Valor Esperado Condicionado

Pode-se definir o valor esperado de uma variável aleatória condicionado ao evento de uma outra variável aleatória.

Definição:

Se (X, Y) for uma variável aleatória contínua bidimensional, definiremos o valor esperado condicionado de X, para um dado $Y = y$, como:

Caso contínuo:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x|y)dx$$

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y|x)dy$$

Caso discreto

$$E(X|y_j) = \sum_{i}^{\infty} x_i p(x_i|y_j)$$

$E(Y|X)$ é uma função de X, pois conforme pode ser visto acima integra-se na dimensão de Y e, portanto, é uma variável aleatória. Sendo uma variável aleatória pode-se calcular a sua esperança. Ou seja:

$$E(E(\mathrm{Y}|\mathrm{X}))$$

Essa é conhecida como a ***lei da probabilidade total***. Vejamos:

Teorema:

$$E[E(X|Y)] = E(X)$$

$$E[E(Y|X)] = E(Y)$$

Derivação:

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{g(x)}dy$$

Observe que a equação acima é função de x

$$E[E(Y|X)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{\cancel{g(x)}}dy\right]\cancel{g(x)}dx$$

$$E[E(Y|X)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy$$

Outras propriedades da esperança condicional são:

Teorema:

Se X e Y forem duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$E(X|Y) = E(X) \quad e \quad E(Y|X) = E(Y)$$

Demonstração:

Se X e Y forem duas variáveis aleatórias independentes:

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{g(x)}dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{\cancel{g(x)}h(y)}{\cancel{g(x)}}dy = E(y)$$

Como $E(Y|X)$ é uma função de X, o gráfico dessa função é conhecido como curva de regressão da média de Y em X.

Teorema:

Suponha Y, X e Z três variáveis aleatórias, então:

$$E(Y + Z|X) = E(Y|X) + E(Z|X)$$

Demonstração:

Não disponível nessa nota de aula

Teorema:

Suponha Y, X duas variáveis aleatórias e c uma constante qualquer, então:

$$E(cY|X) = cE(Y|X)$$

Demonstração:

Não disponível nessa nota de aula

Teorema:

Suponha Y, X duas variáveis aleatórias e $Y \geq 0$ então:

$$E(Y|X) \geq 0$$

Demonstração:

Não disponível nessa nota de aula

Teorema:

Suponha Y, X e Z três variáveis aleatórias e $Y \geq Z$ então:

$$E(Y|X) \geq E(Z|X)$$

Demonstração:

Não disponível nessa nota de aula

Variância Condicionada

Definição:

Se (X, Y) for uma variável aleatória contínua bidimensional, definiremos a variância condicionada de Y, para um dado $X = x$, como:

$$Var(Y|X) = E\{[Y - E(Y|X)]^2|X\}$$

Algumas propriedades:

1) Suponha Y, X duas variáveis aleatórias

$$Var(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$$

2) Suponha Y, X duas variáveis aleatórias

$$Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$$