FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO

E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Ribeirão Preto, 2º semestre de 2012
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA APLICADA II

LISTA TEÓRICA
Responsável: Alexandre C. Nicolella

AXIOMAS DE PROBABILIDADE

1. O administrador de um hospital codifica os pacientes baleados atendidos no pronto socorro de acordo com o fato de eles terem ou não plano de saúde (1 se tiverem e 0 se não tiverem) e de acordo com a sua condição que é classificada como boa (b), razoável (r) ou séria (s). Considere o experimento que consiste em codificar um paciente baleado.

a) Forneça o espaço amostral desse experimento.

b) Seja A o evento em que o paciente está em uma condição série. Especifique os resultados de A.

c) Seja B o evento em que o paciente não possui seguro. Especifique os resultados em B.

d) Forneça todos os resultados do evento $B^c \cup A$.

2. Certa cidade com população de 100.000 habitantes possui 3 jornais: I, II e III. As proporções de moradores que leem esses jornais são as seguintes:

I: 10%	I e II: 8%	I, II e III: 1%
II: 30%	I e III:2%	
III:5%	II e III: 4%	

a) Determine o número de pessoas que leem apenas um jornal.

b) Quantas pessoas leem pelo menos dois jornais?

c) Se I e III são jornais matutinos e II é um jornal vespertino, quantas pessoas leem pelo menos um jornal matutino mais um jornal vespertino?

d) Quantas pessoas não leem jornal?

e) Quantas pessoas leem apenas um jornal matutino e um vespertino?

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

3. Seja $A \subset B$. Expresse as seguintes probabilibades da forma mais simples possível:

a) $P(A|B)$;

b) $P(A|B^c)$;

c) $P(B|A)$;

d) $P(B|A^c)$.

4.Uma questão de verdadeiro ou falso é colocada para um time formado por marido e sua esposa em um jogo de perguntas e respostas. Tanto o homem quanto a mulher darão, de forma independente, a resposta correta com probabilidade p. Qual das estratégias seguintes é a melhor para o casal?

a) Escolher um deles e deixar que a pessoa escolhida responda a questão.

b) Ambos pensaram na questão e darem a resposta comum se estiverem de acordo, ou então, se não estiverem de acordo, jogar uma moeda para determinar que resposta devem dar.

5. Considere duas jogadas independentes de uma moeda honesta. Suponha que A seja o evento em que a primeira jogada da cara, B o evento em que a segunda dá cara e C o evento em que ambas as jogadas da moeda caem do mesmo lado.

Mostre que os eventos A, B e C são independentes por pares – isto é, A e B são independentes, A e C são independentes, B e C são independentes – mas não totalmente independentes.

6. A urna A tem 5 bolas brancas 7 bolas pretas. A urna B tem 3 bolas brancas e 12 bolas pretas. Jogamos uma moeda honesta; se dar cara, retiramos uma bola da urna A. Se der coroa, retiramos uma bola da urna B. Suponha que uma bola branca seja selecionada. Qual é a probabilidade de que tenha dado coroa na moeda?

7. Em cada uma das n jogadas independentes de uma moeda, obtém-se cara com uma probabilidade p. Quão grande deve ser n para que a probabilidade de se obter pelo menos

uma cara seja de no mínimo ½?

8) Suponha-se que um sistema seja formado por 100 componentes, cada um dos quais tenha confiabilidade igual a 0,95. Se esses componentes funcionarem independentemente um do outro, e se o sistema completo funcionar adequadamente quando ao menos 80 componentes funcionarem, qual será a confiabilidade do sistema?

9) Um levantamento do *Consumer Reports* listou os distribuidores dos automóveis Saturn, Infiniti e Lexus como os três principais no serviço aos clientes (*Consumer Reports*, Abril de 1994). O Saturn se classificou como número um, com somente 4% dos clientes citando algum tipo de insatisfação com o distribuidor. Responda às seguintes questões sobre o grupo de 250 clientes do Saturn:

A) Qual é a probabilidade de que 12 clientes ou menos terão algum tipo de insatisfação com o distribuidor?
B) Qual é a probabilidade de que 5 clientes ou mais terão algum tipo de insatisfação com o distribuidor?
C) Qual é a probabilidade de que 8 clientes terão algum tipo de insatisfação com o distribuidor?

10) Considere a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}, para\ x \geq 0$$

A) Escreva a fórmula para $P(x \leq x_0)$
B) Encontre $P(x \leq 2)$
C) Encontre $P(x \leq 5)$
D) Encontre $P(2 \leq x \leq 5)$
E) Encontre $P(x \geq 3)$

11) Uma amostra de 1.000 componentes eletrônicos é escolhida ao acaso e os itens são escolhidos ao acaso e são testados, obtendo-se 30 defeituosos. Calcule a probabilidade de obter pelo menos 30 itens defeituosos, supondo que a confiabilidade desses itens é de 0,95.

VARIÁVEL ALEATÓRIA

12. Existem duas causas possíveis para a quebra de certa máquina. Verificar a primeira possibilidade custa C1 reais, e, se aquela tiver sido de fato causa de quebra, o problema pode ser reparado ao custo de R1, reais. Similarmente, existem os custos C2 e R2 associados à segunda probabilidade. Suponha que p e 1-p representem, respectivamente, as probabilidades de que a quebra seja causada pela primeira e pela segunda possibilidade. Em quais condições de p, Ci,Ri, i=1,2, devemos verificar inicialmente a primeira causa possível de defeito e depois a segunda, em vez de inverter a ordem de verificação, de forma a minimizarmos o custo envolvido na manutenção da maquina?

13. Uma caixa contém 5 bolas de gude vermelhas e 5 azuis. Duas bolas de gude são retiradas aleatoriamente. Se elas tiverem a mesma cor, você ganha R$1,10; se elas tiverem cor diferente, você perde R$1,00. Calcule:
a) o valor esperado da quantia que você ganha;
b) a variância da quantia que você ganha.

14. Se E(X)=1 e Var(X)=5, determine
a) E(2+ 2X),
b) Var(4+ 3X).

VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

15) Dado que z é uma variável aleatória normal padrão, calcule a probabilidade $P(-1{,}98 \leq z \leq 0{,}49)$

16) O conteúdo de cinzas (em percentagem) no carvão, X, pode ser considerado como uma variável aleatória contínua com a seguinte f.d.p: $f(x) = \left(\frac{1}{4.875}\right)x^2$, para 10 ≤ x ≤ 25. Pede-se: qual é o conteúdo de cinzas esperado para uma amostra de um espécime de carvão?

17) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}, x > 0$. Suponha que o

custo de fabricação de um item seja R$ 2,00 e o preço de venda seja R$ 5,00. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0,9$. Qual o lucro esperado por item?

VARIÁEL ALEATÓRIA CONJUNTAMENTE DISTRIBUÍDA

18. Suponha que 3 bolas sejam sorteadas sem reposição de uma urna consistindo em 5 bolas brancas e 8 bolas vermelhas. Considere Yi=1 quando a i-ésimabola selecionada seja branca e Yi=0 caso contrário. Determine a função de probabilidade conjunta de:

a)Y1,Y2;

b) Y1,Y2,Y3.

19. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$f(x,y)=\frac{6}{7}\,(x^2+\frac{xy}{2})$; $0<x<1$; $0<y<2$.

a) Verifique se esta de fato é uma função densidade conjunta.

b) Calcule a função de densidade de X.

c) Determine P(X>Y).

d) Determine $P(Y>\frac{1}{2} \mid X<\frac{1}{2})$

e) Determine E(X).

f) Determine E(Y).

20. O vetor aleatório (X,Y), é chamado de uniformemente distribuído em uma região R do plano se, para alguma constante c, sua densidade conjunta é

$$f(x,y)=\begin{cases} c & ;\ \text{se } (x,y) \in R \\ 0 & ;\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Mostre que 1/c = área da região R. Suponha que (X,Y) seja uniformemente distribuído ao longo do quadrado centrado em (0,0) e com lados de comprimento 2.

b) Mostre que X e Y são independentes, com cada um sendo distribuído ao longo de (-1,1).

c) Qual é a probabilidade de que (X,Y) esteja contido no circulo de raio 1 centrado na origem? Isto é, determine $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

21. Três pontos X1, X2,X3 são selecionados aleatoriamente em uma linha L. Qual é a probabilidade de que X1 esteja entre X2 e X3 ?

TEOREMA DE TCHEBYCHEV

22. A variável aleatória X tem média $\mu=10$ e variância $\sigma^2=4$. Usando o teorema de Chebychev, determine:

a) $P(|X-10|\geq 3)$

b) $P(|X-10|<3)$

c) $P(5<X<15)$

d) a constante c de modo que $P(|X-10|\geq c)\leq 0{,}04$.

23. Uma variável aleatória contínua X tem média 50 e desvio padrão 10. Calculemos a probabilidade mínima de que x esteja entre 35 e 65.

ESPERANÇA, VARIÂNCIA, CORRELAÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

24) O comprimento padrão de uma peça industrial é de 50 cm, em média, com um desvio-padrão de 1 cm. Qual o percentual de peças produzidas que estarão entre 47,5 cm e 52,5cm?

25) Os salários de uma corporação variam apresentam uma média anual de R$14.300,00, com desvio-padrão de R$ 1.200,00. Calcule a proporção de salários anuais fora do intervalo de [R$12.500,00 ; R$ 16.100,00].

26) Suponha que estamos atirando dardos em um alvo circular de raio 10cm, e seja X a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A fdp de X é:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & se\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & para\ os\ demais\ valores \end{cases}$$

Qual é a probabilidade de acertar o centro do alvo, se este for um círculo de 1cm de raio?

27) Seja V a velocidade do vento, e suponha que V esteja uniformemente distribuída sobre o intervalo [0,10], e dada por uma função $f(v) = \frac{1}{10}$. A pressão P, na superfície da asa de um avião é dada pela relação $P = H(v) = 0{,}03v^2$. Pede-se o valor esperado da pressão.

28) A v.a. contínua X tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

A) Se b for um número que satisfaz -1 < b < 0, calcule P(X > b | X < b/2)
B) Calcule E(X) e Var(X)

29) Seja X com densidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & se -1 < x < 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de X.

30) Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X, que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p. $f(x) = \frac{3}{5}10^{-5}x(100-x), 0 \leq x \leq 100$. Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por

$L = C_1 + c_2X$, Calcule E(L), o lucro esperado por unidade.

31) A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x}{3} & se\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & se\ x < 0\ ou\ x > 3 \end{cases}$$

A) Qual é a probabilidade de se vender mais de 150kg, num dia escolhido ao acaso?

B) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
C) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

32) A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média 5kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo:

20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classe?

33) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio padrão de 10cm^3. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.

A) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990cm^3?
B) Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais de dois desvios padrões?
C) O que acontecerá com a porcentagem do item b se a máquina for regulada de forma que a média seja 1.200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

34) Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo A (comum) e do tipo B (luxo), com lucros respectivos de $1.000,00 e $2.000,00, caso não haja restituição, e com prejuízos de $3.000,00 e $8.000,00 se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal, respectivamente com médias 9 meses e 12 meses, e com variâncias 4 $meses^2$ e 9 $meses^2$. Se tivesse de planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?