<u>Momentos: Esperança e Variância</u>.

Introdução

Em uma relação determinística pode-se ter a seguinte relação:

$$by + ax = 0$$

Assim, $\mathrm{m} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$, é a declividade e a e b são parâmetros. Sabendo os valores dos parâmetros pode-se plotar a relação entre x e y

Da mesma forma que nos modelos determinísticos, nos modelos não determinísticos os parâmetros são empregados para caracterizar a distribuição de probabilidade. A cada distribuição podemos associar certos parâmetros, gerando informações valiosas sobre a distribuição.

Esses parâmetros terão a princípio dois nomes: Esperança e Variância, que são o primeiro e segundo momento de uma distribuição. O primeiro fornece uma medida de posição e o segundo uma medida de variabilidade.

EXEMPLO:

Suponha que $f(x) = ke^{-kx}, x \geq 0$ é a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória e k o parâmetro dessa distribuição. Verificando se é uma função densidade de probabilidade:

$$\int_0^\infty ke^{-kx} = k\int_0^\infty e^{-kx} = k\frac{e^{-kx}}{-k}\Bigg]_0^\infty = e^{-kx}]_0^\infty$$

$$= e^{-k\infty} + e^{-k0} = 0 + 1 = 1 \text{ Para todo k} > 0$$

Nota

$$\boldsymbol{\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}}$$

Essa é a distribuição exponencial, útil para representar a duração de vida x

EXEMPLO:

Suponha uma linha de montagem onde x é o número de peças até que a primeira seja defeituosa. Assim, os valores possíveis de x: 1,2,3,...,n,.... Sendo x = k e p a probabilidade de peça defeituosa a distribuição de probabilidade será:

$$P(x = k) = p\,(1 - p)^{k-1} \text{ para } k = 1,2,...$$

Para ser uma distribuição de probabilidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots]$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1\ se\ 0 < p < 1$$

Se especificarmos a variável aleatória e a sua distribuição de probabilidade, existirá alguma maneira de caracterizar essa distribuição em termos de alguns parâmetros numéricos?

Esperança ou Valor esperado

<u>Caso Discreto</u>

<u>Definição:</u>

Seja x uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Seja $p(x_i) = P(X = x_i)$, i = 1,2,...,n então o valor esperado de x, denotado por $E(X)$ será

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Se a série convergir absolutamente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i) p(x_i) < \infty$$

A Esperança pode ser compreendida intuitivamente como a *"média ponderada"* dos possíveis valores de x. Caso os valores de x sejam igualmente prováveis, tem-se a *"média aritmética"*

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Apesar da semelhança entre média ponderada e $E(X)$, existe uma diferença fundamental entre elas:

- $E(X)$ é um parâmetro de uma distribuição de probabilidade teórica, ou seja, é um valor teórico
- $\bar{x}$ é a média ponderada, o resultado de uma combinação de um conjunto numérico – valor empírico

Se o experimento for realizado *n* vezes, originando os valores x_1,x_2,...,x_n(são as n medições repetidas das características numéricas de x)

- $\bar{x}$ é a média ponderada e está próxima de $E(X)$ em certo sentido se *n* for suficientemente grande.
- Da mesma forma a f_A frequência relativa estão próximas de p_A probabilidade

<u>Caso contínuo</u>

<u>Definição</u>:

Seja *x* uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade *f(x)*, assim o valor esperado ou $E(X)$ será:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$E(X)$ existirá somente se:

$$E(X) = |x| \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ for finita}$$

$E(X)$ é o que se chama de primeiro momento de uma distribuição de probabilidade e fornece uma medida de posicionamento da distribuição podendo também ser representada o "centro de gravidade" da distribuição de probabilidade.

EXEMPLO:

$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{1}{(1500)^2}x & 0 \leq x \leq 1500 \\ = \dfrac{-1}{(1500)^2}(x - 3000) & 1500 \leq x \leq 3000 \\ = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \left[\int_0^{1500} \frac{1}{(1500)^2}x^2dx + \int_{1500}^{3000} -\frac{1}{(1500)^2}(x^2 - 3000x)dx\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1500}\right] + \left[-\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_{1500}^{3000}\right] + \left[-\frac{1}{(1500)^2}3000\frac{x^2}{2}\bigg|_{1500}^{3000}\right]$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= 1500$$

<u>Valor Esperado de uma Função de uma Variável Aleatória</u>

Seja X uma variável aleatória e Y uma transformação dessa variável. Assim, $Y = H(X)$ é uma função de X e Y é uma variável aleatória. Suponha que o interesse está em calcular $E(Y)$. Existem duas maneiras:

a) <u>Utilizando a distribuição de probabilidade de *Y*</u>

<u>Definição</u>:

Seja X uma variável aleatória e $Y = H(X)$

(a) Se Y for discreta:

$$E(Y) = \sum_{i}^{\infty} y_i q(y_i)$$

(b) *Se* Y for contínua

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy$$

Assim, para obter $E(Y)$ é preciso obter a distribuição de probabilidade Y. Encontrar essa distribuição nem sempre é uma tarefa fácil

b) <u>Utilizando a distribuição de probabilidade de *X*</u>

Podemos obter $E(Y)$ apenas conhecendo a distribuição de probabilidade de X.

<u>Teorema</u>:

Seja X uma variável aleatória e $Y = H(X)$

(a) Se X for discreta:

$$E(Y) = E[H(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j)$$

(b) *Se X* for contínua:

$$E(Y) = E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$$

<u>Demonstração:</u>

$\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty}[\sum_i H(x_i)p(x_i)]$ Onde a soma interior é tomada para todos os i os quais $H(x_i) = y_j$ com y_j fixo. Assim $H(x_i)$ é constante na soma interior. Portanto:

$\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_i p(x_i)$

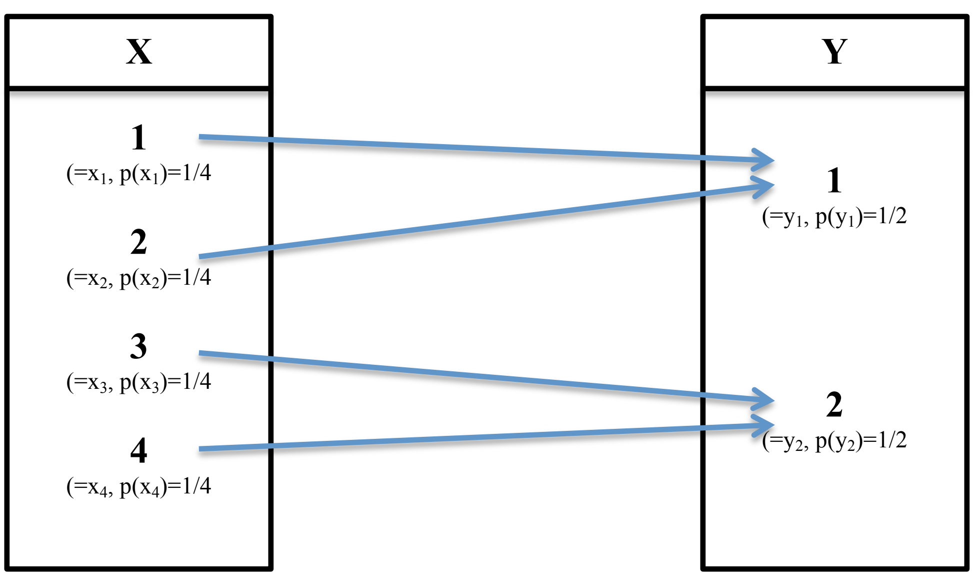
No entanto:

$$\sum_i p(x_i) = \sum_i p\big(x \big| H(x_i) = y_j\big) = q(y_j)$$

Assim:

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j)$$

<u>Visualizando</u>:



No esquema anterior pode-se calcular a $E(Y)$ de duas maneiras distintas conforme apresentado. A primeira é utilizando a distribuição de Y.

$$E(Y) = \sum_{i}^{\infty} y_i q(y_i) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = 1{,}5$$

A segunda é utilizando a distribuição de X, assim:

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum\nolimits_i H(x_i)p(x_i)\right] = H(1)p(1) + H(2)p(2) + H(3)p(3) + H(4)p(4)$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{2} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{2}\left[\sum\nolimits_i H(x_i)p(x_i)\right] = 1.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{4} + 2.\frac{1}{4} + 2.\frac{1}{4} = 1{,}5$$

Ambos geram o mesmo resultado. No entanto nem sempre é uma tarefa fácil encontrar a distribuição de Y! Vejamos mais um exemplo de como encontrar a $E(Y)$

EXEMPLO:

x uma va com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & se\ x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & se\ x > 0 \end{cases}$$

Pois queremos o modulo. Como nesse intervalo *x* é negativo, utilizamos -*x*

E $y = |x|$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} \widetilde{(-x)}\, e^x dx + \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x} dx\right] = 1$$

F.d.p. de y

$$G(y) = p(Y \geq y) = p[|x| \leq y] = [-y \leq x \leq y] = 2p[0 \leq x < y]$$

Simétrico em relação a zero

$$G(y) = 2\int_0^y f(x)dx = 2\int_0^y \frac{e^{-x}}{2} = -e^{-x} + 1 \ \text{ para } y \geq 0$$

$g(y) = G'(y) = e^{-x}$ para $y \geq 0$

$$E(y) = \int_0^{\infty} yg(y)dy = \int_0^{\infty} ye^{-y}dy =$$

$$= \left[\frac{e^{-y}}{-1}(y+1)\right]_0^{\infty} = [-e^{-y}y - e^{-y}]_0^{\infty} = [0 - 0 - (0 - 1)] = 1$$

Nota

$$\int \boldsymbol{xe^{ax}dx} = \frac{\boldsymbol{e^{ax}}}{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}})$$

Valor Esperado de Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Definição:

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional e $Z = H(X, Y)$ então Z será uma variável aleatória unidimensional e $E(Z)$ será:

(a) Se Z for discreta

$$E(Z) = \sum_i^{\infty} z_i p(z_i)$$

(b) Se z for contínua

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz$$

Teorema:

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional e $Z = H(X, Y)$ então Z será uma variável aleatória unidimensional e $E(Z)$ será:

(a) Se (X, Y) for discreta:

$$E(Z) = \sum_j^{\infty} \sum_i^{\infty} H(x_{i,} y_j) p(x_i, y_j)$$

(b) Se (X, Y) for contínua:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy$$

Um caso especial é quando $Z = (X, Y)$. Assim, tem-se:

(a) Se (X, Y) for discreta:

$$E(X,Y) = \sum_{j}^{\infty}\sum_{i}^{\infty} x_i . y_j p(x_i, y_j)$$

(b) Se (X, Y) for contínua:

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.yf(x,y)dxdy$$

<u>**Propriedades do Valor Esperado**</u>

<u>Propriedade (1):</u>

Se $X = c$, sendo c uma constante, então:

$$E(X) = c$$

<u>Demonstração:</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \text{c}$$

Observe que R_X é constituído de um único valor sendo a $\text{P}[\text{X}_{(\text{s})} = \text{c}] = 1$. Esse tipo de variável aleatória é chamada de degenerada

Propriedade (2):

Sendo c uma constante e X uma variável aleatória, então:

$$E(cX) = cE(X)$$

Demonstração:

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = cE(X)$$

Propriedade (3):

Sendo (X, Y) uma variável aleatória bidimensional e $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, então:

$$E(Z + W) = E(Z) + E(W)$$

Demonstração:

$$E(Z + W) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[H_1(x, y) + H_2(x, y)]f(x, y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_1(x, y)f(x, y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x, y)f(x, y)dxdy = E(Z) + E(W)$$

Propriedade (4):

Sendo X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Demonstração:

Decorre da propriedade 3, onde e $X = H_1(\cdot)$ e $Y = H_2(\cdot)$.

Observações:

Note que

$Y = aX + b \rightarrow E(Y) = aE(x) + b$, pois a esperança é um operador linear

Mas

$E(x^2) \neq \left(E(x)\right)^2; E(\ln x) \neq \ln E(x)\,; E\left(\frac{1}{x}\right) \neq \frac{1}{E(x)}$, pois são operações não lineares

Propriedade (5):

Para n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$, tem-se:

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$

Demonstração:

Decorre da Propriedade 4.

Propriedade (6):

Se (X, Y) for uma variável aleatória bidimensional, sendo X e Y independentes, então:

$$E(X, Y) = E(X)E(Y)$$

Demonstração:

$$E(X\,, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)dxdy$$

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = E(X)E(Y)$$

Observe a diferença em relação a propriedade 4, a qual não requer independência