Variância

A esperança de X, $E(X)$, é um parâmetro da distribuição de probabilidade de X . Essa fornece uma medida de posicionamento em relação R_X. Intuitivamente essa medida pode ser considerada como se fosse a "média ponderada". Entretanto essas duas medidas são distintas.

Considerando um grande número de determinações de X $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e calculando a média ponderada esta estará próxima de $E(X)$ para um n suficientemente grande. A média ponderada é uma característica de um conjunto de dados e a esperança é um parâmetro de uma distribuição de probabilidade, ou seja, um valor teórico.

MOTIVAÇÃO :

Seja X e Y duas variáveis aleatórias que representam a duração de uma lâmpada de dois fabricantes distintos. Os dois fabricantes anunciam uma durabilidade média de $E(X) = 1.000h$ e $E(Y) = 1.000h$. Então pode-se afirmar que as duas lâmpadas possuem a mesma qualidade?

Duas possíveis situações:

1) Fabricante A possui lâmpadas que duram na sua maioria entre 950 e 1050h

2) Fabricante B possui lâmpadas que duram entre 650 e 1350

Com essa nova informação você mudaria de opinião sobre a qualidade dos fabricantes?

<u>Definição:</u>

Seja X uma variável aleatória, a variância de X, $Var(X)$ ou σ^2 será:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2$$

A $Var(X)$ é o segundo momento de uma distribuição de probabilidade e fornece uma medida de variabilidade ao redor da esperança, ou seja, o quanto a variável se desvia em relação a média. Assim, intuitivamente a variância é a média do quadrado dos desvios em relação a média, e portanto, expressa em unidade quadrada de X. Para evitar unidades ao quadrado tem-se uma medida de dispersão que utiliza a unidade de X e chamada de desvio padrão, σ, será

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Teorema:

$$Var\,(X) \;=\; E(X^2) - E(X)^2$$

Demonstração:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

EXEMPLO:

Sendo X uma variável aleatória contínua com função .densidade de probabilidade dada por:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1 + \mathrm{x} & -1 \le \mathrm{x} < 0 \\ 1 - \mathrm{x} & 0 \le \mathrm{x} \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-1}^{0} \mathrm{x}(1+\mathrm{x})\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{x}(1-\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-1}^{0} (\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} (\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)\mathrm{dx} = \left[\frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\mathrm{x}^2}{2} - \frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_{0}^{1}$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_{-1}^{0} \mathrm{x}^2(1+\mathrm{x})\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \mathrm{x}^2(1-\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

$$\int_{-1}^{0} (\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3)\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} (\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^3)\mathrm{dx} = \left(\frac{\mathrm{x}^3}{3} + \frac{\mathrm{x}^4}{4}\right)\Bigg]_{-1}^{0} + \left(\frac{\mathrm{x}^3}{3} - \frac{\mathrm{x}^4}{4}\right)\Bigg]_{0}^{1}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3+4-3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E(X)}^2 = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

Propriedades da Variância

Propriedade (7):

Sendo c uma constante, então:

$$Var(c + X) = Var(X)$$

Demonstração:

$$Var(c + X) = E[X + c - E(X + c)]^2 = E[X - E(X) + c - c]^2 = Var(X)$$

Propriedade (8):

Sendo c uma constante, então:

$$Var(cx) = c^2 Var(x)$$

Demonstração:

$$Var(cX) = E[(cX)^2] - [E(cX)]^2 = c^2 E(X^2) - [cE(X)]^2$$

$$= c^2[E(X^2) - (E(X))]^2 = c^2 Var(X)$$

Propriedade (9):

Sendo (X, Y) uma variável aleatória bidimensional e X e Y independentes:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Demonstração:

$$Var(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Note que a variância não é aditiva e não possui a propriedade de operador linear. Assim tem-se:

$$Var(aX + b) \neq aVar(X) + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

<u>Propriedade (10)</u>:

Seja $X_1, \dots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes, então:

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)$$

<u>Demonstração:</u>

Decorre da propriedade 9

<u>Propriedade (11)</u>:

Sendo (X, Y) uma variável aleatória bidimensional qualquer

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$$

<u>Demonstração:</u>

$$Var(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) – [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) – E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

$$Var(X + Y) = E(X^2) – E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$