**Introdução à Probabilidade e Estatística II
Exercícios para revisão e autoteste**“Estatística para Economistas”, Rodolfo Hoffmann
“Probabilidade e Estatística para engenharia e ciências”, Walpole e Myers
“Statics for Business & Economics”, Paul Newbold
“Estatística e Introdução à Econometria”, Alexandre Sartoris

**TEOREMAS DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÕES USUAIS**

**1.** Uma variável aleatória X tem média µ=8, variância σ²=9 e distribuição de probabilidade desconhecida. Determine:
a) P(-4<X<20)
b) P(|X-8|≥6).

**2.** Uma indústria elétrica fabrica uma lâmpada de 100 watts que, de acordo com as especificações da embalagem, tem vida média de 900 horas, com desvio padrão de 50 horas. No máximo, qual é a porcentagem de que uma lâmpada não dure nem mesmo 700 horas? Assuma que a distribuição seja simétrica em torno da média.

**3.** A variável aleatória X tem média µ=10 e variância σ²=4. Usando o teorema de Chebychev, determine:
a) P(|X-10|≥3)
b) P(|X-10|<3)
c) P(5<X<15)
d) a constante *c* de modo que P(|X-10|≥c)≤0,04.

**4.** Sejam X o número que ocorre quando um dado vermelho é jogado, e Y o número que ocorre quando um dado verde é jogado. Determine:
a) E(X + Y)
b) E(X – Y)
c) E(XY)

**5.** Uma variável aleatória X tem distribuição normal com média µ=7 e variância σ²=16. Em uma amostra de 5 elementos, essa variável assumiu os seguintes valores: 4, 6, 5, 10 e 9.
a) Qual a mediana da população?
b) Qual a mediana da amostra?

**6.** Um fabricante sabe que a resistência dos resistores que ele produz tem distribuição normal com média igual a 100 ohms e desvio padrão igual a 2 ohms.
a) Que porcentagem de resistores terá resistência entre 98 ohms e 102 ohms?
b) Que porcentagem de resistores terá resistência maior do que 95 ohms?

**7.** Um dado é jogado 180 vezes. Qual é a probabilidade de o resultado ser ‘seis’ em 40 ou mais dessas jogadas? Qual é a probabilidade de o resultado ser ‘cinco’ ou ‘seis’ em menos de 50 das 180 jogadas? (use a aproximação normal da binomial).

**8.** Um produto que pesa em média 8g com desvio padrão de 5g é embalado em caixas de 144 unidades. A caixa vazia pesa, em média, 200g com desvio padrão de 10g. Admitindo que as variáveis em questão tenham distribuições normais e que as 144 unidades que são colocadas nas caixas são tomadas ao acaso, determine a probabilidade de uma caixa pesar mais de 1.400g.

**9.** Um exame é constituído de 100 testes tipo certo-errado. Qual é o valor da média e do desvio padrão do numero de testes respondidos corretamente por um aluno que nada sabe sobre a matéria? Qual é a probabilidade de esse aluno acertar 60 ou mais dos 100 testes? Qual é a probabilidade de ele acertar menos de 45 testes? Qual é a probabilidade de ele acertar de 44 a 60 testes, incluindo os extremos?

**10.** O peso médio de 500 estudantes do sexo masculino é 75kg. Admite-se que essa medida tem distribuição normal com desvio padrão igual a 6kg. Determine o numero esperado de estudantes no grupo (a) com mais de 81kg e (b) cujo peso esteja entre 69 e 81kg.

**11.** Certo tipo de lâmpada tem vida média de 1.500 horas e desvio padrão de 150 horas. Suponha que dispomos de quatro dessas lâmpadas e que usaremos uma lâmpada por vez, substituindo prontamente quando se queimar. Pressupondo que a vida média das lâmpadas tem distribuição normal, determine a probabilidade de que tenhamos, usando essas quatro lâmpadas, iluminação por (a) mais de 6.600 horas e (b) menos de 5.500 horas.

**12.** Sabe-se que, uma população de 10 milhões de pessoas, há 1 milhão que obtém renda mensal superior a X. Se, dessa população, tira-se uma amostra aleatória de 100 pessoas, qual é a probabilidade de se encontrar menos de 6 pessoas com renda mensal superior a X.

**13.** Um exame é constituído de 300 testes tipo certo-errado. Calcule a probabilidade de um aluno, sem nada saber sobre a matéria do exame, acertar 200 dos testes propostos. Determine a média e o desvio padrão do numero de testes respondidos corretamente por um aluno que nada sabe. Qual é a probabilidade de esse aluno acertar 200 ou mais testes?

**14.** Um exame é constituído de 100 testes tipo múltipla escolha, com 5 alternativas cada um. Qual é o valor da média e do desvio padrão do numero de testes respondidos corretamente por um aluno que nada sabe sobre a matéria? Qual a probabilidade de esse aluno acertar 30 ou mais dos 100 testes? Qual a probabilidade de ele acertar menos de 15 testes? Qual é a probabilidade de ele acertar de 15 (inclusive) a 30 (inclusive) testes?

**15.** Uma máquina de ensacar determinado produto apresenta variações de peso com desvio padrão de 2kg. Em quanto deve ser regulado o peso médio do saco para que apenas 5% tenham menos de 60kg?

**16**. Uma loja vende certo produto a crédito, sem entrada. Sabe-se que, em média, a loja não recebe pagamento de 2% das unidades entregues. Se não houvesse essa perda, o preço por unidade do produto seria de R$100,00.
a) De quanto deve ser aumentado o preço para que as perdas sejam, em média, compensadas?
b) Se o preço for aumentado de R$3,00 por unidade, qual é a probabilidade de esse acréscimo não compensar as perdas em um mês em que são entregues 900 unidades?

**17.** A máquina de empacotar um determinado produto apresenta variações de peso com desvio padrão de20g. Em quanto deve ser regulado o peso médio do pacote para que apenas 10% tenham menos de 400g?

**18.** Uma companhia de seguros tem 400 segurados de certo tipo. Cada um deles paga R$1.000,00 por ano. Caso ocorra o determinado acidente, a companhia deverá pagar R$8.000,00. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência desse acidente, com qualquer um dos segurados durante um ano, é 0,1. Desprezando outros custos, determine a probabilidade de a companhia de seguros ter prejuízo em certo ano.

**19.** Sabe-se que, em uma população de 12 milhões de pessoas, há 240 mil empregadores. Se, dessa população, tira-se uma amostra aleatória de 5 pessoas, qual é a probabilidade de não haver, na amostra, nenhum empregador? Em uma amostra de 400 pessoas, qual é a probabilidade de se encontrar menos de 5 empregadores?

**20.** Uma companhia de seguros tem 400 segurados de certo tipo. Cada um deles paga R$2.000,00 por ano. Caso ocorra um determinado acidente, a companhia deverá pagar R$15.000,00 para cada acidentado. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência desse acidente, com qualquer um dos segurados durante um ano, é 0,1. Os custos fixos da companhia são de R$8.000,00 por ano. Qual é a probabilidade de a companhia de seguros ter prejuízo em certo ano?

**21.** Um aluno que nada sabe sobre determinada matéria responde, ao acaso, uma prova com 400 testes tipo certo-errado. Sabe-se que a probabilidade do aluno acertar X ou mais testes é 12,5%. Determine X.

**22.** Uma moeda é jogada 3.600 vezes. Associamos valor X=1 ao resultado ‘cara’ e X=0 ao resultado ‘coroa’. Qual é a probabilidade de que a média de X, obtida nessas 3.600 jogadas, difira da média verdadeira µ por menos de 0,01?

**23.** Sabe-se que 5% das 258.740 famílias de uma região tem renda mensal superior a R$2.000,00. Qual é a probabilidade de que haja mais de 30 famílias com essa característica em uma amostra aleatória de 400 famílias?

**24.** Um produtor de um alimento enlatado, afirma que cada lata tem 160g de conteúdo. A máquina de enlatar o produto, entretanto, apresenta certa variabilidade na quantidade colocada em cada lata. Admite-se que o peso do que é colocado em cada lata é uma variável com distribuição normal com desvio padrão de 4g. Se a máquina for regulada para colocar em média 5% acima do peso declarado, qual é a proporção de latas que terão conteúdo com peso inferior ao declarado? Em quanto deve ser regulado o peso médio para que apenas 3% das latas tenham menos de 160g de conteúdo?

**25.** Seja X a variável definida como o resultado do lançamento de um tetraedro regular de material homogêneo em cujas faces estão marcados os valores 1,2,3 e 4. Seja Y a média de k valores de X, isto é, Y= $\frac{1}{k}\sum\_{i=1}^{k}Xi$;
Determine o menor valor de k de maneira que P(Y≥3)≥0,0228.

**26.** Um vendedor faz telefonemas iniciais a seus clientes em potencial, para tentar descobrir quando uma visita em suas casas parece valer a pena ou não. A sua experiência sugere que 40% de seus contatos inicias são seguidos por visitas em casa. Se ele contatar 100 pessoas, qual é a probabilidade de ocorrerem de 45 a 50 visitas em casa? *(Statics for Business & Economics, 4ª ed, pg 212)*

EXS. COMPLEMENTARES: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS E TEOREMA DE TCHEBYCHEV
“Estatística e Introdução à Econometria”, Alexandre Sartoris

**C1.** Uma variável aleatória contínua X tem média 50 e desvio padrão 10. Calculemos a probabilidade mínima de que x esteja entre 35 e 65.

**C2.** Determine a função densidade de probabilidade de uma variável x que pode assumir qualquer valor no intervalo [a,b] e tem distribuição uniforme.

**C3.** Numa normal padronizada, determine as probabilidades de z estar entre:
a) 1 desvio padrão acima ou abaixo da média;
b) 2 desvio padrão acima ou abaixo da média;
c) 3 desvio padrão acima ou abaixo da média.

**C4.** Os lucros anuais de uma firma seguem uma distribuição normal com média R$ 700 mil e desvio padrão R$ 150 mil. Calcule a probabilidade de, num dado ano, os lucros:
a) serem maiores do que R$ 800 mil;
b) serem maiores do que R$ 600 mil;
c) serem menores do que R$ 900 mil;
d) serem menores do que 650 mil;
f) estarem entre R$ 350 mil e R$ 500 mil;
g) estarem entre R$ 720 mil e R$ 850 mil.

**C5.** As notas bimestrais de um aluno são, em média, quatro e têm variância 2,56, mas a distribuição não é conhecida. Determine um limite para a probabilidade de, num dado bimestre, sua nota:
a) estar entre 1,5 e 6,5;
b) estar entre 2 e 6;
c) ser menor do que 1 ou maior do que 7.

**C6.** Dada uma variável aleatória contínua x cuja média é 20 e a variância é 25, determine limites para as seguintes probabilidades:
a) P(10<X<30)
b) P(14<X<26)
c) P( 27,5 < X ou X < 12)

**C7.** Determine a média e a variância de uma variável aleatória x cuja f.d.p. é dada por:

f(x) = $\left\{\begin{array}{c}αe^{-αx} , se x \geq 0\\0 ,se x<0\end{array}\right.$

**C8.** Mostre que, para uma variável aleatória com média µ e variância σ², é válida a expressão:
 P(|x - µ| < k) ≥ 1 - $\frac{σ²}{k²}$

**C9.** Uma variável aleatória x, x ≥ 0, tem f.d.p. dada por f(x). se y = $\sqrt{x}$, determine a f.d.p. de y.

**C10.** Assinale verdadeiro ou falso:
a) Uma f.d.p. nunca pode assumir valores maiores do que 1.
b) Dada a f.d.p. de uma variável aleatória, é possível encontrar a média e o desvio padrão dessa variável.
c) Dados a média e o desvio padrão de uma variável aleatória, é possível calcular exatamente a probabilidade desta variável.
d) Dados a média e o desvio padrão de uma variável aleatória, é possível estabelecer limites para a probabilidade desta variável.
e) Se x é uma variável aleatória com f.d.p. contínua f(x), a probabilidade de x ser igual a um certo valor a é igual a f(a).
f) A distribuição normal é perfeitamente definida pela média e pela variância.
g) A distribuição normal é perfeitamente definida pela média e pelo desvio padrão.

**SOLUÇÕES**1. a) P(-4<X<20) = P[8-(4)(3) < X < 8+(4)(3)] ≥ 15/16.
 b) P(|X-8|≥6) = 1 - P(|X-8|<6)
 =1 - P(-6< X-8 <6)
 =1 – P[8-(2)(3) < X < 8 +(2)(3)]
 ≤ ¼.
2. 0,03125.

3. a) no máximo 4/9
 b) pelo menos 5/9
 c) pelo menos 21/25
 d) 10.

4. a) 7
 b) 0
 c) 12,25.

5. Mediana da população = 7, mediana da amostra = 6.

6. a) 68,26% b)99,38%

7. 2,87% e 4,85%

8. 21,5%

9. µ=50, σ=5, 2,87%, 13,57%, 88,53%.

10. a) 79 b)341

11. a) 0,0228 b) 0,0668

12. 0,0668

13. Praticamente zero,µ=150 e σ=8,66, praticamente zero.

14. µ=20 e σ=4; 0,88%, 8,46%, 91,10%.

15. 63,29kg

16. a) 204 centavos b) 2,15%

17. 425,6g

18. 4,01%

19. 0,985=0,904; 0,1056

20. 1,86%

21. X=212

22. 76,34%

23. P(Z>2,409)=0,8%

24. P(Z, -2)=0,0228 ; 167,5g

25. k=22. Sem correção de continuidade, obtém-se k=20.

26. 0.1332. Com a correção de continuidade, obtêm-se 0.1621.

C1. Pede-se, portanto, P(35 < X < 50); pelo teorema de Tchebichev:
 P(35 < X < 65) ≥ 1- 1/1,5² = 0,5556 = 55,56%.