A

Ferramentas Matemáticas Básicas

Este apêndice trata de alguns aspectos matemáticos básicos que são usados na análise econométrica. Sintetizamos várias propriedades do operador somatório, estudamos as propriedades das equações lineares e algumas não-lineares, e examinamos proporções e percentagens. Também apresentamos algumas funções especiais que freqüentemente surgem na econometria aplicada, inclusive funções quadráticas e o logaritmo natural. As primeiras quatro seções exigem somente conhecimento de álgebra básica. A Seção A.5 contém uma breve revisão de cálculo diferencial; embora não seja necessário o conhecimento de cálculo diferencial para entender a maior parte do texto, ele é usado em alguns apêndices de final de capítulo e em vários dos capítulos mais avançados da Parte III.

A.1 O OPERADOR SOMATÓRIO E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

O **operador somatório** é uma forma abreviada bastante útil para manipular expressões que envolvam as somas de muitos números, e tem um papel-chave em estatística e na análise econométrica. Se $\{x_i: i = 1, ..., n\}$ representa uma seqüência de n números, então, escrevemos a soma desses números como

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1 + x_2 + ... + x_n. \quad \textbf{(A.1)}$$

Com essa definição, fica claramente demonstrado que o operador somatório tem as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE SOMA. 1: Para qualquer constante c,

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc. \quad \textbf{(A.2)}$$

PROPRIEDADE SOMA. 2: Para qualquer constante c,

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i. \quad \textbf{(A.3)}$$

PROPRIEDADE SOMA. 3: Se $\{(x_i, y_i): i = 1, 2, ..., n\}$ for um conjunto de n pares de números, e a e b forem constantes, então,

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad \textbf{(A.4)}$$

Também é importante estar ciente de algumas coisas que não podem ser feitas com o operador somatório. Seja $\{(x_i, y_i): i = 1, 2, ..., n\}$ novamente um conjunto de n pares de números com $y_i \neq 0$ para cada i. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i/y_i) \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Em outras palavras, a soma das razões não é a razão das somas. No caso de $n = 2$, a aplicação da familiar álgebra elementar também revela essa falta de igualdade: $x_1/y_1 + x_2/y_2 \neq (x_1 + x_2)/(y_1 + y_2)$. De forma semelhante, a soma dos quadrados não é o quadrado das somas: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, exceto em casos especiais. É mais fácil verificar que essas duas grandezas geralmente não são iguais quando $n = 2$: $x_1^2 + x_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

Dados n números $\{x_i: i = 1, ..., n\}$, computamos suas **médias** somando os números e dividindo o resultado por n:

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad \textbf{(A.5)}$$

Quando os x_i são uma amostra de dados de uma variável particular (como anos de educação), muitas vezes chamamos essa média de *média amostral* para enfatizar que ela é computada a partir de um conjunto particular de dados. A média amostral é um exemplo de uma **estatística descritiva**; nesse caso, a estatística descreve a tendência central do conjunto de pontos x_i.

Há algumas propriedades básicas sobre as médias que devem ser compreendidas. Primeiro, suponha que tomemos cada observação de x, subtraindo da média: $d_i \equiv x_i - \bar{x}$ (o "d" aqui representa desvio em relação à média). Então, a soma desses desvios será sempre zero:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

Resumimos essa propriedade como

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0. \qquad \textbf{(A.6)}$$

Um exemplo numérico simples mostra como isso funciona. Suponha que $n = 5$ e $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 5$. Então, $\bar{x} = 2$, e a amostra dos desvios em relação à média é $\{4, -1, -4, -2, 3\}$. A soma desses números é zero, exatamente o que a equação (A.6) diz.

Em nossa abordagem da análise de regressão no Capítulo 2, necessitamos conhecer alguns fatos algébricos adicionais envolvendo desvios de médias amostrais. Um importante é que a soma dos desvios quadrados é a soma dos x_i quadrados menos n vezes o quadrado de $\bar{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2. \tag{A.7}$$

Isso pode ser mostrado utilizando propriedades básicas do operador somatório:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n(\bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n(\bar{x})^2 + n(\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2.\end{aligned}$$

Dado um conjunto de dados de duas variáveis, $\{(x_i, y_i): i = 1, 2, ..., n\}$, também é possível mostrar que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) \\ = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n(\bar{x} \cdot \bar{y});\end{aligned} \tag{A.8}$$

essa é uma generalização da equação (A.7). (Lá, $y_i = x_i$ para todos i).

A média é a medida da tendência central na qual nos concentraremos na maior parte deste texto. Porém, algumas vezes é informativo usar a **mediana** (ou *mediana amostral*) para descrever o valor central. Para obter a mediana dos n números $\{x_1, ..., x_n\}$, primeiro ordenamos os valores de x_i do menor para o maior. Então, se n for ímpar, a mediana amostral será o número do meio das observações ordenadas. Por exemplo, dados os números $\{-4,8,2,0,21,-10,18\}$, o valor da mediana será 2 (já que a seqüência ordenada é $\{-10,-4,0,2,8,18,21\}$). Se alterarmos o maior número dessa lista, 21, para o dobro do seu valor, 42, a mediana continuará sendo 2. Em contraposição, a média amostral aumentaria de 5 para 8, uma mudança considerável. De forma geral, a mediana é menos sensível do que a média a mudanças nos valores extremos (grandes ou pequenos) em uma lista de números. Essa é a razão pela qual "rendas medianas" ou "valores imobiliários medianos" são freqüentemente descritos, em vez das médias, quando resumimos os valores das rendas ou dos imóveis em uma cidade ou município.

Se n for par, não existe uma maneira única de definir a mediana, pois haverá dois números no centro. Habitualmente, a mediana é definida como sendo a média dos dois valores do meio (novamente, depois de ordenar os números do menor para o maior). Usando essa regra, a mediana do conjunto de números $\{4,12,2,6\}$ seria $(4 + 6)/2 = 5$.

A.2 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LINEARES

As funções lineares desempenham um papel importante em econometria, pois elas são simples de serem interpretadas e manipuladas. Se x e y forem duas variáveis relacionadas por

$$y = \beta_0 + \beta_1 x, \tag{A.9}$$

então, dizemos que y é uma **função linear** de x, e que β_0 e β_1 são dois parâmetros (números) descrevendo essa relação. O **intercepto** é β_0 e a **inclinação** é β_1.

A característica que define uma função linear é que a alteração em y é sempre β_1 vezes a alteração em x:

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x, \tag{A.10}$$

onde Δ significa "alteração". Em outras palavras, o **efeito marginal** de x sobre y é constante e igual a β_1.

EXEMPLO A.1

(Função Linear de Despesas com Habitação)

Suponha que a relação entre despesas mensais com habitação e a renda mensal seja

$$habitação = 164 + 0{,}27\ renda \tag{A.11}$$

Então, para cada dólar adicional na renda, 27 centavos são gastos com habitação. Se a renda familiar aumentar em 200 dólares, então, os gastos com habitação aumentarão em (0,27)200 = 54 dólares. Essa função está traçada na Figura A.1.

De acordo com a equação (A.11), uma família sem renda gasta 164 dólares com habitação, o que, é claro, não pode ser literalmente verdadeiro. Para níveis baixos de renda, essa função linear não descreveria muito bem a relação entre habitação e renda, motivo pelo qual acabaremos tendo de usar outros tipos de funções para descrever tais relações.

Em (A.11), a propensão marginal a consumir (PMgC) habitação por causa da renda é 0,27. Isso é diferente da propensão média a consumir (PMC), que é

$$\frac{habitação}{renda} = 164/\text{renda} + 0{,}27.$$

A PMC não é constante, é sempre maior que a PMgC e se aproxima da PMgC conforme a renda aumenta.

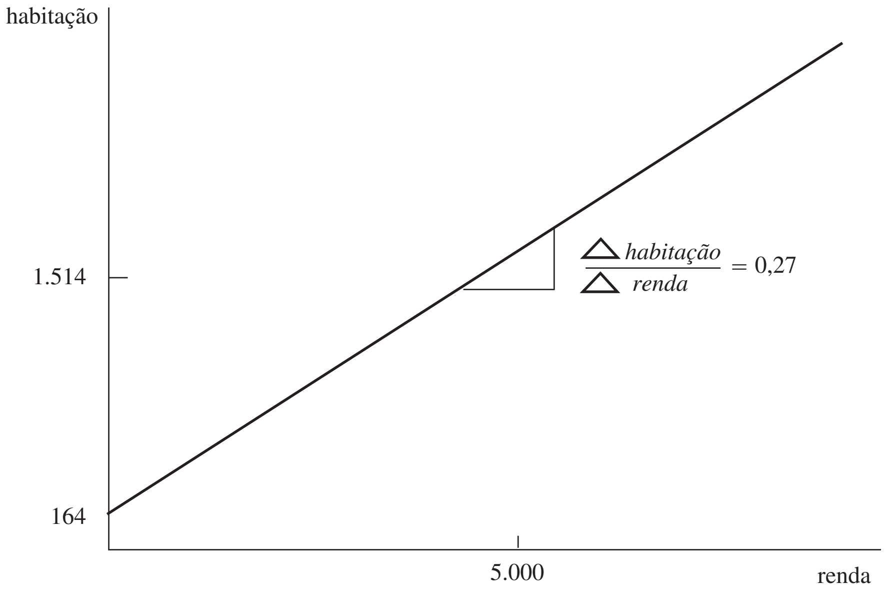
As funções lineares são facilmente definidas para mais de duas variáveis. Suponha que y seja relacionada a duas variáveis, x_1 e x_2, na forma geral

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \tag{A.12}$$

É bastante difícil visualizar essa função, pois seu gráfico é tridimensional. No entanto, β_0 ainda é o intercepto (o valor de y quando $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$), e β_1 e β_2 medem inclinações específicas. De (A.12), a mudança em y, face a alterações em x_1 e x_2, é

Figura A.1

Gráfico de *habitação* = 164 + 0,27 *renda*.



$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_2. \tag{A.13}$$

Se x_2 não se alterar, isto é, $\Delta x_2 = 0$, então, teremos

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 \text{ se } \Delta x_2 = 0,$$

de forma que β_1 será a inclinação da relação na direção de x_1:

$$\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \text{ se } \Delta x_2 = 0.$$

Como ele indica como y se altera com x_1, mantendo x_2 fixo, β_1 freqüentemente é chamado de **efeito parcial** de x_1 sobre y. Como o efeito parcial envolve manter fixos outros fatores, ele está muito estreitamente ligado à noção de ***ceteris paribus***. O parâmetro β_2 tem uma interpretação semelhante: $\beta_2 = \Delta y/\Delta x_2$ se $\Delta x_1 = 0$, de forma que β_2 é o efeito parcial de x_2 sobre y.

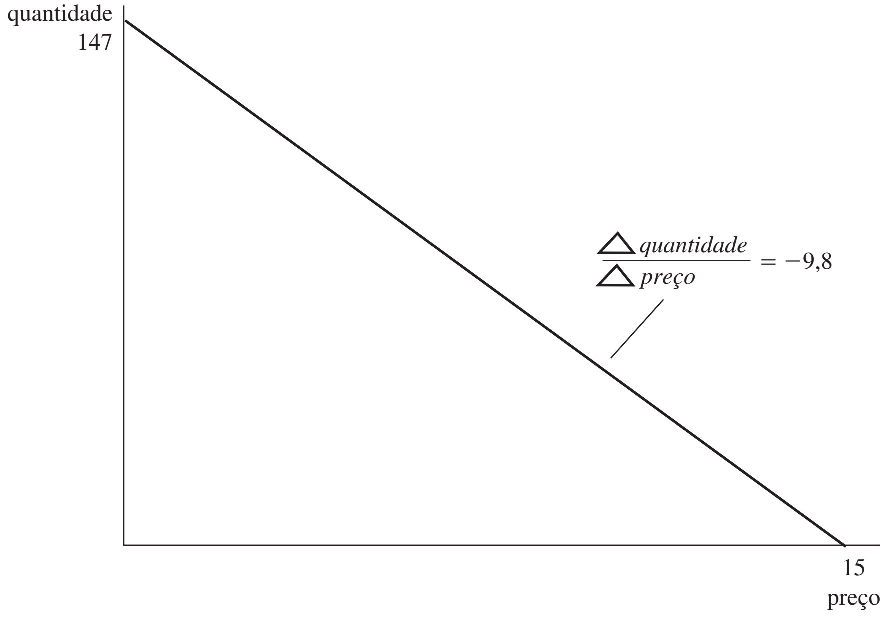
EXEMPLO A.2

(Demanda de CDs)

Para estudantes universitários, suponha que a quantidade mensal demandada de CDs seja relacionada com o preço dos CDs e com a renda disponível pela equação

Figura A.2

Gráfico de *quantidade* = 120 − 9,8 *preço* + 0,03 *renda,* com *renda* fixada em 900 dólares.



$$quantidade = 120 - 9{,}8\ preço + 0{,}03\ renda,$$

onde *preço* está em dólares por disco e *renda* é medida em dólares. A curva de demanda é a relação entre *quantidade* e *preço*, mantendo a *renda* fixa assim como outros fatores). Isso está traçado em duas dimensões na Figura A.2, a um nível de renda de 900 dólares. A inclinação da curva de demanda, 29,8, é o efeito parcial do preço sobre a quantidade: mantendo a renda fixa, se o preço dos CDs aumentar em um dólar, a quantidade demandada diminui 9,8. (Abstraímos o fato de que CDs somente podem ser comprados em unidades separadas.) Um aumento na renda simplesmente desloca a curva da demanda para cima (altera o intercepto), mas a inclinação continua a mesma.

A.3 PROPORÇÕES E PERCENTAGENS

Proporções e percentagens têm um papel tão importante na economia aplicada que é necessário sentir-se bem à vontade ao trabalhar com elas. Muitas grandezas publicadas na imprensa escrita estão na forma de percentagens; por exemplo, taxas de juros, índices de desemprego e índices de formatura escolar.

Uma habilidade importante é ser capaz de converter proporções em percentagens, e vice-versa. Uma percentagem é facilmente obtida multiplicando-se a proporção por 100. Por exemplo, se a proporção de adultos em um município com diploma do ensino médio for 0,82, dizemos que 82% (82 por cento) dos adultos têm diploma do ensino médio. Outra maneira de pensar nas percentagens e proporções é a forma decimal de uma percentagem. Por exemplo, se a alíquota marginal do imposto de uma família com rendimentos de 30.000 dólares anuais for 28%, então, a proporção do próximo dólar de rendimento que será pago como imposto de renda será 0,28 (ou 28 centavos).

Quando usamos percentagens, com muita freqüência precisamos convertê-las para a forma decimal. Por exemplo, se o imposto sobre vendas de um estado for 6% e 200 dólares forem gastos em um item sujeito a esse imposto, então, o imposto sobre vendas que será pago será de 200(0,06) = 12 dólares. Se o retorno anual de um certificado de depósito (CD) for 7,6% e investirmos 3.000 dólares em tal CD no início do ano, então, nossa renda de juros será 3.000(0,076) = 228 dólares. Por mais que gostássemos, a renda de juros não é obtida multiplicando 3.000 por 7,6.

Devemos ser cautelosos com proporções que algumas vezes são publicadas incorretamente como percentagens na imprensa escrita. Se lermos, "a percentagem de alunos do ensino médio que tomam bebidas alcoólicas é de 0,57", sabemos que isso realmente significa 57% (e não pouco mais da metade de um por cento, como o artigo literalmente sugere). Os torcedores de equipes de voleibol universitário provavelmente estão familiarizados com recortes de jornais que dizem "Sua percentagem de aproveitamento foi de 0,372". Eles, na realidade, querem dizer que a percentagem de aproveitamento foi de 37,2%.

Em econometria, geralmente estamos interessados em medir as mudanças em várias grandezas. Seja x alguma variável, como, por exemplo, a renda de um indivíduo, o número de crimes cometidos em uma comunidade, ou os lucros de uma empresa. Façamos x_0 e x_1 representarem dois valores de x: x_0 é o valor inicial, e x_1 é o valor subseqüente. Por exemplo, x_0 poderia ser a renda anual de um indivíduo em 1994 e x_1 a renda do mesmo indivíduo em 1995. A **mudança proporcional** em x, movendo-se de x_0 para x_1 algumas vezes chamada de **mudança relativa**, será simplesmente

$$(x_1 - x_0)/x_0 = \Delta x/x_0, \tag{A.14}$$

assumindo, naturalmente, que $x_0 \neq 0$. Em outras palavras, para obter a mudança proporcional, simplesmente dividimos a alteração em x pelo seu valor inicial. Essa é uma maneira de padronizar a alteração de forma a ela ser livre de unidades. Por exemplo, se a renda de um indivíduo for de 30.000 para 36.000 dólares por ano, a alteração proporcional será 6.000/30.000 = 0,20.

É mais comum descrever alterações em termos de percentagens. A **mudança percentual** em x ao ir de x_0 para x_1 será simplesmente 100 vezes a mudança proporcional:

$$\%\Delta x = 100(\Delta x/x_0); \tag{A.15}$$

a notação "$\%\Delta x$" é lida como "mudança percentual em x". Por exemplo, quando a renda vai de 30.000 para 33.750 dólares, a renda aumentou 12,5%; para obter esse resultado, simplesmente multiplicamos a alteração proporcional, 0,125, por 100.

Novamente, devemos estar prevenidos quanto a mudanças proporcionais que são publicadas como mudanças percentuais. A título de ilustração, no exemplo anterior, descrever a mudança percentual na renda como 0,125 é incorreto e pode induzir a confusões.

Quando examinamos alterações em coisas como montantes em dólares ou população, não haverá ambigüidade sobre o que significa uma alteração percentual. Em contrapartida, a interpretação de cálculos de mudanças percentuais pode ser complicada quando a variável de interesse for, ela mesma, uma percentagem, o que acontece com freqüência em economia e em outras ciências sociais. Para ilustrar, seja x a percentagem de adultos com educação superior em uma cidade qualquer. Suponha que o valor inicial seja $x_0 = 24$ (24% têm educação superior), e que o novo valor seja $x_1 = 30$. Podemos computar as duas grandezas para descrever como mudou a percentagem das pessoas com educação superior. A primeira é a alteração em x, Δx. Nesse caso, $\Delta x = x_1 - x_0 = 6$: a percentagem de pessoas com educação superior teria aumentado em seis pontos percentuais. Por outro lado, podemos calcular a alteração percentual em x usando a equação (A.15): $\%\Delta x = 100[(30 - 24)/24] = 25$.

Nesse exemplo, a mudança em pontos percentuais e a mudança percentual são bastante diferentes. A **mudança em pontos percentuais** é simplesmente a mudança nas percentagens. A mudança percentual é a mudança relativa ao valor inicial. De forma geral, devemos prestar muita atenção no número que está sendo calculado. O pesquisador cuidadoso torna essa distinção perfeitamente clara; infelizmente, na imprensa escrita como também em pesquisas acadêmicas, o tipo de alteração descrito freqüentemente não é claro.

EXEMPLO A.3

(O Aumento do Imposto sobre Vendas em Michigan)

Em março de 1994, os eleitores do estado norte-americano de Michigan aprovaram um aumento no imposto sobre vendas de 4% para 6%. Na propaganda política, os defensores da medida referiam-se a esse aumento como sendo de dois pontos percentuais, ou um aumento de dois centavos por dólar. Os opositores ao aumento do imposto diziam tratar-se de um aumento de 50% na taxa do imposto. Ambas as afirmações estão corretas; elas são apenas maneiras diferentes de medir o aumento no imposto sobre vendas. Naturalmente, cada grupo referiu-se à medida na forma mais favorável às suas posições.

Para uma variável tal como o salário, não faz sentido falar de "uma mudança em pontos percentuais do salário", pois salário não é medido como uma percentagem. Podemos descrever uma alteração salarial ou em dinheiro ou em termos percentuais.

A.4 ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS E SUAS PROPRIEDADES

Na Seção A.2, revimos as propriedades básicas das funções lineares. Já indicamos uma característica importante das funções como $y = \beta_0 + \beta_1 x$: uma alteração de uma unidade em x resulta em mesma alteração em y, independente do valor inicial de x. Como vimos anteriormente, isso é o mesmo que dizer que o efeito marginal de x sobre y é constante, algo que não é prático para muitas relações econômicas. Por exemplo, a importante noção econômica dos rendimentos marginais decrescentes não é consistente com uma relação linear.

Para modelar uma diversidade de fenômenos econômicos, precisamos estudar várias funções não-lineares. Uma **função não-linear** é caracterizada pelo fato de que a mudança em y em decorrência de uma alteração em x depende do valor inicial de x. Certas funções não-lineares aparecem com freqüência na economia empírica, de modo que é importante saber como interpretá-las. Uma compreensão completa das funções não-lineares nos leva para o âmbito do cálculo diferencial. Aqui, simplesmente resumimos os aspectos mais significantes das funções, deixando para a Seção A.5 os detalhes de algumas derivações.

Funções Quadráticas

Uma maneira simples de capturar rendimentos decrescentes é adicionarmos um termo quadrático a uma relação linear. Considere a equação

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \tag{A.16}$$

onde β_0, β_1 e β_2 são parâmetros. Quando $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 < 0$, a relação entre y e x tem a forma parabólica mostrada na Figura A.3, onde $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = 8$ e $\beta_2 = -2$.

Quando $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 < 0$, é possível mostrar (usando cálculo diferencial na próxima seção) que o valor máximo da função ocorre no ponto

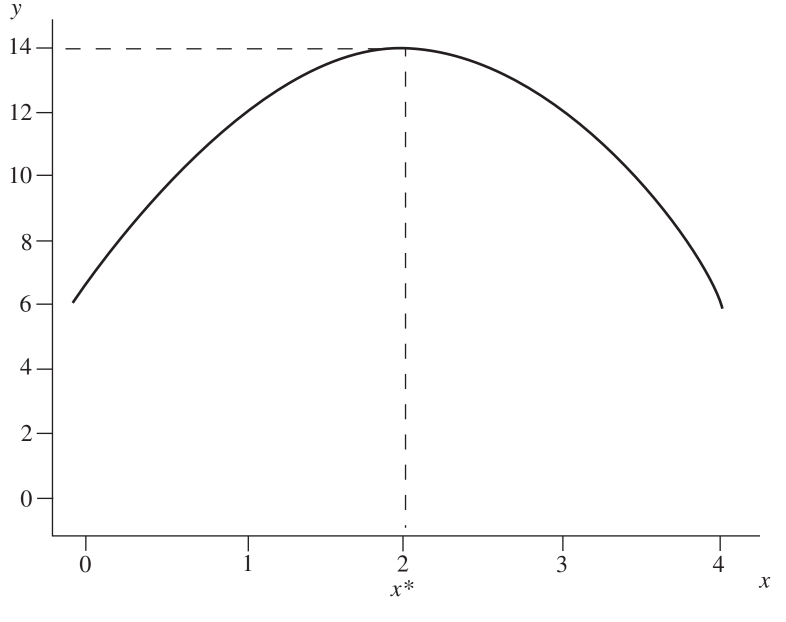
$$x^* = \beta_1/(-2\beta_2). \tag{A.17}$$

Por exemplo, se $y = 6 + 8x - 2x^2$ (de modo que $\beta_1 = 8$ e $\beta_2 = -2$), então, o maior valor de y ocorrerá em $x^* = 8/4 = 2$, e esse valor será $6 + 8(2) - 2(2)^2 = 14$ (veja a Figura A.3).

O fato de a equação (A.16) implicar um **efeito marginal decrescente** de x sobre y é claramente visualizado a partir de seu gráfico. Suponha que iniciemos com um valor baixo de x e aumentemos x pela mesma quantidade c. Isso terá um efeito maior sobre y do que se iniciarmos com um valor maior de x e aumentarmos x pela mesma quantidade c. De fato, dado que $x > x^*$, um aumento em x na realidade diminui y.

Figura A.3

Gráfico de $y = 6 + 8x - 2x^2$.



A afirmação de que x tem um efeito marginal decrescente sobre y é o mesmo que dizer que a inclinação da função na Figura A.3 diminui conforme x aumenta. Embora isso fique claro quando se olha o gráfico, normalmente queremos quantificar com que rapidez a inclinação está sendo alterada. Uma aplicação de cálculo diferencial fornece a inclinação aproximada da função quadrática como

$$\text{inclinação} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \beta_1 + 2\beta_2 x, \quad \textbf{(A.18)}$$

para "pequenas" alterações em x. [O lado direito da equação (A.18) é a **derivada** da função na equação (A.16) em relação a x]. Outra maneira de escrevermos isso é

$$\Delta y \approx (\beta_1 + 2\beta_2 x)\Delta x \text{ para } \Delta x \text{ "pequeno".} \quad \textbf{(A.19)}$$

Para verificar o quanto essa aproximação funciona, considere novamente a função $y = 6 + 8x - 2x^2$. Em seguida, de acordo com a equação (A.19), $\Delta y \approx (8 - 4x)\Delta\, x$. Agora, suponha que iniciemos com $x = 1$ e alteremos x por $\Delta x = 0{,}1$. Usando (A.19), $\Delta y \approx (8 - 4x)(0{,}1) = 0{,}4$. Naturalmente, podemos calcular a alteração exata encontrando os valores de y quando $x = 1$ e $x = 1{,}1$: $y_0 = 6 + 8(1) - 2(1)^2 = 12$ e $y_1 = 6 + 8(1{,}1) - 2(1{,}1)^2 = 12{,}38$, e, portanto, a alteração exata em y é 0,38. A aproximação está bastante próxima nesse caso.

Agora, suponha que iniciemos com $x = 1$, mas alteremos x por uma grandeza maior: $\Delta x = 0{,}5$. Então, a aproximação produz $\Delta y \approx 4(0{,}5) = 2$. A alteração exata é determinada encontrando-se a diferença em y quando $x = 1$ e $x = 1{,}5$. O valor anterior de y era 12, e o último valor será $6 + 8(1{,}5) - 2(1{,}5)^2 = 13{,}5$, portanto, a alteração efetiva será 1,5 (e não 2). A aproximação é pior nesse caso porque a alteração em x é maior.

Para muitas aplicações, a equação (A.19) poderá ser usada para calcular o efeito marginal aproximado de x sobre y para qualquer valor inicial da x e alterações pequenas. Além disso, sempre poderemos calcular a alteração exata se necessário.

EXEMPLO A.4

(Uma Função Quadrática dos Salários)

Suponha que a relação entre salários por hora e número de anos na força de trabalho (*exper*) seja dada por

$$salário = 5{,}25 + 0{,}48\ exper - 0{,}008\ exper^2. \quad \textbf{(A.20)}$$

Essa função tem a mesma forma geral que aquela da Figura A.3. Usando a equação (A.17), *exper* terá um efeito positivo sobre salário até o ponto crítico, $exper^* = 0{,}48/[2(0{,}008)] = 30$. O primeiro ano de experiência vale aproximadamente 0,48, ou 48 centavos [veja (A.19) com $x = 0$, $\Delta x = 1$]. Cada ano adicional de experiência, aumenta o salário em menos que no ano anterior, refletindo um rendimento marginal decrescente da experiência. Após 30 anos, um ano adicional de experiência, na verdade, reduziria o salário. Isso não é muito realista, mas é uma das conseqüências de usar uma função quadrática para capturar o efeito marginal decrescente: em algum ponto, a função deverá atingir um valor máximo, e a curva começará a decrescer. Na prática, o ponto no qual isso acontece geralmente é suficientemente grande para não ter conseqüências, mas nem sempre isso ocorre.

O gráfico da função quadrática em (A.16) terá uma forma de U se $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 > 0$, caso em que haverá um retorno marginal crescente. O valor mínimo da função estará no ponto $-\beta_1/(2\beta_2)$.

O Logaritmo Natural

A função não-linear que tem o papel mais importante na análise econométrica é o **logaritmo natural**. Neste texto, representamos o logaritmo natural, sobre o qual freqüentemente nos referimos como a **função log**, como

$$y = \log(x). \tag{A.21}$$

Você deve se lembrar de ter estudado diferentes símbolos do log natural; $\ln(x)$ ou $\log_e(x)$ são os mais comuns. Essas notações diferentes são úteis quando são usados logaritmos com várias e diferentes bases. Para nosso propósito, somente o logaritmo natural é importante, e assim $\log(x)$ simboliza o logaritmo natural em todo este livro. Essa notação corresponde à notação utilizada em muitos programas estatísticos, embora alguns usem $\ln(x)$ [e a maioria das calculadoras usa $\ln(x)$]. Os economistas usam tanto $\log(x)$ como $\ln(x)$, e é bom saber disso ao ler trabalhos de economia aplicada.

A função $y = \log(x)$ é definida somente para $x > 0$, e está traçada na Figura A.4. Não é muito importante saber como os valores de $\log(x)$ são obtidos. Para nossos propósitos, podemos pensar na função como uma caixa preta: podemos inserir qualquer $x > 0$ e obter $\log(x)$ em uma calculadora ou em um computador.

Várias coisas ficam aparentes da Figura A.4. Primeiro, quando $y = \log(x)$, a relação entre y e x exibe rendimentos marginais decrescentes. Uma importante diferença entre as funções log e quadrática na Figura A.3 é que, quando $y = \log(x)$, o efeito de x sobre y nunca se torna negativo: a inclinação da função vai chegando cada vez mais perto de zero conforme x vai ficando maior, mas a inclinação nunca chega a zero e certamente nunca se torna negativa.

O seguinte também fica aparente da Figura A.4:

$$\log(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 1$$
$$\log(1) = 0$$
$$\log(x) > 0 \text{ para } x > 1.$$

Em particular, $\log(x)$ pode ser positivo ou negativo. Alguns fatos algébricos úteis sobre a função log são:

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2),\ x_1, x_2 > 0$$
$$\log(x_1/x_2) = \log(x_1) - \log(x_2),\ x_1, x_2 > 0$$
$$\log(x^c) = c\log(x),\ x > 0, \text{ qualquer número c.}$$

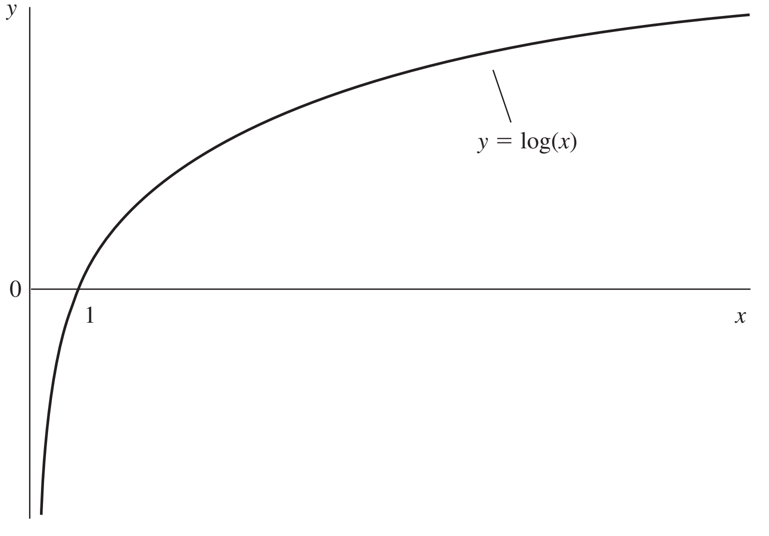
De vez em quando, precisaremos nos apoiar nessas propriedades.

O logaritmo pode ser usado para várias aproximações que surgem em aplicações econométricas. Primeiro, $\log(1 + x) \approx x$ para $x \approx 0$. Você pode testar isso com $x = 0{,}02$, $0{,}1$, e $0{,}5$ para ver como a qualidade da aproximação se deteriora conforme x vai ficando maior. Ainda mais útil é o fato que a diferença em logs pode ser usada para mudanças proporcionais aproximadas. Sejam x_0 e x_1 valores positivos. Então, é possível mostrar (usando cálculo diferencial) que

$$\log(x_1) - \log(x_0) \approx (x_1 - x_0)/x_0 = \Delta x/x_0 \tag{A.22}$$

Figura A.4

Gráfico de $y = \log(x)$.



para pequenas alterações em x. Se multiplicarmos a equação (A.22) por 100 e escrevermos $\Delta\log(x) = \log(x_1) - \log(x_0)$, então,

$$100 \cdot \Delta\log(x) \approx \%\Delta x \tag{A.23}$$

para pequenas alterações em x. O significado de pequenas depende do contexto, e encontraremos vários exemplos ao longo de todo este livro.

Por que devemos aproximar a mudança percentual usando (A.23) quando a mudança percentual exata é tão fácil de ser calculada? Logo veremos por que a aproximação em (A.23) é útil em econometria. Primeiramente, vejamos o quanto é boa a aproximação em dois exemplos.

Primeiro, suponha que $x_0 = 40$ e $x_1 = 41$. Então, a mudança percentual em x, indo de x_0 para x_1, será de 2,5%, usando $100(x_1 - x_0)/x_0$. Agora, $\log(41) - \log(40) = 0{,}0247$ com quatro casas decimais, que multiplicado por 100 estará muito próximo de 2,5. A aproximação funciona muito bem. Agora, considere uma alteração bem maior: $x_0 = 40$ e $x_1 = 60$. A mudança percentual exata será de 50%. Porém, $\log(60) - \log(40) \approx 0{,}4055$, de modo que a aproximação produz 40,55% que está muito mais longe da alteração exata.

Por que a aproximação em (A.23) é útil se ela só é satisfatória para mudanças pequenas? Para construir a resposta, primeiro definimos a **elasticidade** de y em relação a x como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x}. \quad \textbf{(A.24)}$$

Em outras palavras, a elasticidade de y em relação a x é a mudança percentual em y quando x aumenta em 1%. Essa noção deve ser familiar para quem já estudou economia introdutória.

Se y for uma função linear de x, $y = \beta_0 + \beta_1 x$, então, a elasticidade será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \beta_1 \cdot \frac{x}{y} = \beta_1 \cdot \frac{x}{\beta_0 + \beta_1 x}, \quad \textbf{(A.25)}$$

que claramente depende do valor de x. (Isso é uma generalização do resultado bem conhecido da teoria básica da demanda: a elasticidade não é constante ao longo de uma curva de demanda em linha reta.)

As elasticidades são de importância fundamental em muitas áreas de economia aplicada, não apenas na teoria da demanda. É conveniente em muitas situações ter modelos de elasticidade constante, e a função log nos possibilita especificar tais modelos. Se usarmos a aproximação em (A.23) tanto de x como de y, então, a elasticidade será aproximadamente igual a $\Delta\log(y)/\Delta \log(x)$. Portanto, um modelo de elasticidade constante é aproximado pela equação

$$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 \log(x), \quad \textbf{(A.26)}$$

e β_1 será a elasticidade de y em relação a x (assumindo $x, y > 0$).

EXEMPLO A.5

(Função Demanda de Elasticidade Constante)

Se q for a quantidade demandada e p for o preço, e essas duas variáveis estiverem relacionadas por

$$\log(q) = 4{,}7 - 1{,}25 \log(p),$$

a elasticidade-preço da demanda será $-1{,}25$. Em linhas gerais, um aumento de 1% no preço leva a uma redução de 1,25% na quantidade demandada.

Para nossos propósitos, o fato de que β_1 em (A.26) seja somente próximo da elasticidade não é importante. Aliás, quando a elasticidade é definida com o uso de cálculo diferencial — como na Seção A.5 —, a definição será exata. Para os fins de análise econométrica, (A.26) define um **modelo de elasticidade constante**. Tais modelos desempenham um papel muito importante na economia empírica.

Outras possibilidades para usar a função log freqüentemente surgem nos trabalhos aplicados. Suponha que $y > 0$ e

$$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x. \tag{A.27}$$

Então, $\Delta\log(y) = \beta_1\Delta x$, e assim $100{\cdot}\Delta\log(y) = (100{\cdot}\beta_1)\Delta\, x$. Conseqüentemente, quando y e x são relacionados pela equação (A.27),

$$\%\Delta y \approx (100 \cdot \beta_1)\Delta x. \tag{A.28}$$

EXEMPLO A.6

(Equação Logarítmica dos Salários)

Suponha que salário por hora e anos de educação estejam relacionados por

$$\log(\mathit{salário}) = 2{,}78 + 0{,}094\ \mathit{educ}.$$

Então, usando a equação (A.28),

$$\%\Delta\mathit{salário} \approx 100(0{,}094)\Delta\mathit{educ} = 9{,}4\ \Delta\mathit{educ}.$$

Por conseguinte, um ano a mais de educação aumenta o salário por hora em cerca de 9,4%.

Geralmente, a grandeza $\%\Delta y/\Delta x$ é chamada **semi-elasticidade** de y em relação a x. A semi-elasticidade é a alteração percentual em y quando x aumenta em uma unidade. O que acabamos de mostrar é que, no modelo (A.27), a semi-elasticidade é constante e igual a $100 \cdot \beta_1$. No Exemplo A.6, podemos resumir convenientemente a relação entre salários e educação dizendo que um ano a mais de educação — começando com qualquer número — aumenta o salário em cerca de 9,4%. Esse é o motivo pelo qual tais modelos desempenham um papel importante em economia.

Outra relação de algum interesse em economia aplicada é

$$y = \beta_0 + \beta_1\log(x), \tag{A.29}$$

onde $x > 0$. Como podemos interpretar essa equação? Se considerarmos a mudança em y, obtemos $\Delta y = \beta_1\Delta\log(x)$, que pode ser reescrito como $\Delta y = (\beta_1/100)[100 \cdot \Delta\log(x)]$. Portanto, usando a aproximação em (A.23), temos

$$\Delta y \approx (\beta_1/100)(\%\Delta x). \tag{A.30}$$

Em outras palavras, $\beta_1/100$ é a variação unitária em y quando x aumenta em 1%.

EXEMPLO A.7

(Função Oferta de Mão-De-Obra)

Assuma que a oferta de mão-de-obra de um trabalhador pode ser descrita como

$$horas = 33 + 45{,}1 \log(salário)$$

onde *salário* é salário por hora e *horas* são as horas trabalhadas por semana. Então, de (A.30),

$$\Delta horas \approx (45{,}1/100)(\%\Delta\ salário) = 0{,}451\ \%\Delta salário.$$

Em outras palavras, um aumento de 1% no salário aumenta o número de horas trabalhadas por semana em cerca de 0,45, ou pouco menos que meia hora. Se o salário aumentar em 10%, então, $\Delta horas = 0{,}451(10) = 4{,}51$, ou cerca de quatro horas e meia. Não iríamos querer usar essa aproximação para alterações percentuais muito maiores no salário.

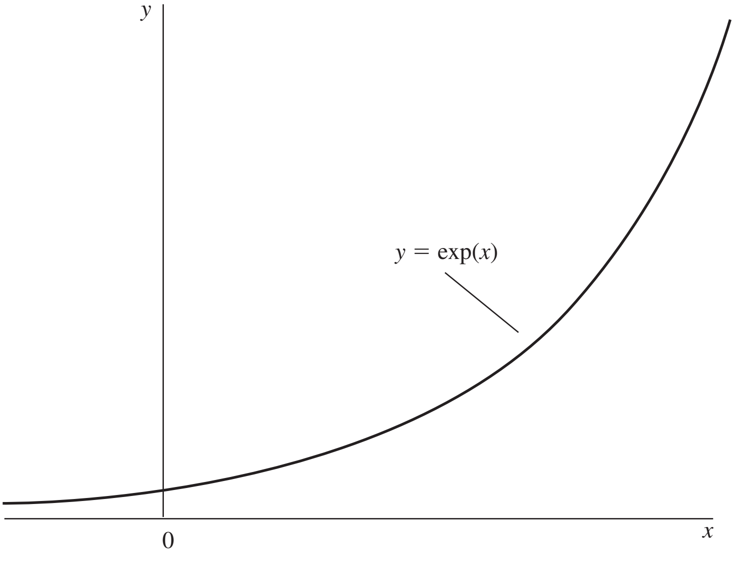
A Função Exponencial

Antes de fechar esta seção, precisamos examinar uma função especial que está relacionada com o log. Como estímulo, considere a equação (A.27). Ali, $\log(y)$ é uma função linear de x. Mas como encontrar y propriamente dito como uma função de x? A resposta é dada pela **função exponencial**.

Escreveremos a função exponencial como $y = \exp(x)$, que está traçada na Figura A.5. Pela Figura A.5, vemos que $\exp(x)$ é definida para qualquer valor de x e é sempre maior que zero. Algumas vezes, a função exponencial é escrita como $y = e^x$, mas não usaremos essa notação. Dois importantes valores da função exponencial são $\exp(0) = 1$ e $\exp(1) = 2{,}7183$ (para quatro casas decimais).

Figura A.5

Gráfico de $y = \exp(x)$.



A função exponencial é o inverso da função log no seguinte sentido: $\log[\exp(x)] = x$ para qualquer x, e $\exp[\log(x)] = x$ para $x > 0$. Em outras palavras, o log "desfaz" o exponencial, e vice-versa. (Essa é a razão de a função exponencial algumas vezes ser chamada de função *antilog.*) Em particular, note que $\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x$ é equivalente a

$$y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x).$$

Se $\beta_1 > 0$, a relação entre x e y terá a mesma forma da Figura A.5. Portanto, se $\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x$ com $\beta_1 > 0$, então, x terá um efeito marginal crescente sobre y. No Exemplo A.6, isso significa que mais um ano de educação leva a uma alteração maior no salário que o ano anterior de educação.

Dois fatos úteis sobre a função exponencial são $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$ e $\exp[c \cdot \log(x)] = x^c$.

A.5 CÁLCULO DIFERENCIAL

Na seção anterior, expressamos várias aproximações que se fundamentavam em cálculo diferencial. Seja $y = f(x)$ para alguma função f. Então, para alterações pequenas em x,

$$\Delta y < \frac{df}{dx} \cdot \Delta x, \qquad \textbf{(A.31)}$$

onde df/dx é a derivada da função f, avaliada no ponto inicial x_0. Também escrevemos a derivada como dy/dx.

Por exemplo, se $y = \log(x)$, então, $dy/dx = 1/x$. Usando (A.31), com dy/dx avaliada em x_0, teremos $\Delta y \approx (1/x_0)\Delta x$, ou $\Delta\log(x) \approx \Delta x/x_0$, que é a aproximação dada em (A.22).

Em econometria aplicada, ajuda recordar as derivadas de um punhado de funções, pois usamos a derivada para definir a inclinação de uma função em determinado ponto. Poderemos, então, usar (A.31) para encontrar a alteração aproximada em y para alterações pequenas em x. No caso linear, a derivada é simplesmente a inclinação da linha, como esperaríamos: se $y = \beta_0 + \beta_1 x$, então, $dy/dx = \beta_1$.

Se $y = x^c$, então, $dy/dx = cx^{c-1}$. A derivada de uma soma de duas funções é a soma das derivadas: $d[f(x) + g(x)]/dx = df(x)/dx + dg(x)/dx$. A derivada de uma constante multiplicada por qualquer função é aquela mesma constante multiplicada pela derivada da função: $d[cf(x)]/dx = c[df(x)/dx]$. Essas regras simples nos possibilitam encontrar derivadas de funções mais complicadas. Outras regras, tais como as do produto, do quociente e da cadeia, serão familiares para aqueles que tiveram aulas de cálculo diferencial, mas não as reveremos aqui.

Algumas funções que são usadas com freqüência em economia, com suas derivadas, são

$$\begin{aligned}
&y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2;\ dy/dx = \beta_1 + 2\beta_2 x \\
&y = \beta_0 + \beta_1/x;\ dy/dx = -\beta_1/(x^2) \\
&y = \beta_0 + \beta_1\sqrt{x};\ dy/dx = (\beta_1/2)x^{-1/2} \\
&y = \beta_0 + \beta_1\log(x);\ dy/dx = \beta_1/x \\
&y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x);\ dy/dx = \beta_1\exp(\beta_0 + \beta_1 x)
\end{aligned}$$

Se $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$ nesta última expressão, obteremos $dy/dx = \exp(x)$ quando $y = \exp(x)$.

Na Seção A.4, dissemos que a equação (A.26) define um modelo de elasticidade constante quando é usado cálculo diferencial. A definição da elasticidade no cálculo diferencial é $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$. É possível mostrar, usando propriedades de logs e exponenciais, que, quando (A.26) se mantém, $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \beta_1$.

Quando y é uma função de múltiplas variáveis, a noção de **derivada parcial** torna-se importante. Suponha que

$$y = f(x_1,x_2). \tag{A.32}$$

Então, existirão duas derivadas parciais, uma em relação a x_1 e outra em relação a x_2. A derivada parcial de y em relação a x_1, aqui representada por $\partial y/\partial x_1$, é exatamente a derivada normal de (A.32) em relação a x_1, onde x_2 é tratada como uma *constante*. De forma semelhante, $\partial y/\partial x_2$ é exatamente a derivada de (A.32) em relação a x_2, mantendo x_1 fixo.

As derivadas parciais são tão úteis quanto as derivadas normais por praticamente as mesmas razões. Podemos aproximar a mudança em y como

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1, \text{ mantendo } x_2 \text{ fixo.} \tag{A.33}$$

Portanto, o cálculo diferencial nos possibilita definir efeitos parciais em modelos não-lineares da mesma forma como podemos fazer em modelos lineares. De fato, se

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

então,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \beta_1 \; \frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta_2.$$

Isso pode ser reconhecido como os efeitos parciais definidos na Seção A.2.

Um exemplo mais complicado é

$$y = 5 + 4x_1 + x_1^2 - 3x_2 + 7x_1 \cdot x_2. \tag{A.34}$$

Agora, a derivada de (A.34) em relação a x_1 (tratando x_2 como uma constante) é simplesmente

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 + 7x_2;$$

observe como isso depende de x_1 e x_2. A derivada de (A.34) em relação a x_2 é $\frac{\partial y}{\partial x_2} = -3 + 7x_1$, de modo que ela só depende de x_1.

EXEMPLO A.8

(Função de Salários com Interação)

Uma função relacionando salários com anos de educação e de experiência é

$$salário = 3{,}10 + 0{,}41\ educ + 0{,}19\ exper - 0{,}004\ exper^2 + 0{,}007\ educ \cdot exper. \quad \textbf{(A.35)}$$

O efeito parcial de exper sobre salário é a derivada parcial de (A.35):

$$\frac{\partial salário}{\partial exper} = 0{,}19 - 0{,}008\ exper + 0{,}007\ educ.$$

Essa é a mudança aproximada no salário causada pelo aumento da experiência em um ano. Observe que esse efeito parcial depende do nível inicial de *exper* e *educ*. Por exemplo, para um trabalhador que está iniciando com $educ = 12$ e $exper = 5$, o próximo ano de experiência aumentará o salário em cerca de $0{,}19 - 0{,}008(5) + 0{,}007(12) = 0{,}234$, ou 23,4 centavos por hora. A alteração exata pode ser calculada computando (A.35) para $exper = 5$, $educ = 12$ e para $exper = 6$, $educ = 12$, e depois calculando a diferença. Isso resultará em 0,23, que está muito perto da aproximação.

O cálculo diferencial tem um papel importante nas funções de minimização e maximização de uma ou mais variáveis. Se $f(x_1,x_2, ..., x_k)$ for uma função diferenciável de k variáveis, então, uma condição necessária para $x_1^*, x_2^*, ...,x_k^*$ minimizar ou maximizar f para todos os possíveis valores de x_j será

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = 0,\ j = 1, 2, ..., k. \quad \textbf{(A.36)}$$

Em outras palavras, todas as derivadas parciais de f devem ser zero quando elas forem avaliadas em x_h^*. Essas são chamadas *condições de primeira ordem* para maximizar ou minimizar uma função. Na prática, esperamos solucionar a equação (A.36) para x_h^*. Em seguida, poderemos usar outros critérios para determinar se minimizamos ou maximizamos a função. Não precisaremos desse processo aqui. [Veja Sydsaeter e Hammond (1995) para uma explicação de cálculo diferencial multivariado e seu uso na otimização de funções.]

RESUMO

As ferramentas matemáticas examinadas aqui são cruciais para compreender a análise de regressão e a probabilidade e estatística que serão tratadas nos Apêndices B e C. O tópico sobre funções não-lineares — especialmente as funções quadráticas, logarítmicas e exponenciais — é fundamental para o entendimento da moderna pesquisa econômica aplicada. O nível de compreensão exigido para essas funções não inclui um profundo conhecimento de cálculo diferencial, embora ele seja necessário para certas derivações.

PROBLEMAS

A.1 A tabela seguinte contém valores referentes a despesas mensais com habitação de dez famílias.

Família	Despesas Mensais com Habitação (Dólares)
1	300
2	440
3	350
4	1.100
5	640
6	480
7	450
8	700
9	670
10	530

(i) Encontre a média das despesas mensais com habitação.

(ii) Encontre a mediana das despesas mensais com habitação.

(iii) Se as despesas mensais com habitação fossem medidas em centenas de dólares, em vez de em dólares, quais seriam as despesas média e mediana?

(iv) Suponha que a família número 8 aumente suas despesas mensais com habitação para 900 dólares, mas as despesas de todas as outras famílias permaneçam as mesmas. Calcule a média e a mediana das despesas mensais com habitação.

A.2 Suponha que a seguinte equação descreva o relacionamento entre a média de aulas perdidas durante um semestre (*perdidas*) e a distância da escola (*dist*, medida em milhas):

$$perdidas = 3 + 0{,}2\, dist.$$

(i) Desenhe um gráfico com linha, assegurando-se de rotular os eixos. Como você interpreta o intercepto nessa equação?

(ii) Qual o número médio de aulas perdidas por alguém que more a cinco milhas de distância?

(iii) Qual é a diferença no número médio de aulas perdidas por alguém que more a 10 milhas de distância e alguém que more a 20 milhas de distância?

A.3 No Exemplo A.2, a quantidade de CDs estava relacionada com o preço e a renda pela equação $quantidade = 120 - 9{,}8\, preço + 0{,}03\, renda$. Qual seria a demanda por CDs se $preço = 15$ e $renda = 200$? O que isso sugere sobre o uso de funções lineares para descrever curvas de demanda?

A.4 Suponha que a taxa de desemprego nos Estados Unidos vá de 6,4% em um ano para 5,6% no próximo.

(i) Qual seria o decréscimo em pontos percentuais na taxa de desemprego?

(ii) Qual seria a percentagem de queda da taxa de desemprego?

A.5 Suponha que o retorno sobre as ações de determinada empresa vá de 15% em um ano para 18% no ano seguinte. Os acionistas majoritários afirmam que "os lucros sobre as ações somente aumentaram 3%", enquanto o presidente da empresa afirma que "os lucros sobre as ações da empresa aumentaram 20%". Reconcilie essas discordâncias.

A.6 Suponha que a Pessoa A ganhe 35.000 dólares por ano e a Pessoa B ganhe 42.000 dólares por ano.

(i) Encontre a percentagem exata pela qual o salário da Pessoa B excede o da Pessoa A.

(ii) Agora, use a diferença em logs naturais para encontrar a diferença percentual aproximada.

A.7 Suponha que o seguinte modelo descreva a relação entre o salário anual (*salário*) e o número de anos de experiência prévia (*exper*) no mercado de trabalho:

$$\log(salário) = 10{,}6 + 0{,}027\, exper.$$

(i) Qual será o *salário* quando *exper* = 0? E quando *exper* = 5? (*Sugestão*: você precisará trabalhar com exponencial.)

(ii) Use a equação (A.28) para aproximar o aumento percentual em *salário* quando *exper* aumenta em cinco anos.

(iii) Use os resultados da parte (i) para calcular a diferença percentual exata no salário quando *exper* = 5 e *exper* = 0. Comente como isso se compara com a aproximação na parte (ii).

A.8 Sejam *cresprpempr* o crescimento proporcional no emprego, em nível de município, de 1990 a 1995, e *tximpvend* a taxa do imposto sobre vendas do município, declarada como uma proporção. Interprete o intercepto e a inclinação na equação

$$cresprpempr = 0{,}043 - 0{,}78\, tximpvend.$$

A.9 Suponha que o rendimento de certa colheita (em alqueires por acre) esteja relacionado com a quantidade de fertilizante (em libras por acre) como

$$rendimento = 120 + 0{,}19 \sqrt{fertilizante}.$$

(i) Desenhe um gráfico com essa relação, usando diversos valores para *fertilizante*.

(ii) Descreva como a forma dessa relação se compara com a de uma função linear entre *rendimento* e *fertilizante*.