Um indivíduo possui a seguinte função utilidade  $U = 1 - (1/W)$ , em que  $W$  é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de  $W = 5$ . A outra alternativa dará  $W = 400$ , com 1% de chance, e  $W = 4$ , com 99% de chance. Assim sendo, responda às seguintes questões:

- 0 O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é  $1/W$ .

## Questão 08, ANPEC 2009

Um indivíduo possui a seguinte função utilidade  $U = 1 - (1/W)$ , em que  $W$  é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de  $W = 5$ . A outra alternativa dará  $W = 400$ , com 1% de chance, e  $W = 4$ , com 99% de chance. Assim sendo, responda às seguintes questões:

- 0 O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é  $1/W$ . F

## Questão 08, ANPEC 2009

Um indivíduo possui a seguinte função utilidade  $U = 1 - (1/W)$ , em que  $W$  é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de  $W = 5$ . A outra alternativa dará  $W = 400$ , com 1% de chance, e  $W = 4$ , com 99% de chance. Assim sendo, responda às seguintes questões:

- 0 O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é  $1/W$ . F
- 1 É maior a utilidade esperada da segunda opção.

## Questão 08, ANPEC 2009

Um indivíduo possui a seguinte função utilidade  $U = 1 - (1/W)$ , em que  $W$  é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de  $W = 5$ . A outra alternativa dará  $W = 400$ , com 1% de chance, e  $W = 4$ , com 99% de chance. Assim sendo, responda às seguintes questões:

- 0 O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é  $1/W$ . F
- 1 É maior a utilidade esperada da segunda opção. F

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1.

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1.

F

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1. F
- 3 O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4,5.

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1. F
- 3 O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4,5. F

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1. F
- 3 O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4,5. F
- 4 A aversão relativa ao risco deste indivíduo diminui no caso em que ele possua  $W = 400$  se comparada ao caso em que ele possua  $W = 5$ .

## Questão 08, ANPEC 2009 (continuação)

- 2 Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter  $W = 400$  ou  $W = 4$  se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1. F
- 3 O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4,5. F
- 4 A aversão relativa ao risco deste indivíduo diminui no caso em que ele possua  $W = 400$  se comparada ao caso em que ele possua  $W = 5$ . F

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - **Exemplos**
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Exemplo – ANPEC 1995

Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por  $U(Y) = \ln Y$ , sendo  $Y$  o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

## Exemplo – ANPEC 1995

Um fazendeiro tem a opção de cultivar trigo e batatas. Se fizer sol, cada hectare gerará um lucro de 200 se plantado com trigo e de 100 se plantado com batata. Se chover cada hectare de trigo gerará um lucro de 120 e cada hectare de batata gerará um lucro de 200. A utilidade do fazendeiro é dada por  $U(Y) = \ln Y$ , sendo  $Y$  o lucro obtido. As probabilidades de fazer sol e de chover são iguais. Que proporção de sua terra o fazendeiro deverá destinar ao plantio de cada produto?

Resposta: 75% de trigo e 25% de batata.

## Exemplo – ANPEC 2005, questão 02

Um indivíduo tem renda de R\$ 12,00. Este indivíduo tem a possibilidade de investir em um ativo de risco que dá um retorno unitário de R\$ 16,00, com probabilidade 0,5, e retorno zero, com probabilidade 0,5. O preço unitário do ativo é R\$ 3,00. Sua função-utilidade de von Neumann-Morgenstern é  $u(x) = \sqrt{x}$ . Julgue as afirmativas:

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$

F

## Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4.

F

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V

## Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4.
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco.

F

V

## Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco. F

## Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco. F
- 3 O equivalente-certeza na opção de comprar o ativo é 18.

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco. F
- 3 O equivalente-certeza na opção de comprar o ativo é 18. F

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco. F
- 3 O equivalente-certeza na opção de comprar o ativo é 18. F
- 4 Suponha que este indivíduo tenha a opção adicional de investir em um ativo sem risco com taxa de retorno  $r$ . O valor de  $r$  que o deixa indiferente entre o ativo de risco e o ativo sem risco é 33,33%.

# Exemplo – ANPEC 2005, questão 02 (cont.)

- 0 Sendo  $c_b$  seu consumo no estado bom e  $c_r$ , no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será  $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$  F
- 1 Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4. V
- 2 Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco. F
- 3 O equivalente-certeza na opção de comprar o ativo é 18. F
- 4 Suponha que este indivíduo tenha a opção adicional de investir em um ativo sem risco com taxa de retorno  $r$ . O valor de  $r$  que o deixa indiferente entre o ativo de risco e o ativo sem risco é 33,33%. V

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada**
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco**
- 7 Utilidade média variância
  - O modelo CAPM

# Justiça atuarial

## Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

## Exemplos

- 1 Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R\$10,00, se for coroa, você pagará R\$10,00.

# Justiça atuarial

## Loterias atuarialmente justas

Loterias atuarialmente justas são loterias que geram um ganho esperado líquido igual a zero.

## Exemplos

- 1 Não pagar nada para entrar no seguinte jogo: se o resultado do lançamento de uma moeda não viciada for cara, você receberá R\$10,00, se for coroa, você pagará R\$10,00.
- 2 Um seguro com preço de R\$1.000,00 contra o roubo de um automóvel que vale R\$10.000,00 cuja probabilidade é de 10%.

# Quanto segurar

Suponha que um consumidor avesso ao risco tenha uma riqueza  $w$  que poderá ser reduzida de um valor  $L$ , por exemplo, em virtude do roubo de seu automóvel, com probabilidade  $\pi$ . Se uma seguradora oferecer segurar qualquer parcela dessa perda a uma taxa atuarialmente justa, ou seja, cobrando  $\gamma = \pi$  reais por real segurado, quanto esse consumidor deverá segurar?

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K)$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K)$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w)$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese,  $\gamma = \pi$ ,

$$w_e = w - \pi L$$

# Solução (a)

Seja  $K$  o montante segurado. A riqueza esperada do consumidor será

$$w_e = \pi(w - L + K - \gamma K) + (1 - \pi)(w - \gamma K)$$

Simplificando,

$$w_e = w - \pi(L - K) - \gamma K$$

Como, por hipótese,  $\gamma = \pi$ ,

$$w_e = w - \pi L$$

Portanto, a riqueza esperada não é afetada pelo valor segurado  $K$ , caso o seguro seja atuarialmente justo.

# Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor  $L$ , todo o risco será eliminado.

## Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor  $L$ , todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para  $L$  envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.

# Solução (b)

- Caso o consumidor segure todo o valor  $L$ , todo o risco será eliminado.
- Qualquer outro valor para  $L$  envolverá algum risco, pois sua riqueza em caso de ocorrência da perda será diferente de sua riqueza caso essa perda não ocorra.
- Como o consumidor é avesso ao risco e como o valor esperado da riqueza não é afetado, quando  $\gamma = \pi$ , pela escolha de  $K$ . Ele deve preferir  $K = L$  a qualquer outra alternativa.

# Quando investir em um ativo de risco?

Um consumidor com aversão a risco pode dividir sua riqueza  $w$  em dois ativos: um livre de risco e com retorno  $r^f$  e outro ativo que dará um retorno  $r^0$  com probabilidade  $\pi$  e um retorno  $r^1$  com probabilidade  $1 - \pi$ . Sob que condições ele deverá investir parte de sua riqueza no ativo com risco?

## Solução (a)

Sejam  $x$  a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco,  $\rho^f = 1 + r^f$ ,  $\rho^0 = 1 + r^0$  e  $\rho^1 = 1 + r^1$ . Então:

$$UE(x) = \pi U(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\ + (1-\pi)U(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)$$

## Solução (a)

Sejam  $x$  a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco,  $\rho^f = 1 + r^f$ ,  $\rho^0 = 1 + r^0$  e  $\rho^1 = 1 + r^1$ . Então:

$$\begin{aligned}
 UE(x) = & \pi U(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)U(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)
 \end{aligned}$$

Se  $UE' > 0$ , o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

$$\begin{aligned}
 UE' = & w [\pi(\rho^0 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)(\rho^1 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)]
 \end{aligned}$$

## Solução (a)

Sejam  $x$  a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco,  $\rho^f = 1 + r^f$ ,  $\rho^0 = 1 + r^0$  e  $\rho^1 = 1 + r^1$ . Então:

$$\begin{aligned}
 UE(x) = & \pi U(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)U(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)
 \end{aligned}$$

Se  $UE' > 0$ , o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

$$\begin{aligned}
 UE' = & w [\pi(\rho^0 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)(\rho^1 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)]
 \end{aligned}$$

Calculando em  $x = 0$

## Solução (a)

Sejam  $x$  a parcela de sua riqueza que o consumidor investe no ativo de risco,  $\rho^f = 1 + r^f$ ,  $\rho^0 = 1 + r^0$  e  $\rho^1 = 1 + r^1$ . Então:

$$\begin{aligned}
 UE(x) = & \pi U(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)U(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)
 \end{aligned}$$

Se  $UE' > 0$ , o consumidor deve investir parte de sua riqueza no ativo de risco.

$$\begin{aligned}
 UE' = & w [\pi(\rho^0 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^0 xw) \\
 & + (1-\pi)(\rho^1 - \rho^f)U'(\rho^f(1-x)w + \rho^1 xw)]
 \end{aligned}$$

Calculando em  $x = 0$

$$UE'(0)\partial x = w\{\pi\rho^0 + (1-\pi)\rho^1 - \rho^f\}U'(\rho^f w)$$

# Solução (b)

Portanto, vale a pena investir mais do que zero no ativo de risco caso

$$\pi\rho^0 + (1 - \pi)\rho^1 > \rho^f$$

# Solução (b)

Portanto, vale a pena investir mais do que zero no ativo de risco caso

$$\pi\rho^0 + (1 - \pi)\rho^1 > \rho^f$$

isto é, caso

$$\pi r^0 + (1 - \pi)r^1 > r^f.$$

## Solução (b)

Portanto, vale a pena investir mais do que zero no ativo de risco caso

$$\pi\rho^0 + (1 - \pi)\rho^1 > \rho^f$$

isto é, caso

$$\pi r^0 + (1 - \pi)r^1 > r^f.$$

Ou seja, sempre que o retorno esperado do ativo com risco for maior do que o retorno do ativo livre de risco.

# Estrutura da aula

- 1 Motivação
- 2 Consumo contingente
- 3 Utilidade esperada
- 4 Utilidade Esperada
- 5 Posturas diante do risco
  - Definições
  - Representações gráficas
  - Prêmio do risco
  - Medida de aversão ao risco
- 6 Maximização de utilidade esperada
  - Exemplos
  - Comportamento de indivíduos avessos ao risco
- 7 **Utilidade média variância**
  - O modelo CAPM

# Distribuições paramétricas

- Algumas distribuições de probabilidade são perfeitamente descritas por um ou mais parâmetros. Por exemplo, a distribuição normal é totalmente descrita por sua média e por seu desvio padrão.

# Distribuições paramétricas

- Algumas distribuições de probabilidade são perfeitamente descritas por um ou mais parâmetros. Por exemplo, a distribuição normal é totalmente descrita por sua média e por seu desvio padrão.
- Nesse caso, pode-se pensar uma função de utilidade que tenha como argumento esses parâmetros.

# Utilidade média variância

- Função de utilidade decorrente de uma alocação de riqueza:  $U(\mu, \sigma)$  na qual  $\mu$  é o retorno esperado da riqueza e  $\sigma$  é o desvio padrão (uma medida de risco).

# Utilidade média variância

- Função de utilidade decorrente de uma alocação de riqueza:  $U(\mu, \sigma)$  na qual  $\mu$  é o retorno esperado da riqueza e  $\sigma$  é o desvio padrão (uma medida de risco).
- Deve-se esperar, para um consumidor com aversão ao risco, que  $\mu$  seja um bem e  $\sigma$  seja um mal.

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada:  $r_x = xr_m + (1 - x)r_f$

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada:  $r_x = xr_m + (1 - x)r_f$
  - Desvio padrão:  $\sigma_x = x\sigma_m$

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada:  $r_x = xr_m + (1 - x)r_f$
  - Desvio padrão:  $\sigma_x = x\sigma_m$
- A relação entre  $r_x$  e  $x$  será

$$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_x$$

# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada:  $r_x = xr_m + (1 - x)r_f$
  - Desvio padrão:  $\sigma_x = x\sigma_m$
- A relação entre  $r_x$  e  $x$  será

$$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_x$$

- $(r_m - r_f)/\sigma_m$  é chamado **preço do risco**;

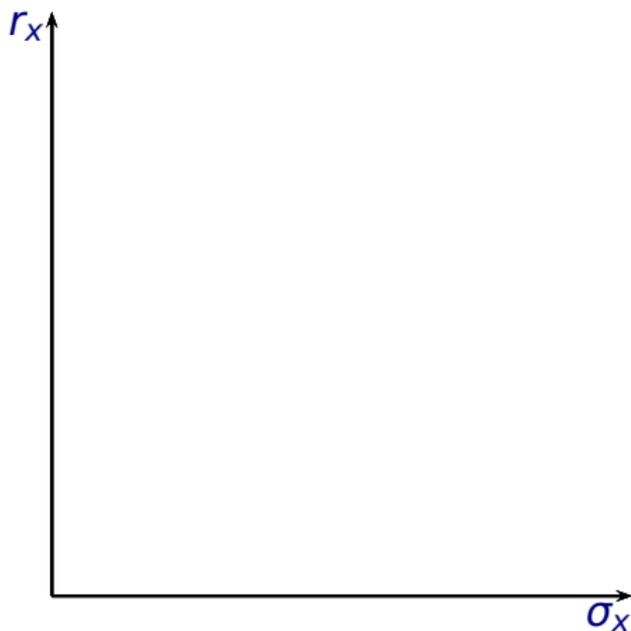
# Exemplo: Carteira de investimento com um ativo com risco

- Suponha um consumidor que deve alocar sua riqueza em dois ativos: um livre de risco com rentabilidade  $r_f$  e um com risco, rentabilidade esperada  $r_m$  e desvio padrão  $\sigma_m$ .
- Caso o consumidor opte por aplicar uma parcela  $x$  de sua renda no ativo com risco, ele terá uma carteira de investimentos com:
  - Rentabilidade esperada:  $r_x = xr_m + (1 - x)r_f$
  - Desvio padrão:  $\sigma_x = x\sigma_m$
- A relação entre  $r_x$  e  $x$  será

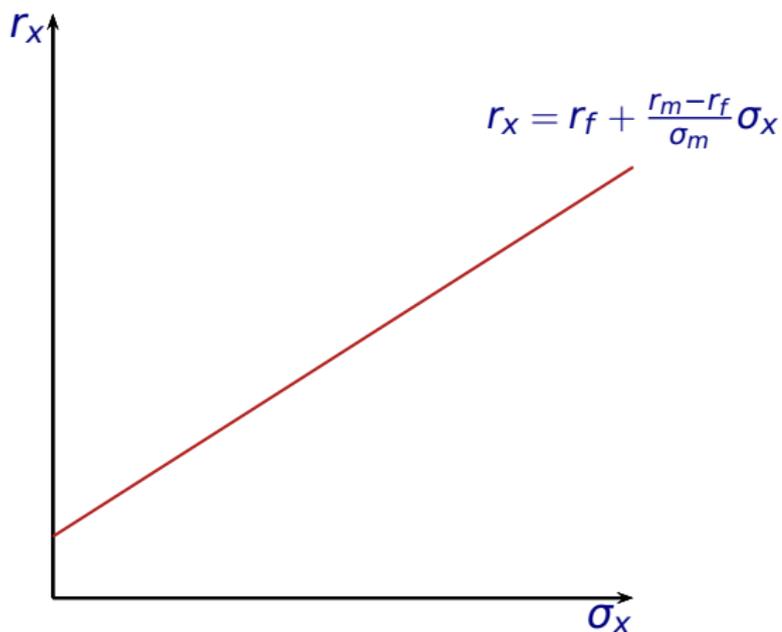
$$r_x = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_x$$

- $(r_m - r_f)/\sigma_m$  é chamado preço do risco;  $[(r_m - r_f)/\sigma_m]\sigma_x$  é o prêmio do risco.

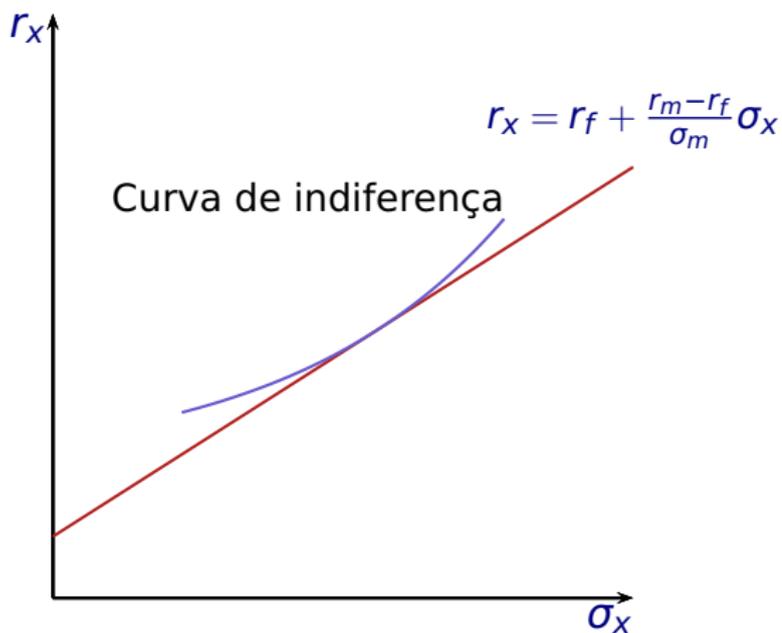
# Equilíbrio



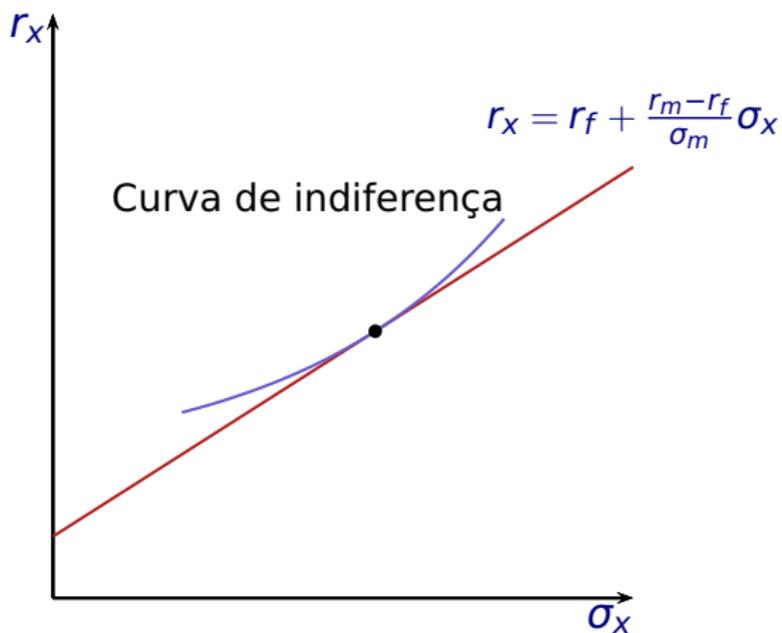
# Equilíbrio



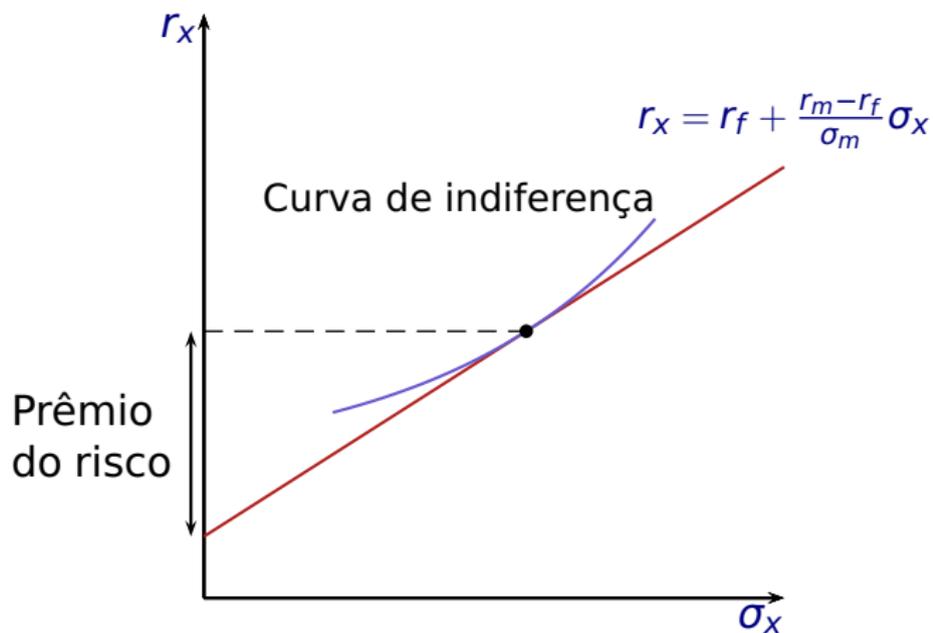
# Equilíbrio



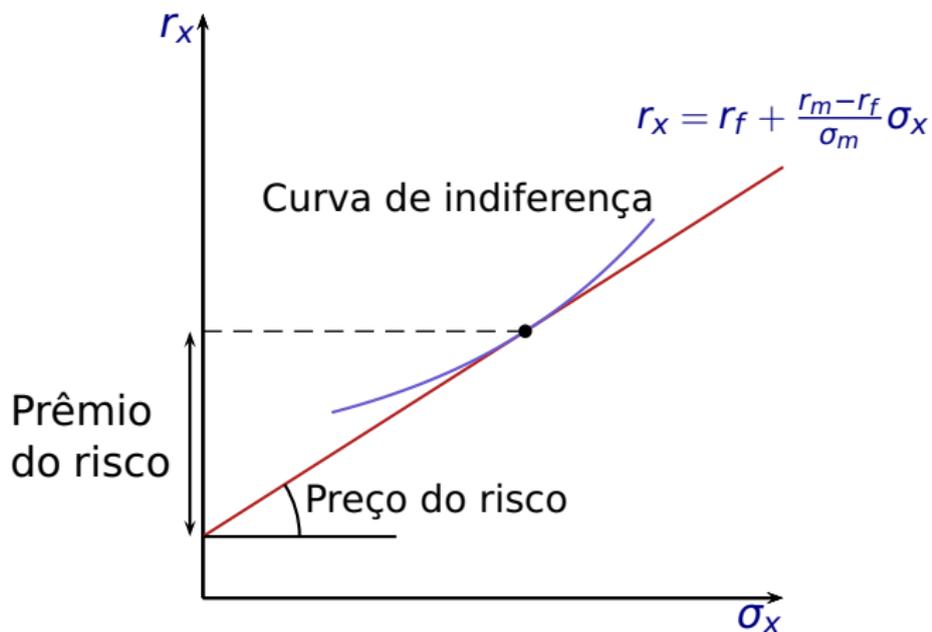
# Equilíbrio



# Equilíbrio



# Equilíbrio



# Alavancagem financeira

Caso seja possível tomar recursos emprestados à taxa de juros  $r_f$ , então, o investidor poderá escolher  $x > 1$  tomando emprestado um valor igual a  $x - 1$  vezes sua riqueza e investindo toda sua riqueza mais o valor emprestado no ativo com risco. Sua rentabilidade esperada será

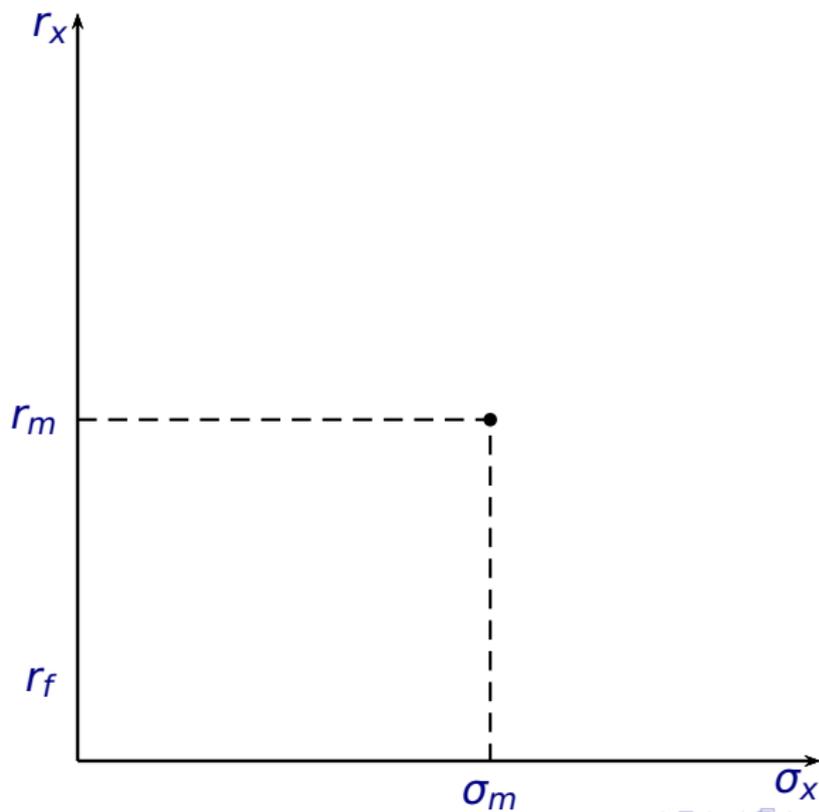
$$r_x = xr_m - (x - 1)r_f = xr_m + (1 - x)r_f.$$

O desvio padrão de sua rentabilidade será

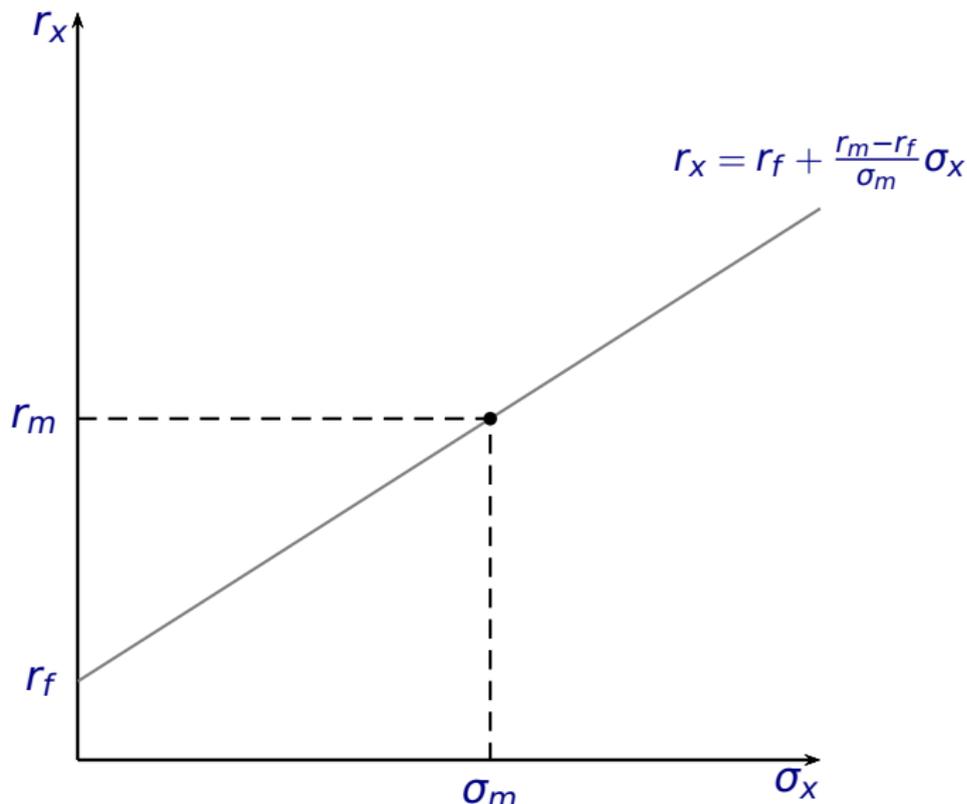
$$\sigma_x = x\sigma_m$$

Conseqüentemente, a linha de mercado continua além do ponto descrevendo a rentabilidade e o risco do ativo de risco.

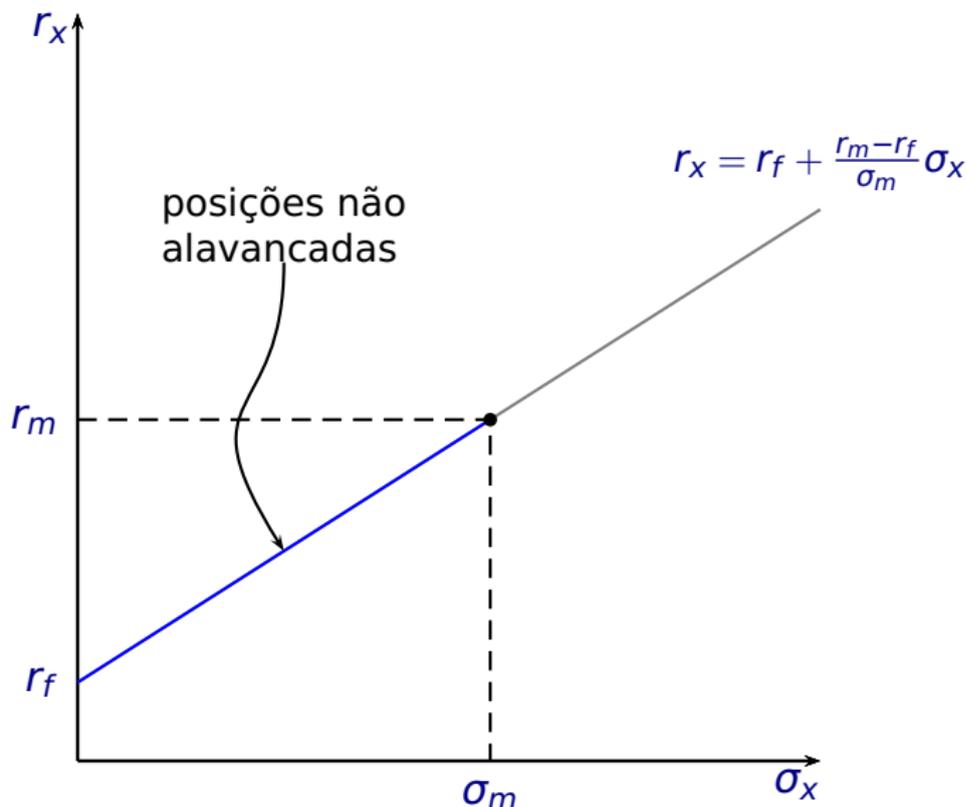
## Alavancagem financeira – representação gráfica



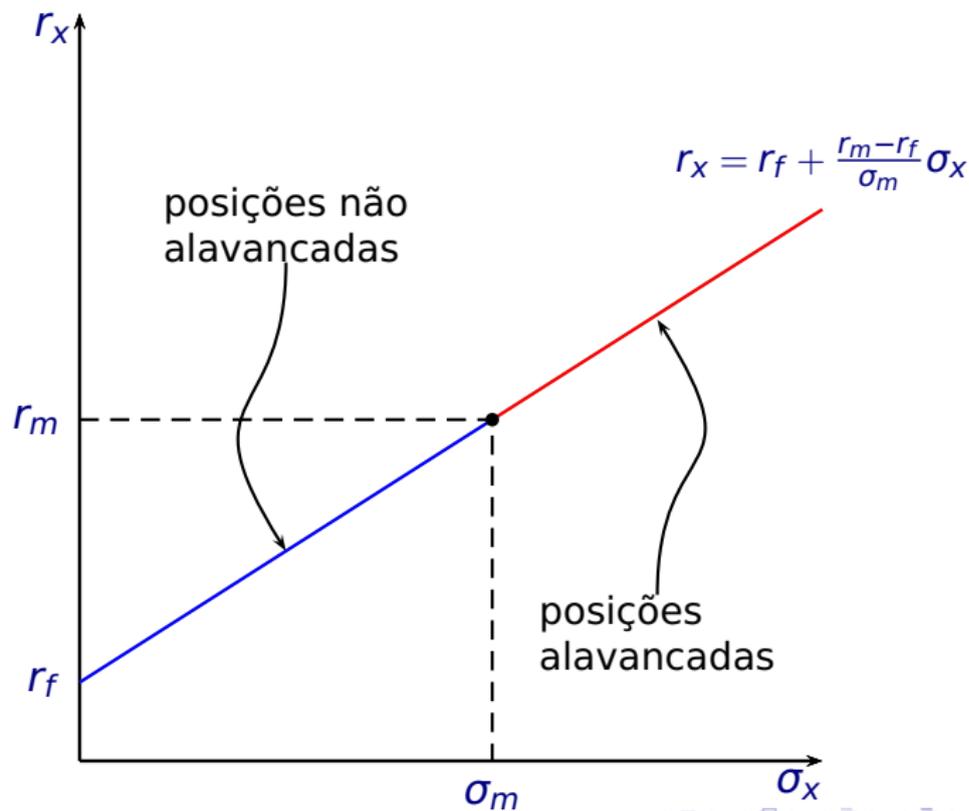
## Alavancagem financeira – representação gráfica



## Alavancagem financeira – representação gráfica



## Alavancagem financeira – representação gráfica



# Escolha entre dois ativos

## Hipóteses

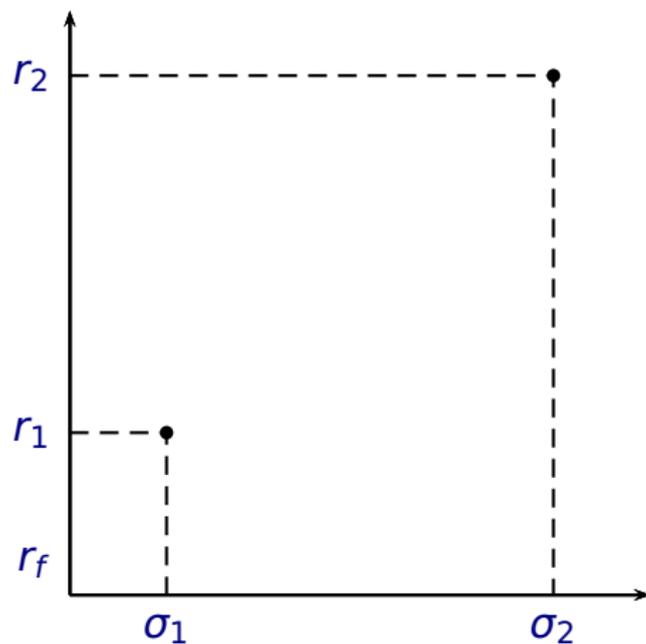
- Dois ativos com rentabilidades esperadas  $r_1$  e  $r_2$  e variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  e um ativo livre de risco com rentabilidade  $r_f$ .
- Só é possível criar portfólios contendo apenas um ativo de risco combinado com o ativo livre de risco.

## Principal conclusão

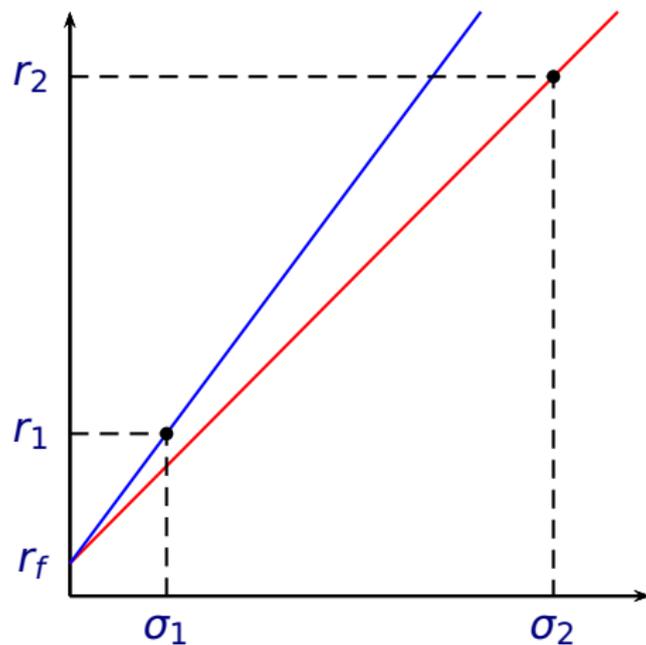
Deverá ser escolhido o ativo de risco que paga o maior preço do risco. Ex. o ativo **1** será escolhido se

$$\frac{r_1 - r_f}{\sigma_1} \geq \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2}$$

# Ilustração: Ativo 1 domina o ativo 2



# Ilustração: Ativo 1 domina o ativo 2



# Combinando dois ativos com risco

## Ativos iniciais

Ativo	rent. esperada	variância
1	$E(\tilde{r}_1) = r_1$	$\sigma_1^2$
2	$E(\tilde{r}_2) = r_2$	$\sigma_2^2$

## Portfólio composto

$$z = (\alpha, 1 - \alpha)$$

sendo que  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) representa a participação em valor do ativo 1 no portfólio.

# Combinando dois ativos com risco

## Ativos iniciais

Ativo	rent. esperada	variância
1	$E(\tilde{r}_1) = r_1$	$\sigma_1^2$
2	$E(\tilde{r}_2) = r_2$	$\sigma_2^2$

## Portfólio composto

$$z = (\alpha, 1 - \alpha)$$

sendo que  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) representa a participação em valor do ativo 1 no portfólio. Conseqüentemente esse ativo terá

Retorno esperado  $E(\tilde{r}_z) = r_z = \alpha r_1 + (1 - \alpha)r_2$

# Combinando dois ativos com risco

## Ativos iniciais

Ativo	rent. esperada	variância
1	$E(\tilde{r}_1) = r_1$	$\sigma_1^2$
2	$E(\tilde{r}_2) = r_2$	$\sigma_2^2$

## Portfólio composto

$$z = (\alpha, 1 - \alpha)$$

sendo que  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) representa a participação em valor do ativo 1 no portfólio. Conseqüentemente esse ativo terá

Retorno esperado  $E(\tilde{r}_z) = r_z = \alpha r_1 + (1 - \alpha)r_2$

Variância  $\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2}$

# Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

Chegamos a

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2}$$

# Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

Chegamos a

$$\sigma_z^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2}$$

# Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

Chegamos a

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2} \\ &\leq \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1 \sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

# Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

Chegamos a

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2} \\ &\leq \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1 \sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2]^2\end{aligned}$$

Consequentemente,  $\sigma_z \leq \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2$ .

# Redução de risco via diversificação

Lembrando que

$$\sigma_{1,2} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

Chegamos a

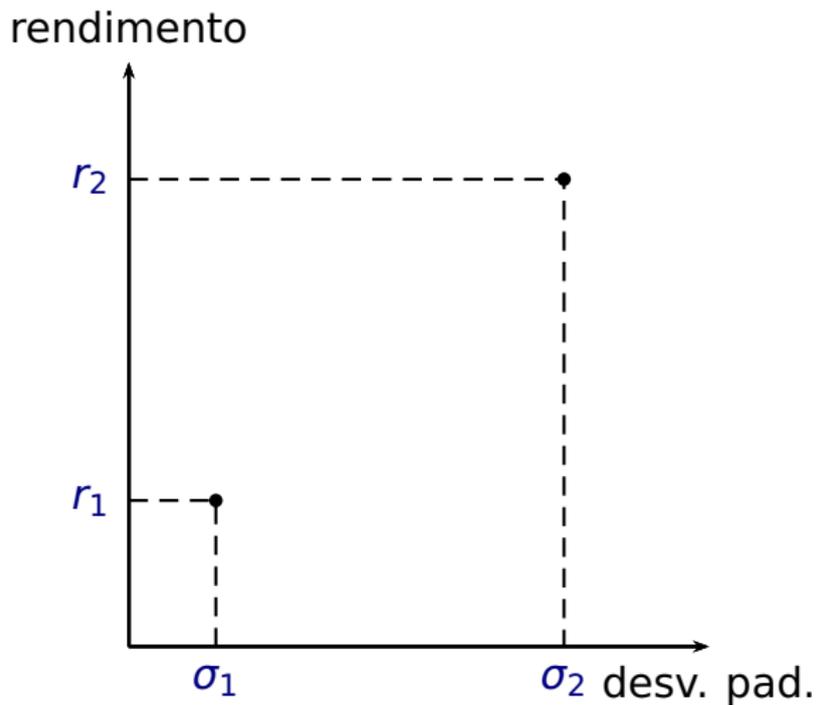
$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{1,2} \\ &\leq \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_1 \sigma_2 \\ &= [\alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2]^2 \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\sigma_z \leq \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_2$ .

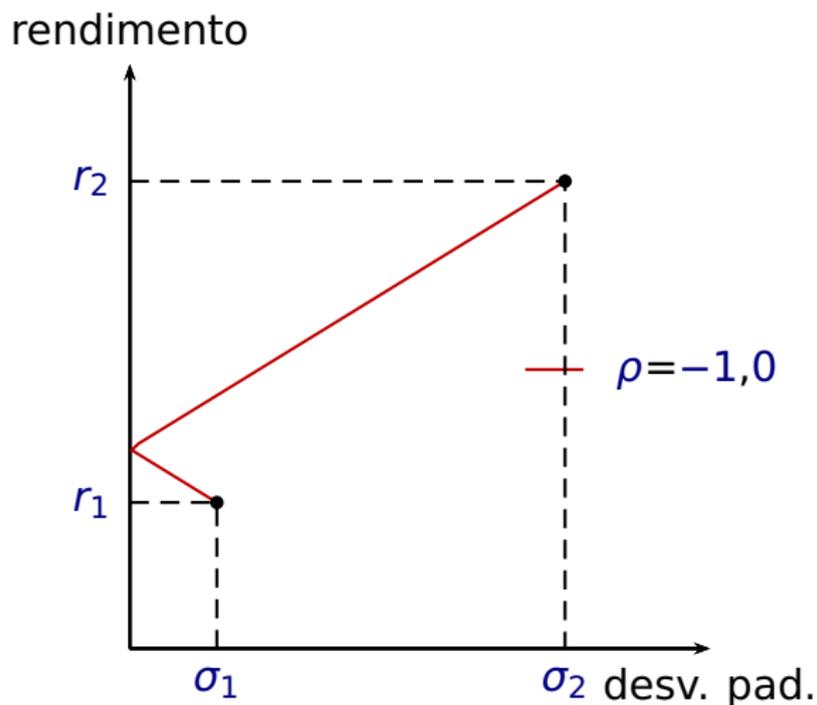
Em particular, caso tenhamos  $r_1 = r_2 = \bar{r}$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}$  com  $\tilde{r}_1$  e  $\tilde{r}_2$  não apresentando correlação linear perfeita e positiva ( $\sigma_{1,2} < \sigma_1 \sigma_2$ ), teremos

$$\sigma_z < \bar{\sigma}$$

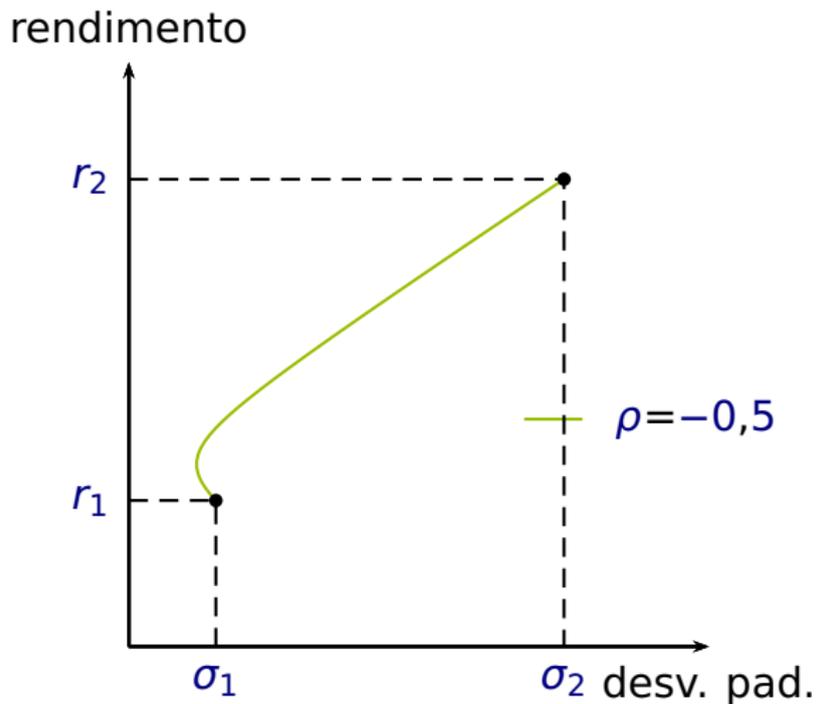
# Diversificação: representação gráfica



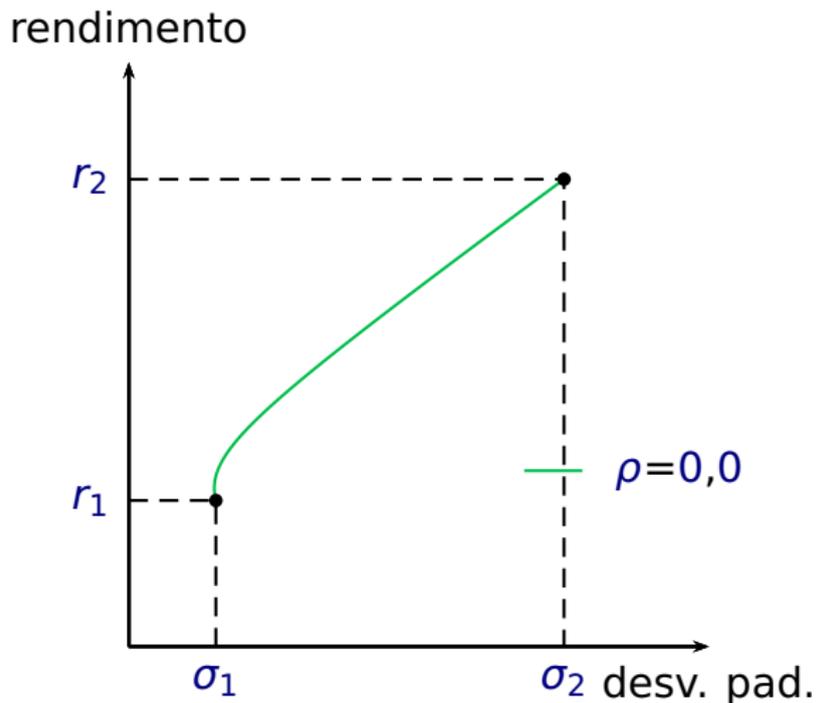
# Diversificação: representação gráfica



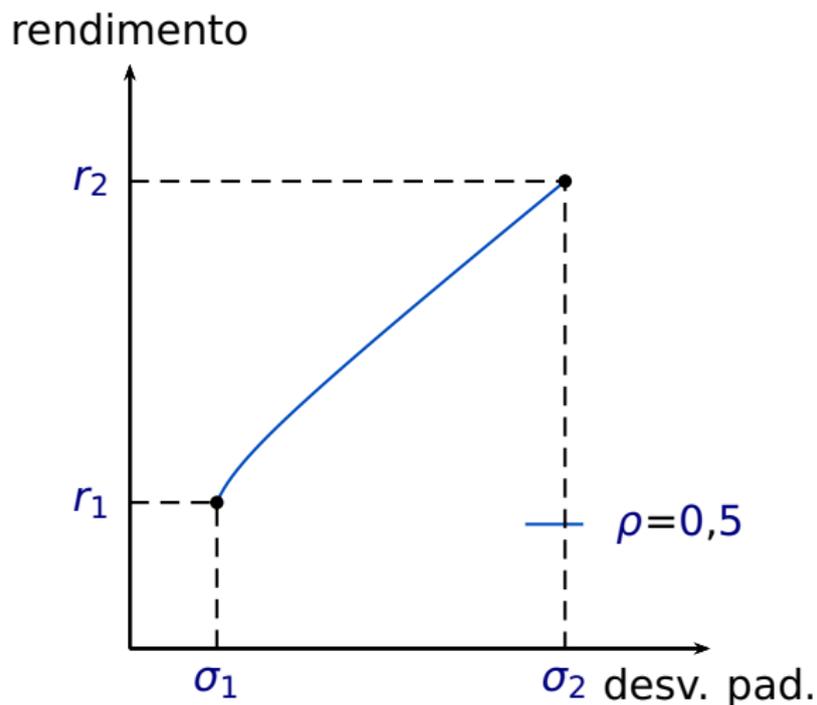
# Diversificação: representação gráfica



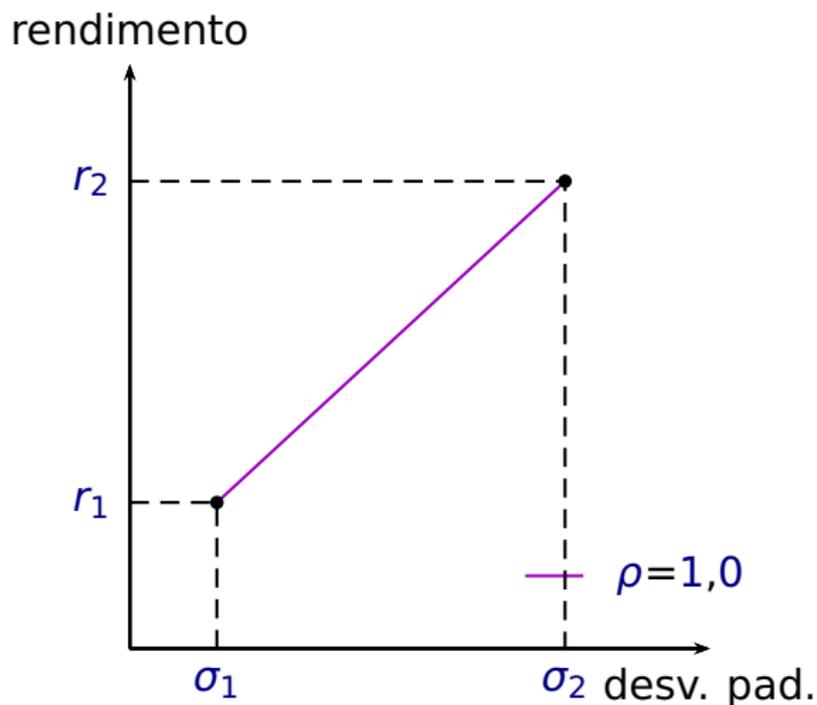
# Diversificação: representação gráfica



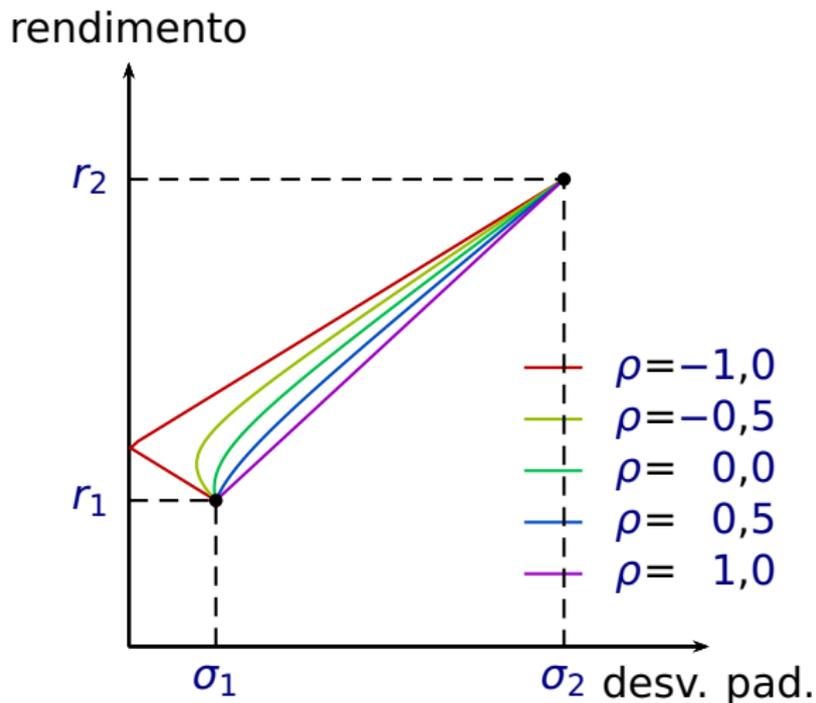
# Diversificação: representação gráfica



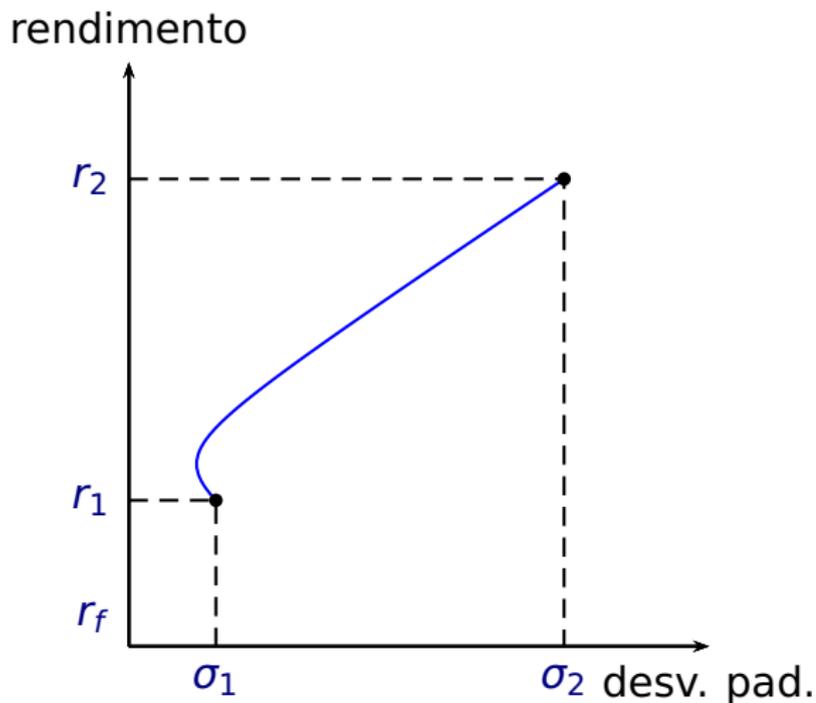
# Diversificação: representação gráfica



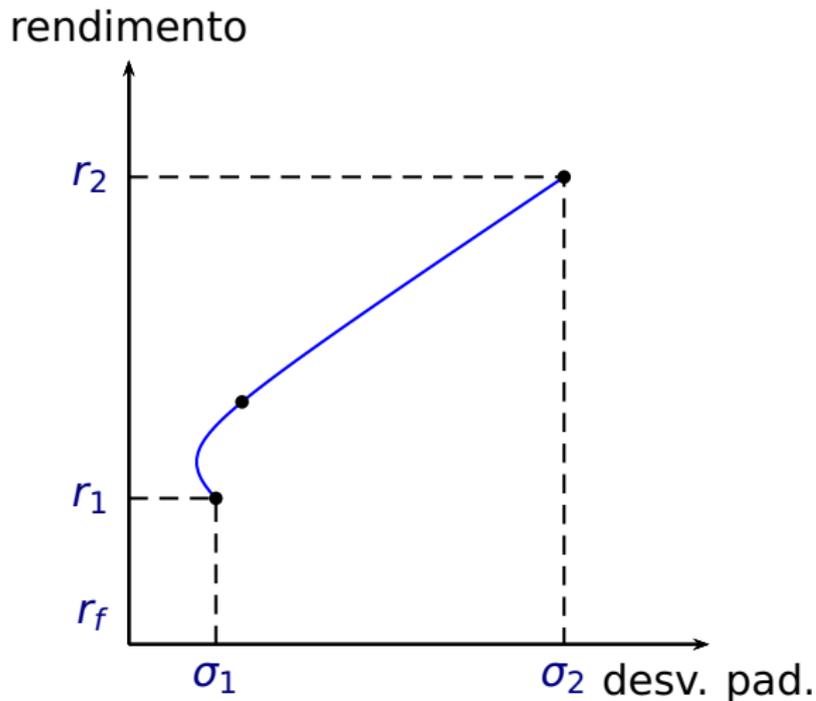
# Diversificação: representação gráfica



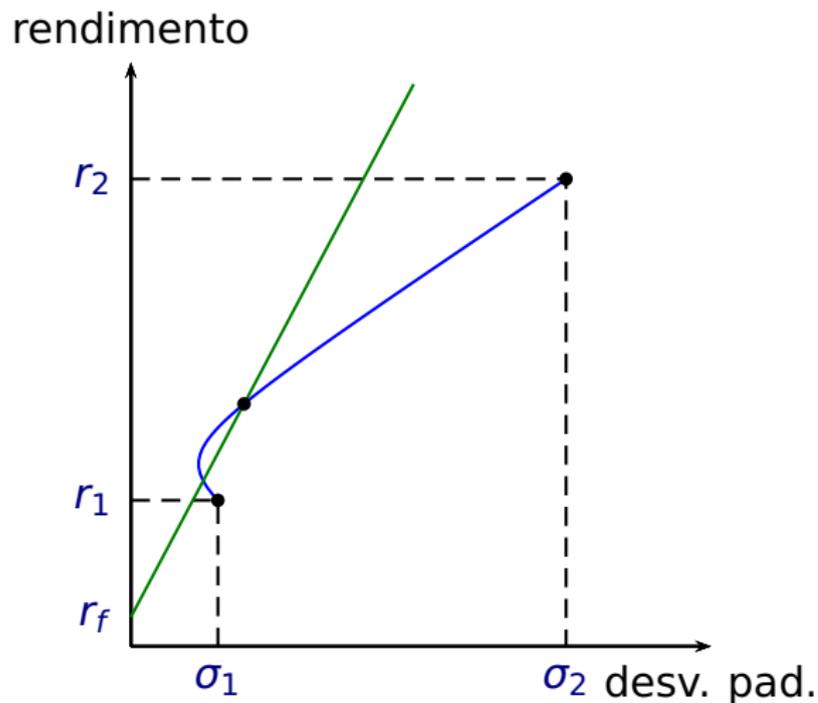
# Melhor combinação de dois ativos com risco



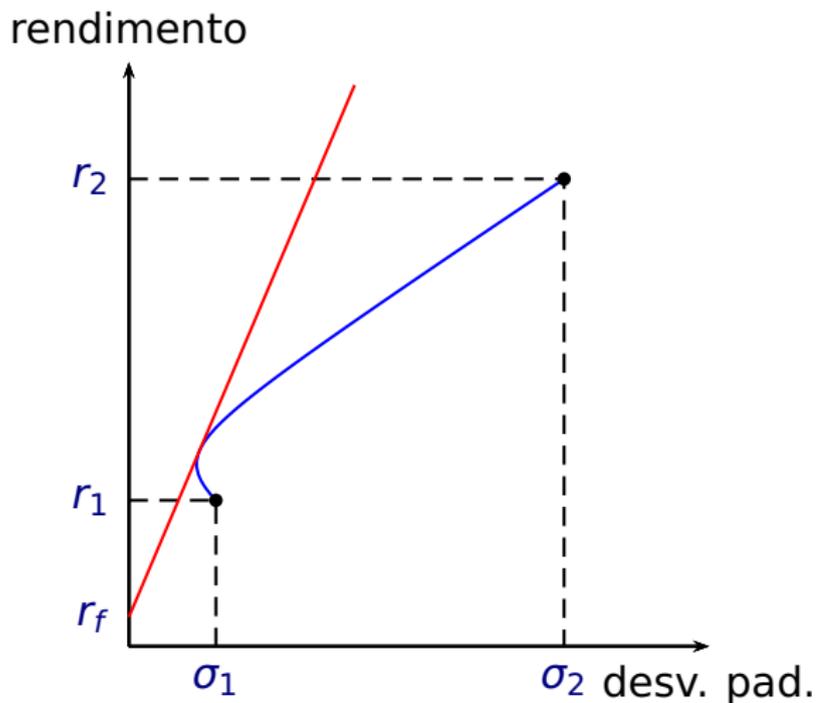
# Melhor combinação de dois ativos com risco



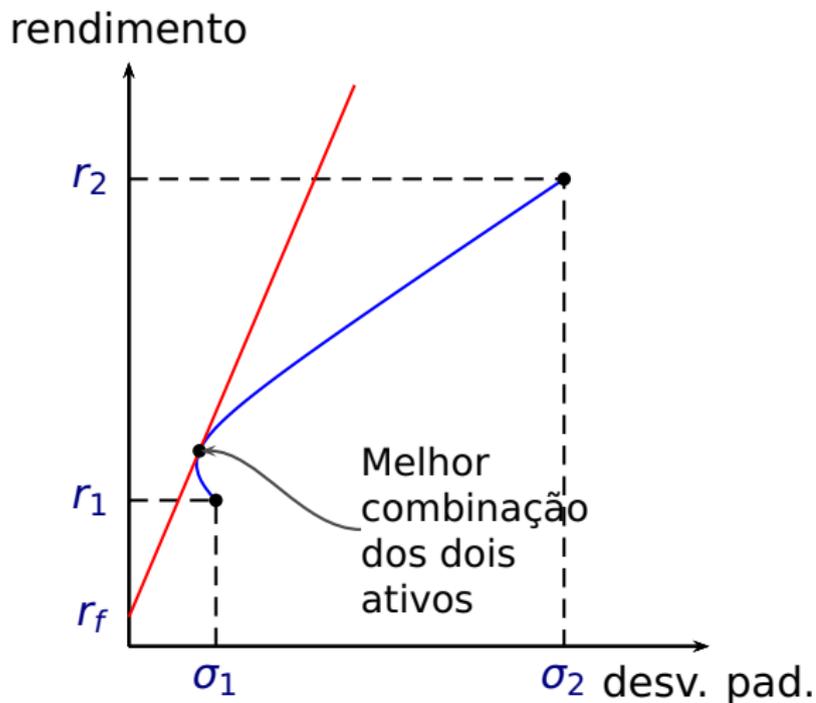
# Melhor combinação de dois ativos com risco



# Melhor combinação de dois ativos com risco



# Melhor combinação de dois ativos com risco



# A fronteira eficiente

## Definição

A **fronteira eficiente** ou **conjunto eficiente de Markowitz** é o conjunto de todos os portfólios de ativos com risco que oferecem a maior rentabilidade possível dado o seu risco.

# A fronteira eficiente

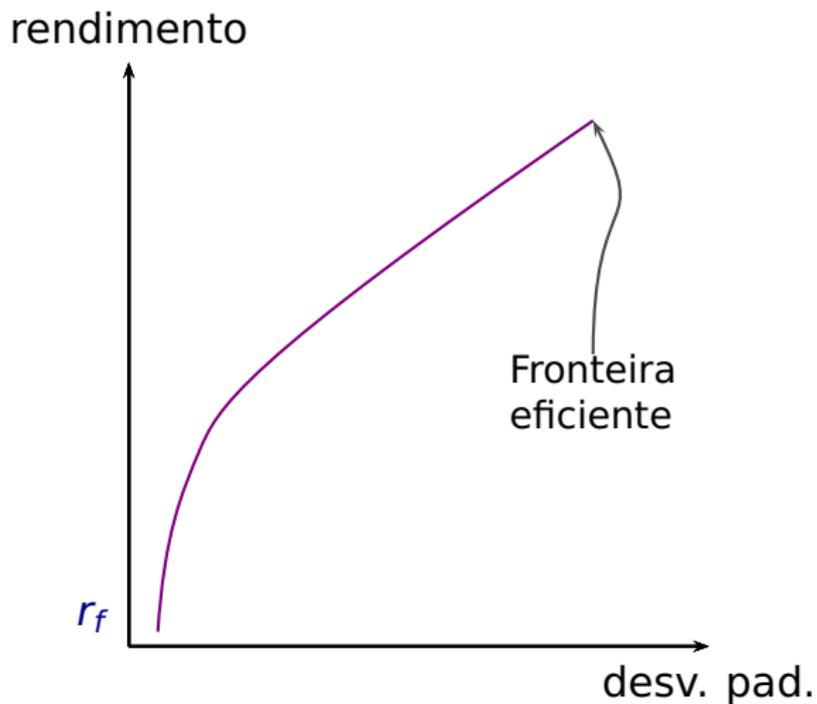
## Definição

A **fronteira eficiente** ou **conjunto eficiente de Markowitz** é o conjunto de todos os portfólios de ativos com risco que oferecem a maior rentabilidade possível dado o seu risco.

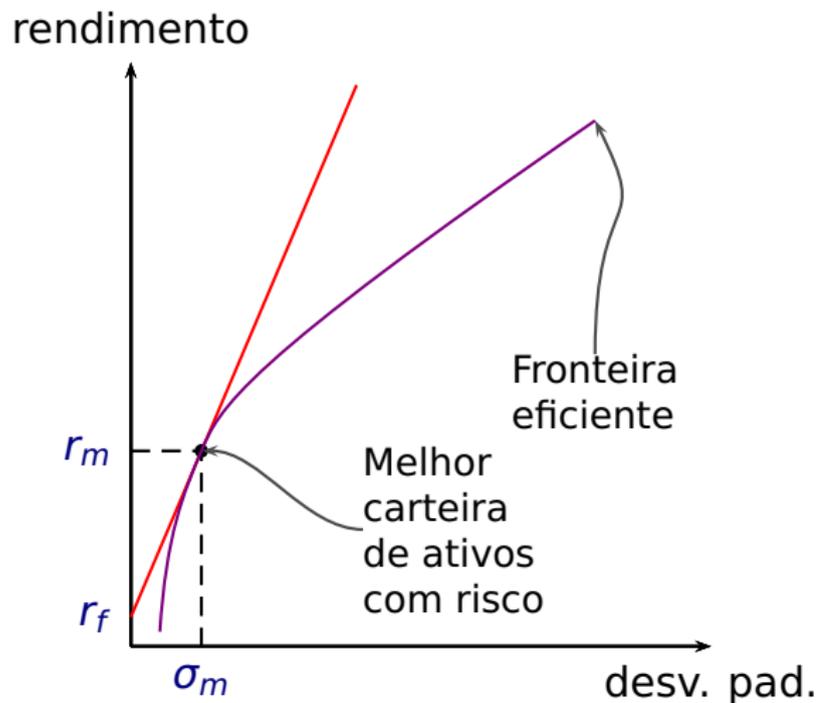
## Propriedade importante

Devido ao fato de que o risco é reduzido quando dois ativos são combinados, a fronteira eficiente deve formar concavidade à direita.

# A melhor combinação de ativos



# A melhor combinação de ativos



# Relação entre melhor carteira de ativos com risco e um ativo específico

Considerando um ativo  $i$  com rentabilidade esperada  $r_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ , é possível mostrar que sua participação no portfólio ótimo de ativos de risco é tal que:

$$r_i = r_f + \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_m^2} (r_m - r_f)$$

# Relação entre melhor carteira de ativos com risco e um ativo específico

Considerando um ativo  $i$  com rentabilidade esperada  $r_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ , é possível mostrar que sua participação no portfólio ótimo de ativos de risco é tal que:

$$r_i = r_f + \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_m^2}(r_m - r_f)$$

Convencionando  $\beta = \frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_m^2}$ , ficamos com

$$r_i = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

# Modelo CAPM

## Hipóteses

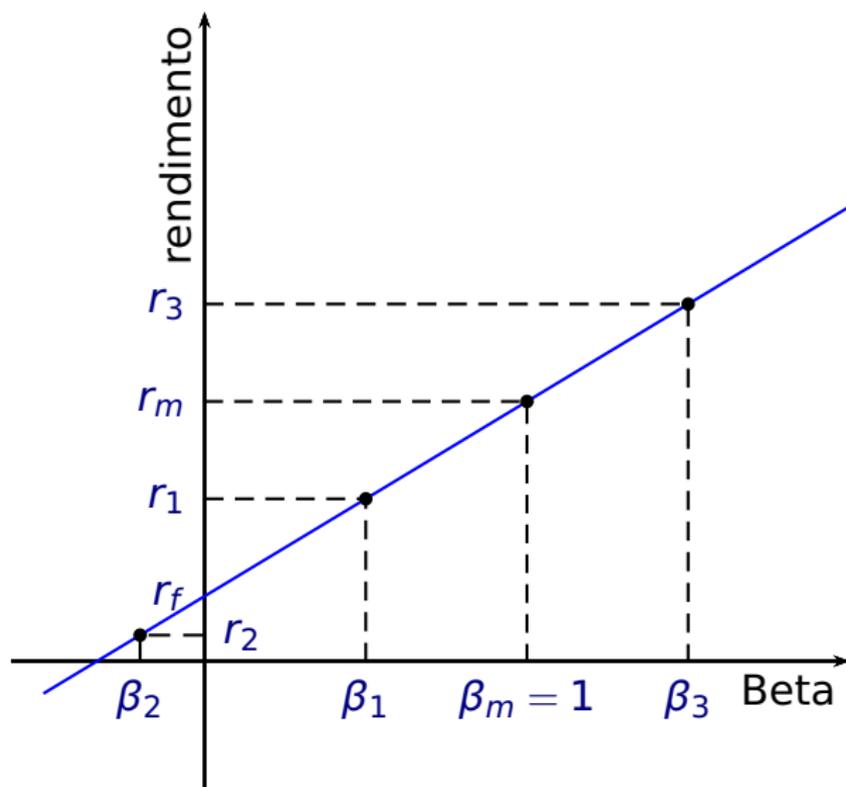
- Mercados perfeitamente competitivos.
- Informação comum.
- Investidores aversos a risco.
- Iguais espectativos quanto à rentabilidade e o risco de todos os ativos.
- É possível tomar emprestado e emprestar à taxa de juros  $r_f$ .

# Modelo CAPM

## Principal conclusão

É condição de equilíbrio que, para todos os investidores, o portfólio ótimo dos ativos com risco seja o portfólio de mercado, ou seja cada ativo deve participar do portfólio ótimo na mesma proporção que ele participa do mercado.

# Modelo CAPM – a linha de mercado



# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 0 Suponha a seguinte função utilidade que representa as preferências dos indivíduos sobre loterias monetárias:  $U(W) = a + bW + cW^{\frac{1}{2}}$ , em que  $W$  é o nível de riqueza do indivíduo, e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza  $W$ .

# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 0 Suponha a seguinte função utilidade que representa as preferências dos indivíduos sobre loterias monetárias:  $U(W) = a + bW + cW^{\frac{1}{2}}$ , em que  $W$  é o nível de riqueza do indivíduo, e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza  $W$ .

F

## Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 2) Suponha um modelo de escolha sob incerteza no qual existem dois estados da natureza com probabilidade  $p$  e  $1 - p$  de ocorrerem e mercados completos de ativos. Especificamente, suponha que existam dois ativos contingentes do tipo  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Nesse caso, a razão dos preços relativos é exatamente igual à razão das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza.

## Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 2) Suponha um modelo de escolha sob incerteza no qual existem dois estados da natureza com probabilidade  $p$  e  $1 - p$  de ocorrerem e mercados completos de ativos. Especificamente, suponha que existam dois ativos contingentes do tipo  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Nesse caso, a razão dos preços relativos é exatamente igual à razão das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza.

## Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total.

## Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V

# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
- 4 A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente.

# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
- 4 A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente. F

## Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
- 4 A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente. F
- 5 O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo, maior é o equivalente de certeza.

# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
- 4 A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente. F
- 5 O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo, maior é o equivalente de certeza. F

# Questão 5 ANPEC 2012

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo

- 3 Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, invicídus avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total. V
- 4 A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente. F
- 5 O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo, maior é o equivalente de certeza. F

# Questão 5 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo:

- Seja  $u(W) = -e^{-\beta W}$  uma utilidade von Neumann-Morgenstern, em que  $\beta > 0$  é uma constante e  $W$  é a riqueza. Então  $\beta$  denota a medida de aversão relativa ao risco;

# Questão 5 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo:

- 0 Seja  $u(W) = -e^{-\beta W}$  uma utilidade von Neumann-Morgenstern, em que  $\beta > 0$  é uma constante e  $W$  é a riqueza. Então  $\beta$  denota a medida de aversão relativa ao risco;

F

# Questão 5 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo:

- 0 Seja  $u(W) = -e^{-\beta W}$  uma utilidade von Neumann-Morgenstern, em que  $\beta > 0$  é uma constante e  $W$  é a riqueza. Então  $\beta$  denota a medida de aversão relativa ao risco; F
- 1 Suponha que uma carteira de ativos arriscados possui retorno esperado  $r^e = 21\%$  e variância  $\sigma^2 = 0,09$ . O ativo sem risco oferece um retorno  $r^f = 3\%$ . Então, de acordo com o modelo média-variância, o preço do risco da carteira é  $p = 2$  ;

# Questão 5 ANPEC 2010

Avalie as afirmações abaixo:

- 0) Seja  $u(W) = -e^{-\beta W}$  uma utilidade von Neumann-Morgenstern, em que  $\beta > 0$  é uma constante e  $W$  é a riqueza. Então  $\beta$  denota a medida de aversão relativa ao risco; F
- 1) Suponha que uma carteira de ativos arriscados possui retorno esperado  $r^e = 21\%$  e variância  $\sigma^2 = 0,09$ . O ativo sem risco oferece um retorno  $r^f = 3\%$ . Então, de acordo com o modelo média-variância, o preço do risco da carteira é  $p = 2$ ; F

## Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 2 Suponha que o retorno de mercado é  $r_m = 12\%$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 8\%$ . A variância da carteira eficiente é  $\sigma_e^2 = 0,01$  e a covariância entre o retorno de um ativo  $A$  e a carteira eficiente é  $\sigma_{A,e} = 0,5$ . De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo  $A$  é \$64 (unidades monetárias), então o preço do ativo  $A$  é \$50;

## Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 2 Suponha que o retorno de mercado é  $r_m = 12\%$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 8\%$ . A variância da carteira eficiente é  $\sigma_e^2 = 0,01$  e a covariância entre o retorno de um ativo  $A$  e a carteira eficiente é  $\sigma_{A,e} = 0,5$ . De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo  $A$  é \$64 (unidades monetárias), então o preço do ativo  $A$  é \$50;

F

## Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 2 Suponha que o retorno de mercado é  $r_m = 12\%$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 8\%$ . A variância da carteira eficiente é  $\sigma_e^2 = 0,01$  e a covariância entre o retorno de um ativo  $A$  e a carteira eficiente é  $\sigma_{A,e} = 0,5$ . De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo  $A$  é \$64 (unidades monetárias), então o preço do ativo  $A$  é \$50; F
- 3 De acordo com o modelo média-variância, se a taxa marginal de substituição ( $TMS$ ) entre retorno esperado da carteira e seu desvio-padrão é  $TMS = 0,3$ , se a variância do retorno da carteira é  $\sigma_m^2 = 0,04$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 12\%$ , então o retorno esperado da carteira é  $r_m = 18\%$ ;

# Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 2 Suponha que o retorno de mercado é  $r_m = 12\%$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 8\%$ . A variância da carteira eficiente é  $\sigma_e^2 = 0,01$  e a covariância entre o retorno de um ativo  $A$  e a carteira eficiente é  $\sigma_{A,e} = 0,5$ . De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo  $A$  é \$64 (unidades monetárias), então o preço do ativo  $A$  é \$50; F
- 3 De acordo com o modelo média-variância, se a taxa marginal de substituição ( $TMS$ ) entre retorno esperado da carteira e seu desvio-padrão é  $TMS = 0,3$ , se a variância do retorno da carteira é  $\sigma_m^2 = 0,04$  e a taxa de retorno do ativo sem risco é  $r_f = 12\%$ , então o retorno esperado da carteira é  $r_m = 18\%$ ; V

## Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 4 Um indivíduo possui utilidade von Neumann-Morgenstern  $u(x) = \sqrt{x}$  e possui riqueza  $W = \$100$ . Ele está sujeito a uma perda monetária aleatória  $X$ , com distribuição uniforme contínua no intervalo  $[0, 100]$ . Se ao indivíduo for oferecido, ao preço de  $G = \$55$ , um seguro total contra essa perda aleatória, então ele comprará o seguro.

# Questão 5 ANPEC 2010 (continuação)

Avalie as afirmações abaixo:

- 4 Um indivíduo possui utilidade von Neumann-Morgenstern  $u(x) = \sqrt{x}$  e possui riqueza  $W = \$100$ . Ele está sujeito a uma perda monetária aleatória  $X$ , com distribuição uniforme contínua no intervalo  $[0, 100]$ . Se ao indivíduo for oferecido, ao preço de  $G = \$55$ , um seguro total contra essa perda aleatória, então ele comprará o seguro. V

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ .

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as m afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ .

F

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ .
- 1 De acordo com o modelo média-variância, a taxa marginal de substituição entre risco e retorno é  $0,03$ .

F

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ . F
- 1 De acordo com o modelo média-variância, a taxa marginal de substituição entre risco e retorno é  $0,03$ . V

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ . F
- 1 De acordo com o modelo média-variância, a taxa marginal de substituição entre risco e retorno é 0,03. V
- 2 De acordo com o modelo de determinação de preços de ativos de capital (CAPM), se o beta de um ativo arriscado é 3, o retorno esperado desse ativo será 28%.

## Questão 4 ANPEC 2008

Considere um ativo sem risco, com retorno  $r_f = 10\%$ , e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado  $r_m = 16\%$  e variância  $\sigma^2 = 4$ . Julgue as afirmações:

- 0 De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é  $p = 0,06$ . F
- 1 De acordo com o modelo média-variância, a taxa marginal de substituição entre risco e retorno é  $0,03$ . V
- 2 De acordo com o modelo de determinação de preços de ativos de capital (CAPM), se o beta de um ativo arriscado é  $3$ , o retorno esperado desse ativo será  $28\%$ . V