Estatística Matemática

Alexandre Nicolella

Departamento de Economia
Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto

2009

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Conceito de Variável Aleatória

Um experimento ε

- Pode ser um valor alfa-numérico, ex.: Cara ou Coroa.
- No entanto, queremos seu registro como número.
- Atribuir um valor real x a todo elemento ω de Ω.
- $x = X(\omega)$ é o valor de uma função X do espaço amostral Ω no espaço dos reais R_X

Definição

Sejam ε um experimento e Ω um espaço amostral associado a ε, uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada variável aleatória

Graficamente

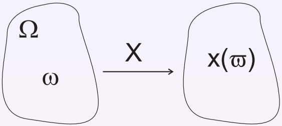

Figura: Variável Aleatória X

- R_X é o espaço amostral associado a v.a. X (contradominio de $X(\omega)$); Se $X(\omega) = \omega \Rightarrow R_x = \Omega$
- O interesse são os valores de X e não na sua natureza funcional
- X é uma função unívoca: a cada $\omega \in \Omega$ há exatamente um valor de $X(\omega)$.

Graficamente

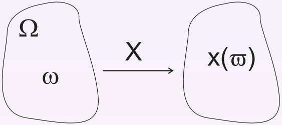

Figura: Variável Aleatória X

- R_X é o espaço amostral associado a v.a. X (contradominio de $X(\omega)$); Se $X(\omega) = \omega \Rightarrow R_x = \Omega$
- O interesse são os valores de X e não na sua natureza funcional
- X é uma função unívoca: a cada $\omega \in \Omega$ há exatamente um valor de $X(\omega)$.

Graficamente

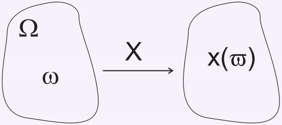

Figura: Variável Aleatória X

- R_X é o espaço amostral associado a v.a. X (contradominio de $X(\omega)$); Se $X(\omega) = \omega \Rightarrow R_x = \Omega$
- O interesse são os valores de X e não na sua natureza funcional
- X é uma função unívoca: a cada $\omega \in \Omega$ há exatamente um valor de $X(\omega)$.

Exemplo

Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ é o espaço amostral do experimento ε.
- Se X for o número de caras (H), tem-se $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$ e $X(TT) = 0$

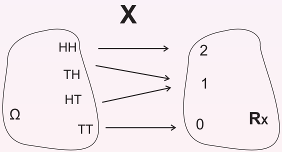

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - X número de caras

Exemplo

Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ é o espaço amostral do experimento ε.
- Se X for o número de caras (H), tem-se $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$ e $X(TT) = 0$

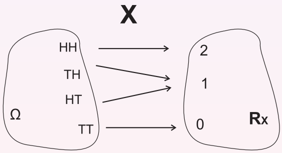

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - X número de caras

Exemplo

Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ é o espaço amostral do experimento ε.
- Se X for o número de caras (H), tem-se $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$ e $X(TT) = 0$

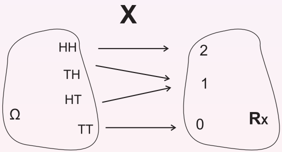

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - X número de caras

Observação

Questão de Forma

X é a variável aleatória e o valor que essa variável pode assumir é x. Assim, tem-se $\text{Prob}(X \geq 60)$ e não $\text{Prob}(x \geq 60)$

Eventos

- Eventos em Ω estão associados a eventos em R_X (subespaço).

Definição

Sejam um experimento ε e Ω o seu espaço amostral e X a v.a. definida em Ω e R_X seu contradomínio. Sendo B um evento definido em relação a R_X, $B \subset R_X$, então A será:

$$A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$$

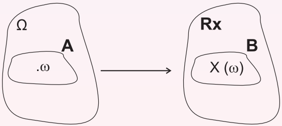

Figura: Evento B em R_X

Eventos

- Eventos em Ω estão associados a eventos em R_X (subespaço).

Definição

Sejam um experimento ε e Ω o seu espaço amostral e X a v.a. definida em Ω e R_X seu contradomínio. Sendo B um evento definido em relação a R_X, $B \subset R_X$, então A será:

$$A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$$

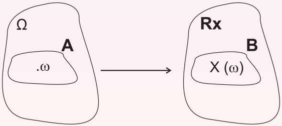

Figura: Evento B em R_X

Eventos

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $R_x = \{0, 1, 2\}$
- Com $B = \{1\}$ e $X(HT) = X(TH) = 1$, então $A = \{HT, TH\}$

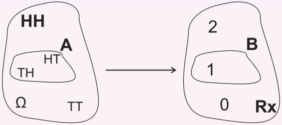

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - evento B

Eventos

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $R_x = \{0, 1, 2\}$
- Com $B = \{1\}$ e $X(HT) = X(TH) = 1$, então $A = \{HT, TH\}$

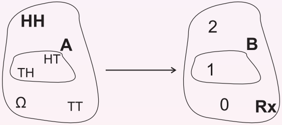

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - evento B

Eventos

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $R_x = \{0, 1, 2\}$
- Com $B = \{1\}$ e $X(HT) = X(TH) = 1$, então $A = \{HT, TH\}$

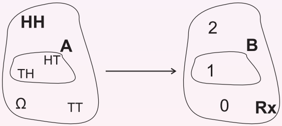

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - evento B

Eventos

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $R_x = \{0, 1, 2\}$
- Com $B = \{1\}$ e $X(HT) = X(TH) = 1$, então $A = \{HT, TH\}$

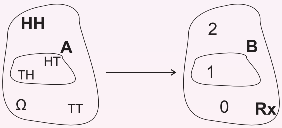

Figura: Exemplo: Lançamento de duas moedas - evento B

Eventos

Definição

Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, P(B) será definido como:
$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(A)$ onde $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\text{Prob}(HT) = \text{Prob}(TH) = 1/4 \Rightarrow \text{Prob}(HT, TH) = 1/2$. Como $\{X = 1\}$ é equivalente a $\{HT, TH\}$, tem-se $\text{Prob}(X = 1) = 1/2$
- Formalmente $\text{Prob}(X = 1) = \text{Prob}(\omega | X(\omega) = 1)$
- Frequentemente ignoramos o espaço amostral Ω. O interesse será em R_X e suas probabilidades associadas.

Eventos

Definição

Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, P(B) será definido como:
$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(A)$ onde $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\text{Prob}(HT) = \text{Prob}(TH) = 1/4 \Rightarrow \text{Prob}(HT, TH) = 1/2$. Como $\{X = 1\}$ é equivalente a $\{HT, TH\}$, tem-se $\text{Prob}(X = 1) = 1/2$
- Formalmente $\text{Prob}(X = 1) = \text{Prob}(\omega | X(\omega = 1))$
- Frequentemente ignoramos o espaço amostral Ω. O interesse será em R_X e suas probabilidades associadas.

Eventos

Definição

Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, P(B) será definido como:
$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(A)$ onde $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\text{Prob}(HT) = \text{Prob}(TH) = 1/4 \Rightarrow \text{Prob}(HT, TH) = 1/2$. Como $\{X = 1\}$ é equivalente a $\{HT, TH\}$, tem-se $\text{Prob}(X = 1) = 1/2$
- Formalmente $\text{Prob}(X = 1) = \text{Prob}(\omega | X(\omega = 1))$
- Frequentemente ignoramos o espaço amostral Ω. O interesse será em R_X e suas probabilidades associadas.

Eventos

Definição

Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, P(B) será definido como:
$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(A)$ onde $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\text{Prob}(HT) = \text{Prob}(TH) = 1/4 \Rightarrow \text{Prob}(HT, TH) = 1/2$. Como $\{X = 1\}$ é equivalente a $\{HT, TH\}$, tem-se $\text{Prob}(X = 1) = 1/2$
- Formalmente $\text{Prob}(X = 1) = \text{Prob}(\omega | X(\omega = 1))$
- Frequentemente ignoramos o espaço amostral Ω. O interesse será em R_X e suas probabilidades associadas.

Eventos

Definição

Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, P(B) será definido como:
$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(A)$ onde $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$

Exemplo: Lançar a moeda duas vezes

- $\text{Prob}(HT) = \text{Prob}(TH) = 1/4 \Rightarrow \text{Prob}(HT, TH) = 1/2$. Como $\{X = 1\}$ é equivalente a $\{HT, TH\}$, tem-se $\text{Prob}(X = 1) = 1/2$
- Formalmente $\text{Prob}(X = 1) = \text{Prob}(\omega | X(\omega = 1))$
- Frequentemente ignoramos o espaço amostral Ω. O interesse será em R_X e suas probabilidades associadas.

Variáveis Aleatórias Discretas

Definição

Seja X uma v.a., se o número de valores for finito ou infinito enumerável, X é uma v.a. discreta. Valores podem ser postos em lista $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Definição Probabilística

Seja X uma v.a. discreta, R_X seu contradomínio, a cada valor de x_i será associado uma probabilidade $p(x_i) = \text{Prob}(X = x_i)$, $i = 1, 2, ...$ se o número de valores for finito ou infinito enumerável, X é uma v.a. discreta.

Variáveis Aleatórias Discretas

Definição

Seja X uma v.a., se o número de valores for finito ou infinito enumerável, X é uma v.a. discreta. Valores podem ser postos em lista $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Definição Probabilística

Seja X uma v.a. discreta, R_X seu contradomínio, a cada valor de x_i será associado uma probabilidade $p(x_i) = \text{Prob}(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ se o número de valores for finito ou infinito enumerável, X é uma v.a. discreta.

Exemplos de v.a. Discretas

Exemplos

- A soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados.
- Número de pessoas participando de uma apólice de seguro de vida que estarão vivas em 5 anos.
- Default de uma dívida (*variável binária*).

Exemplos de v.a. Discretas

Exemplos

- A soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados.
- Número de pessoas participando de uma apólice de seguro de vida que estarão vivas em 5 anos.
- Default de uma dívida (*variável binária*).

Exemplos de v.a. Discretas

Exemplos

- A soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados.
- Número de pessoas participando de uma apólice de seguro de vida que estarão vivas em 5 anos.
- Default de uma dívida (*variável binária*).

Exemplos de v.a. Discretas

Exemplos

- A soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados.
- Número de pessoas participando de uma apólice de seguro de vida que estarão vivas em 5 anos.
- Default de uma dívida (*variável binária*).

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Uma variável aleatória é dita **contínua** quando ela pode assumir qualquer valor dentro de um determinado intervalo.
- Como há infinitos valores possíveis, a probabilidade associada a cada ponto específico é zero.

Definição

X é uma v.a. contínua, se existir uma função, denominada função distribuição de probabilidade (fdp) que deverá satisfazer algumas condições.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Uma variável aleatória é dita **contínua** quando ela pode assumir qualquer valor dentro de um determinado intervalo.
- Como há infinitos valores possíveis, a probabilidade associada a cada ponto específico é zero.

Definição

X é uma v.a. contínua, se existir uma função, denominada função distribuição de probabilidade (fdp) que deverá satisfazer algumas condições.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Uma variável aleatória é dita **contínua** quando ela pode assumir qualquer valor dentro de um determinado intervalo.
- Como há infinitos valores possíveis, a probabilidade associada a cada ponto específico é zero.

Definição

X é uma v.a. contínua, se existir uma função, denominada função distribuição de probabilidade (fdp) que deverá satisfazer algumas condições.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplos

- Altura (ou peso) de uma pessoa.
- O retorno de uma ação.
- Lucro de uma empresa.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplos

- Altura (ou peso) de uma pessoa.
- O retorno de uma ação.
- Lucro de uma empresa.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplos

- Altura (ou peso) de uma pessoa.
- O retorno de uma ação.
- Lucro de uma empresa.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplos

- Altura (ou peso) de uma pessoa.
- O retorno de uma ação.
- Lucro de uma empresa.

Distribuições de Probabilidade

Conceito Geral

- Toda informação sobre uma variável aleatória resume-se nos possíveis valores que ela pode assumir e a probabilidade associada a cada um desses valores.
- Este conjunto de informações é o que costumamos chamar genericamente de *distribuição de probabilidades*.
- As distribuições de probabilidades costumam ser representadas na forma de funções, que descrevem matematicamente a relação entre valores da variável aleatória e as respectivas probabilidades.

Distribuições de Probabilidade

Conceito Geral

- Toda informação sobre uma variável aleatória resume-se nos possíveis valores que ela pode assumir e a probabilidade associada a cada um desses valores.
- Este conjunto de informações é o que costumamos chamar genericamente de *distribuição de probabilidades*.
- As distribuições de probabilidades costumam ser representadas na forma de funções, que descrevem matematicamente a relação entre valores da variável aleatória e as respectivas probabilidades.

Distribuições de Probabilidade

Conceito Geral

- Toda informação sobre uma variável aleatória resume-se nos possíveis valores que ela pode assumir e a probabilidade associada a cada um desses valores.
- Este conjunto de informações é o que costumamos chamar genericamente de *distribuição de probabilidades*.
- As distribuições de probabilidades costumam ser representadas na forma de funções, que descrevem matematicamente a relação entre valores da variável aleatória e as respectivas probabilidades.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Probabilidade

- A Função Probabilidade descreve as probabilidades associadas a cada valor da variável aleatória:

$$f(x) = \text{Prob}(X = x)$$

- A coleção $[x_i, p(x_i)]$ para $i = 1, 2, ...$ é a distribuição de probabilidade de X.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Probabilidade

- A Função Probabilidade descreve as probabilidades associadas a cada valor da variável aleatória:

$$f(x) = \text{Prob}(X = x)$$

- A coleção $[x_i, p(x_i)]$ para $i = 1, 2, \ldots$ é a distribuição de probabilidade de X.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Propriedades da Função Probabilidade

1. Probabilidades devem ser não-negativas, $f(x) \geq 0$ para todo x
2. A soma das probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral é $\sum_x f(x) = 1$
3. Sendo B um evento associado a v.a. X $(B \subset R_X)$ $\text{Prob}(B) = \text{Prob}[\omega | X(\omega) \in B] = \text{Prob}[\omega | X(\omega) = x_{ij}]$ para os j elementos de B $\text{Prob}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Propriedades da Função Probabilidade

1. Probabilidades devem ser não-negativas, $f(x) \geq 0$ para todo x
2. A soma das probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral é $\sum_x f(x) = 1$
3. Sendo B um evento associado a v.a. X $(B \subset R_X)$ $\text{Prob}(B) = \text{Prob}[\omega|X(\omega) \in B] = \text{Prob}[\omega|X(\omega) = x_{ij}]$ para os j elementos de B $\text{Prob}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Propriedades da Função Probabilidade

1. Probabilidades devem ser não-negativas, $f(x) \geq 0$ para todo x
2. A soma das probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral é $\sum_x f(x) = 1$
3. Sendo B um evento associado a v.a. X $(B \subset R_X)$ $\text{Prob}(B) = \text{Prob}[\omega | X(\omega) \in B] = \text{Prob}[\omega | X(\omega) = x_{ij}]$ para os j elementos de B $\text{Prob}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Propriedades da Função Probabilidade

1. Probabilidades devem ser não-negativas, $f(x) \geq 0$ para todo x
2. A soma das probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral é $\sum_x f(x) = 1$
3. Sendo B um evento associado a v.a. X $(B \subset R_X)$ $\text{Prob}(B) = \text{Prob}[\omega | X(\omega) \in B] = \text{Prob}[\omega | X(\omega) = x_{ij}]$ para os j elementos de B
$\text{Prob}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição

- A Função Distribuição descreve a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual determinado ponto:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

Propriedades da Função Distribuição

1. $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F(x + h) = F(x)$ para todo x.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição $\times$ Função Probabilidade

- Utilizando resultados básicos de probabilidade, podemos definir a função distribuição como

  $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$ ou $F(x) = \sum_j p(x_j)$ para todo $x_j \leq x$

- Da mesma maneira, podemos definir a Função de Probabilidade em termos da Função Distribuição:

  $$F(x_j) = p(x_j) + p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + \ldots + p(x_1)$$
  $$F(x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + \ldots + p(x_1)$$
  $$\therefore$$
  $$p(x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})$$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Função Distribuição × Função Probabilidade

- Utilizando resultados básicos de probabilidade, podemos definir a função distribuição como

  $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$ ou $F(x) = \sum_j p(x_j)$ para todo $x_j \leq x$

- Da mesma maneira, podemos definir a Função de Probabilidade em termos da Função Distribuição:

$$
\begin{aligned}
&F(x_j) = p(x_j) + p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + \ldots + p(x_1) \\
&F(x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + \ldots + p(x_1) \\
&\therefore \\
&p(x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})
\end{aligned}
$$

Distribuições de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Para variáveis aleatórias continuas, é comum utilizar a denominação função densidade de probabilidade ao invés de função de probabilidades.
- A razão para uma denominação diferente é que, tal como discutido anteriormente, a probabilidade associada a qualquer valor específico é zero. Para um valor qualquer x_0

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0 \Rightarrow \text{Prob}(X = x_0) = 0 \nRightarrow A = \{x_0\} = \emptyset$$

Distribuições de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Para variáveis aleatórias continuas, é comum utilizar a denominação função densidade de probabilidade ao invés de função de probabilidades.
- A razão para uma denominação diferente é que, tal como discutido anteriormente, a probabilidade associada a qualquer valor específico é zero. Para um valor qualquer x_0

$$\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0 \Rightarrow \text{Prob}(X = x_0) = 0 \not\Rightarrow A = \{x_0\} = \emptyset$$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função Densidade de Probabilidade deve satisfazer:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. para quaisquer valores a e b, $-\infty < a < b < \infty$, tem-se: $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função Densidade de Probabilidade deve satisfazer:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. para quaisquer valores a e b, $-\infty < a < b < \infty$, tem-se: $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função Densidade de Probabilidade deve satisfazer:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. para quaisquer valores a e b, $-\infty < a < b < \infty$, tem-se: $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função Densidade de Probabilidade deve satisfazer:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. para quaisquer valores a e b, $-\infty < a < b < \infty$, tem-se: $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Se f^* satisfizer:

  $f^*(x) \geq 0$ e

  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = k$

  Assim, $f(x)$ satisfaz todas as propriedades:

  $f(x) = \frac{f^*(x)}{k}$

- $f(x)$ não apresenta a probabilidade de valores de X. Somente a área sobre a função $f(x)$ é que representa a probabilidade. Exemplo: $\text{Prob}(X = 2) = 0$ e $f(2) \neq 0$

Função Densidade de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Se f^* satisfizer:

  $f^*(x) \geq 0$ e

  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = k$

  Assim, $f(x)$ satisfaz todas as propriedades:

  $f(x) = \frac{f^*(x)}{k}$

- $f(x)$ não apresenta a probabilidade de valores de X. Somente a área sobre a função $f(x)$ é que representa a probabilidade. Exemplo: $\text{Prob}(X = 2) = 0$ e $f(2) \neq 0$

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

- Se X for uma v.a. continua

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- a função densidade acumulada é definida para todo x

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

- Se X for uma v.a. continua

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- a função densidade acumulada é definida para todo x

Função Distribuição Acumulada
Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

- Se X for uma v.a. continua

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- a função densidade acumulada é definida para todo x

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

Teoremas

1. A função F é não decrescente. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ pois $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ pois $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} \int_{\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. Se F é a fda de uma v.a. continua com fdp f, então:
   $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo x que F é derivável
   $\rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \ldots = f(x) \cong \frac{\text{Prob}(x < X \leq x+h)}{h}$

Função Distribuição Acumulada
Variáveis Aleatórias Contínuas

Teoremas

1. A função F é não decrescente. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ pois $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ pois $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} \int_{\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. Se F é a fda de uma v.a. continua com fdp f, então: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo x que F é derivável $\rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \ldots = f(x) \cong \frac{\text{Prob}(x<X\leq x+h)}{h}$

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

Teoremas

1. A função F é não decrescente. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ pois $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ pois $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} \int_{\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. Se F é a fda de uma v.a. continua com fdp f, então:
   $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo x que F é derivável
   $\rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \ldots = f(x) \cong \frac{\text{Prob}(x<X\leq x+h)}{h}$

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

Teoremas

1. A função F é não decrescente. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ pois $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ pois $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} \int_{\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. Se F é a fda de uma v.a. continua com fdp f, então: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo x que F é derivável $\rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \ldots = f(x) \simeq \frac{\text{Prob}(x < X \leq x+h)}{h}$

Função Distribuição Acumulada

Variáveis Aleatórias Contínuas

Teoremas

1. A função F é não decrescente. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ pois $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ pois $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} \int_{\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. Se F é a fda de uma v.a. continua com fdp f, então:
   $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo x que F é derivável
   $\rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \ldots = f(x) \cong \frac{\mathrm{Prob}(x<X\leq x+h)}{h}$

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- V Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- V Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- V A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- V Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- V A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- F A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- V Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- V A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- F A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- F A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Anpec 2001 — Questão 4

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$ contínua, definida sobre o espaço amostral A, do universo U:

- V Tanto A quanto U devem ser contínuos;
- V A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $\int_{-\infty}^{x_0} f(X)dX$;
- F A probabilidade $\text{Prob}(X \leq x_0)$ é dada por $f(x_0)$;
- F A função cumulativa de probabilidade pode ser discreta;
- F? A função densidade de probabilidade de X é calculada por $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ em que $F(x)$ é a função distribuição acumulada.

Eventos Equivalentes

Seja X uma v.a. definida em Ω e $y = H(x)$ seja uma função real de x. Então $Y = H(X)$ é uma v.a., pois para todo $\omega \in \Omega$, um valor de Y fica determinado, $y = H[X(\omega)]$. Graficamente, tem-se:

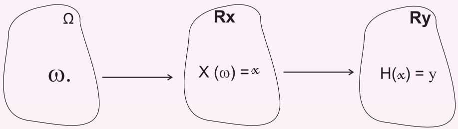

Figura: Eventos Equivalentes

Eventos Equivalentes

Definição

Seja C associado a R_Y e $B \subset R_X$. Assim,
$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}$

- B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Assim, B e C serão eventos equivalentes
- Só serão equivalentes se B e C ocorrerem conjuntamente
- Se A em Ω for equivalente a B então A é equivalente a C

Eventos Equivalentes

Definição

Seja C associado a R_Y e $B \subset R_X$. Assim,
$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}$

- B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Assim, B e C serão eventos equivalentes
- Só serão equivalentes se B e C ocorrerem conjuntamente
- Se A em Ω for equivalente a B então A é equivalente a C

Eventos Equivalentes

Definição

Seja C associado a R_Y e $B \subset R_X$. Assim,
$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}$

- B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Assim, B e C serão eventos equivalentes
- Só serão equivalentes se B e C ocorrerem conjuntamente
- Se A em Ω for equivalente a B então A é equivalente a C

Eventos Equivalentes

Definição

Seja C associado a R_Y e $B \subset R_X$. Assim,
$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}$

- B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Assim, B e C serão eventos equivalentes
- Só serão equivalentes se B e C ocorrerem conjuntamente
- Se A em Ω for equivalente a B então A é equivalente a C

Eventos Equivalentes

Definição

Seja uma v.a. X, H uma função real e $Y = H(x)$ uma v.a. Para o evento $C \subset R_Y$. Assim,
$P(C) = P[(x \in R_X : H(x) \in C)] = P[(\omega \in \Omega : H[X(\omega)] \in C)]$

- A probabilidade de um evento associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente.

Eventos Equivalentes

Definição

Seja uma v.a. X, H uma função real e $Y = H(x)$ uma v.a. Para o evento $C \subset R_Y$. Assim,
$P(C) = P[(x \in R_X : H(x) \in C)] = P[(\omega \in \Omega : H[X(\omega)] \in C)]$

- A probabilidade de um evento associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente.

Exemplos Eventos Equivalentes

Exemplos

Seja X uma v.a. com fdp
$f(x) = e^{-x}$

Sendo
$H(x) = 2x + 1$ e $R_X = \{x|x > 0\}$ e $R_Y = \{y|y > 0\}$

Suponha que o evento C seja $C = \{Y \geq 5\}$

Assim, $y \geq 5 \Rightarrow 2x + 1 \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$ Desta forma

$B = \{x \geq 2\} \Rightarrow P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e^2} \Rightarrow P(Y \geq 5) = \frac{1}{e^2}$

- Observe que $X(\omega) = x$ e $y = H(x)$ são processos determinísticos.

Exemplos Eventos Equivalentes

Exemplos

Seja X uma v.a. com fdp
$f(x) = e^{-x}$

Sendo
$H(x) = 2x + 1$ e $R_X = \{x|x > 0\}$ e $R_Y = \{y|y > 0\}$

Suponha que o evento C seja $C = \{Y \geq 5\}$

Assim, $y \geq 5 \Rightarrow 2x + 1 \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$ Desta forma

$B = \{x \geq 2\} \Rightarrow P(X \geq 2) = \int_2^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e^2} \Rightarrow P(Y \geq 5) = \frac{1}{e^2}$

- Observe que $X(\omega) = x$ e $y = H(x)$ são processos determinísticos.

Obtendo fdp de $Y = H(x)$

Procedimento Geral para obter fdp de $Y = H(x)$

1. Obter a fda de Y, $G(Y) = P(Y \leq y)$ achando o evento equivalente no contradomínio de X
2. Derivar $G(y)$ em relação a y $\Rightarrow g(y)$
3. Determinar os valores de y no contradomínio de Y para os quais $g(y) > 0$

Obtendo fdp de $Y = H(x)$

Procedimento Geral para obter fdp de $Y = H(x)$

1. Obter a fda de Y, $G(Y) = P(Y \leq y)$ achando o evento equivalente no contradomínio de X
2. Derivar G(y) em relação a y $\Rightarrow g(y)$
3. Determinar os valores de y no contradomínio de Y para os quais $g(y) > 0$

Obtendo fdp de $Y = H(x)$

Procedimento Geral para obter fdp de $Y = H(x)$

1. Obter a fda de Y, $G(Y) = P(Y \leq y)$ achando o evento equivalente no contradomínio de X
2. Derivar $G(y)$ em relação a y $\Rightarrow g(y)$
3. Determinar os valores de y no contradomínio de Y para os quais $g(y) > 0$

Obtendo fdp de $Y = H(x)$

Procedimento Geral para obter fdp de $Y = H(x)$

1. Obter a fda de Y, $G(Y) = P(Y \leq y)$ achando o evento equivalente no contradomínio de X
2. Derivar $G(y)$ em relação a y $\Rightarrow g(y)$
3. Determinar os valores de y no contradomínio de Y para os quais $g(y) > 0$

Exemplos: Obtendo a fdp de Y

Exemplos

Seja X uma v.a. com fdp
$f(x) = 2x$ para $0 < x < 1$

Sendo
$H(x) = 3x + 1$
$\therefore G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y) = P(X \leq \frac{(y-1)}{3})$
$G(y) = \int_0^{\frac{y-1}{3}} 2x dx = [\frac{y-1}{3}]^2$

Derivando $G(y)$
$G`(y) = \frac{dG(y)}{du} \frac{du}{dy} = \frac{2}{9}(y-1) = g(y)$ Note que $f(x) \neq g(y)$ e

$1 < y < 4$

Definição

Variáveis aleatórias multi bidimensionais

Observar duas ou mais características simultâneas de um ou mais experimento (ε_i)
$\longrightarrow$ Exemplo: Altura e Peso, Renda e Consumo, Educação e Salário

Definição

Sejam ε um experimento, Ω o espaço amostral, $X = X(\omega)$ e $Y = Y(\omega)$, para $\omega \in \Omega$. Então (X, Y) será uma variável aleatória bidimensional ou vetor aleatório.

Definição

Variáveis aleatórias multi bidimensionais

Observar duas ou mais características simultâneas de um ou mais experimento (ε_i)
$\longrightarrow$ Exemplo: Altura e Peso, Renda e Consumo, Educação e Salário

Definição

Sejam ε um experimento, Ω o espaço amostral, $X = X(\omega)$ e $Y = Y(\omega)$, para $\omega \in \Omega$. Então (X, Y) será uma variável aleatória bidimensional ou vetor aleatório.

Graficamente

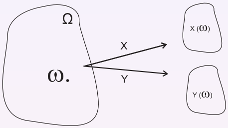

Figura: Variável Aleatória Bidimensional

- O contradomínio será R_{XY}
- Cada resultado $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ poderá ser representado como um ponto (x, y) no plano euclidiano.

Graficamente

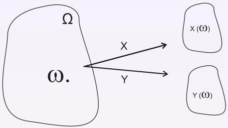

Figura: Variável Aleatória Bidimensional

- O contradomínio será R_{XY}
- Cada resultado $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ poderá ser representado como um ponto (x, y) no plano euclidiano.

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Discreto

Definição 1 no caso discreto

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) com $i = 1, ..., n, ...$ e $j = 1, ..., m, ...$

Definição 2 no caso discreto

A cada valor possível da v.a. discreta bidimensional (X, Y), (x_i, y_j), associa-se a $p(x_i, y_j)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y)
- $\sum \sum p(x_i, y_j) = 1$

- p é a função de probabilidade de (X, Y) e $[x_i, y_j; p(x_i, y_j)]$ é a

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Discreto

Definição 1 no caso discreto

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) com $i = 1, ..., n, ...$ e $j = 1, ..., m, ...$

Definição 2 no caso discreto

A cada valor possível da v.a. discreta bidimensional (X, Y), (x_i, y_j), associa-se a $p(x_i, y_j)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y)
2. $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$

- p é a função de probabilidade de (X, Y) e $[x_i, y_j; p(x_i, y_j)]$ é a

Definição: Função Distribuição de Probabilidade
Caso Discreto

Definição 1 no caso discreto

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) com $i = 1, ..., n, ...$ e $j = 1, ..., m, ...$

Definição 2 no caso discreto

A cada valor possível da v.a. discreta bidimensional (X, Y), (x_i, y_j), associa-se a $p(x_i, y_j)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y)
2. $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$

- p é a função de probabilidade de (X, Y) e $[x_i, y_j; p(x_i, y_j)]$ é a

Definição: Função Distribuição de Probabilidade
Caso Discreto

Definição 1 no caso discreto

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) com $i = 1, ..., n, ...$ e $j = 1, ..., m, ...$

Definição 2 no caso discreto

A cada valor possível da v.a. discreta bidimensional (X, Y), (x_i, y_j), associa-se a $p(x_i, y_j)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y)
2. $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$

- p é a função de probabilidade de (X, Y) e $[x_i, y_j; p(x_i, y_j)]$ é a

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Discreto

Definição 1 no caso discreto

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) com $i = 1, ..., n, ...$ e $j = 1, ..., m, ...$

Definição 2 no caso discreto

A cada valor possível da v.a. discreta bidimensional (X, Y), (x_i, y_j), associa-se a $p(x_i, y_j)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y)
2. $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$

- p é a função de probabilidade de (X, Y) e $[x_i, y_j; p(x_i, y_j)]$ é a

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Contínuo

Definição 1 no caso contínuo

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em um algum conjunto não enumerável do plano euclidiano.

Definição 2 no caso contínuo

Sendo (X, Y) uma v.a. contínua bidimensional tomando todos os valores em uma região R do plano euclidiano. A função distribuição de probabilidade conjunta irá satisfazer:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_R \int_R f(x, y) dx dy = 1$ se $f(x, y) = 0$ para $(x, y) \in R \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Contínuo

Definição 1 no caso contínuo

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em um algum conjunto não enumerável do plano euclidiano.

Definição 2 no caso contínuo

Sendo (X, Y) uma v.a. contínua bidimensional tomando todos os valores em uma região R do plano euclidiano. A função distribuição de probabilidade conjunta irá satisfazer:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_R \int_R f(x, y) dxdy = 1$ se $f(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \overline{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Contínuo

Definição 1 no caso contínuo

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em um algum conjunto não enumerável do plano euclidiano.

Definição 2 no caso contínuo

Sendo (X, Y) uma v.a. contínua bidimensional tomando todos os valores em uma região R do plano euclidiano. A função distribuição de probabilidade conjunta irá satisfazer:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_R \int_R f(x, y) dxdy = 1$ se $f(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \overline{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$

Definição: Função Distribuição de Probabilidade

Caso Contínuo

Definição 1 no caso contínuo

(X, Y) será um vetor aleatório bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em um algum conjunto não enumerável do plano euclidiano.

Definição 2 no caso contínuo

Sendo (X, Y) uma v.a. contínua bidimensional tomando todos os valores em uma região R do plano euclidiano. A função distribuição de probabilidade conjunta irá satisfazer:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_R \int_R f(x, y) dxdy = 1$ se $f(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \overline{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$

Definição: Probabilidade de um Evento

Probabilidade de um Evento

Para um evento B em $R_X Y$ tem-se:

- $P\{[X(\omega), Y(\omega)] \in B\} = P\{\omega | [X(\omega), Y(\omega)] \in B\}$
- Para o caso discreto:
  $P(B) = \sum \sum_B p(x_i, y_j)$
- Para o caso contínuo
  $P(B) = \int \int_B f(x, y) dxdy$

$f(x, y)$ não representa a probabilidade!

Definição: Probabilidade de um Evento

Probabilidade de um Evento

Para um evento B em $R_X Y$ tem-se:

- $P\{[X(\omega), Y(\omega)] \in B\} = P\{\omega | [X(\omega), Y(\omega)] \in B\}$
- Para o caso discreto: $P(B) = \sum \sum_B p(x_i, y_j)$
- Para o caso contínuo $P(B) = \int \int_B f(x, y) dx dy$

$f(x, y)$ não representa a probabilidade!

Definição: Probabilidade de um Evento

Probabilidade de um Evento

Para um evento B em $R_X Y$ tem-se:

- $P\{[X(\omega), Y(\omega)] \in B\} = P\{\omega | [X(\omega), Y(\omega)] \in B\}$
- Para o caso discreto:
  $P(B) = \sum \sum_B p(x_i, y_j)$
- Para o caso contínuo
  $P(B) = \int \int_B f(x, y) dxdy$

$f(x, y)$ não representa a probabilidade!

Definição: Probabilidade de um Evento

Probabilidade de um Evento

Para um evento B em $R_X Y$ tem-se:

- $P\{[X(\omega), Y(\omega)] \in B\} = P\{\omega | [X(\omega), Y(\omega)] \in B\}$
- Para o caso discreto:
  $P(B) = \sum \sum_B p(x_i, y_j)$
- Para o caso contínuo
  $P(B) = \int \int_B f(x, y) dxdy$

$f(x, y)$ não representa a probabilidade!

Função Distribuição Acumulada

Definição

A função distribuição acumulada, F, da v.a. bidimensional (X,Y) é definida por:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Observe que:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Distribuição de Probabilidade Marginal: Caso Discreto

- Dada a v.a. bidimensional (X, Y) podemos estar interessados em X ou em Y individualmente

Para o caso discreto

A Função Distribuição de Probabilidade Marginal de X será:
$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X = x_i, Y = y_2 \text{ ou } \ldots)$
$\therefore$
$p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j) \rightarrow p$ é a Função Distribuição Marginal de X.

De forma análoga derivamos para Y.

Distribuição de Probabilidade Marginal: Caso Discreto

- Dada a v.a. bidimensional (X, Y) podemos estar interessados em X ou em Y individualmente

Para o caso discreto

A Função Distribuição de Probabilidade Marginal de X será:
$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X = x_i, Y = y_2 \text{ ou } \dots)$
$\therefore$
$p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j) \rightarrow p$ é a Função Distribuição Marginal de X.

De forma análoga derivamos para Y.

Distribuição de Probabilidade Marginal: Caso Contínuo

Para o caso contínuo

A Função densidade de Probabilidade Marginal de X será:

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

A fdp marginal de Y será:

$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

Exemplo: $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$
$= \int_c^d g(x)dx$

Função Distribuição Uniformemente Distribuída em R

Definição

Se a v.a. bidimensional (X, Y) contínua é uniformemente distribuída sobre uma região R, então:

$f(x, y) = c^{\underline{te}}$ para $(x, y) \in R$
$f(x, y) = 0$ caso contrário

Como:
$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$
$c^{\underline{te}} = \frac{1}{Area(R)} = f(x, y)$ para $(x, y) \in R$

Distribuições Conjunta e Condicional

Conceitos

- A distribuição conjunta representa a probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos. Por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B.
- A distribuição condicional representa a probabilidade de ocorrência de um evento dado que um outro ocorre. Por exemplo: a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu.
- Ou seja, mostra o efeito que a informação sobre uma variável tem sobre a distribuição da outra.

Distribuições Conjunta e Condicional

Conceitos

- A distribuição conjunta representa a probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos. Por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B.
- A distribuição condicional representa a probabilidade de ocorrência de um evento dado que um outro ocorre. Por exemplo: a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu.
- Ou seja, mostra o efeito que a informação sobre uma variável tem sobre a distribuição da outra.

Distribuições Conjunta e Condicional

Conceitos

- A distribuição conjunta representa a probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos. Por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B.
- A distribuição condicional representa a probabilidade de ocorrência de um evento dado que um outro ocorre. Por exemplo: a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu.
- Ou seja, mostra o efeito que a informação sobre uma variável tem sobre a distribuição da outra.

Distribuições Condicional

Para o caso discreto

V.a. discreta

Seja a v.a. bidimensional (X, Y) discreta com fdp conjunta p. A Função Distribuição de Probabilidade de X condicional a $Y = y_j$, será:

$$p(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{q(y_j)} \text{ para } q(y_j) > 0$$

Observe que:

$$p(x_i|y_j) \geq 0$$
$$\sum_i p(x_i|y_j) = 1$$

Distribuições Condicional

V.a. contínua

Para o caso contínuo

Seja a v.a. bidimensional (X, Y) contínua com fdp conjunta f. A Função Densidade de Probabilidade de X condicional a $Y = y_j$, será:

$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$ para $h(y) > 0$

De forma análoga:

$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$ para $g(x) > 0$

Distribuições Condicional

V.a. contínua

Observe que:

1. $g(x|y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{h(y)}dx =$

   $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{d}x = \frac{h(y)}{h(y)}$

Distribuições Condicional

V.a. contínua

Observe que:

1. $g(x|y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{h(y)} dx =$

   $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{d} x = \frac{h(y)}{h(y)}$

Idéia e o caso discreto

- Saber o resultado de uma v.a. X não influencia o resultado de outra v.a. Y

Definição: caso discreto

Para uma v.a. bidimensional discreta (X, Y), x e Y são independentes se:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$$

De outra forma:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)} = \frac{p(x_i)q(y_j)}{q(y_j)} = p(x_i)$$

Idéia e o caso discreto

- Saber o resultado de uma v.a. X não influencia o resultado de outra v.a. Y

Definição: caso discreto

Para uma v.a. bidimensional discreta (X, Y), x e Y são independentes se:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$$

De outra forma:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{q(y_j)} = \frac{p(x_i)q(y_j)}{q(y_j)} = p(x_i)$$

Caso contínuo

Definição: caso contínuo

Para uma v.a. bidimensional contínua (X, Y), x e Y são independentes se:

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

De outra forma:

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{q(x)h(y)}{h(y)} = g(x)$$

Caso contínuo

Teorema

Se (X, Y), for uma v.a.bidimensional e A e B dois eventos quaisquer que dependam de x e Y, respectivamente. Então, se x e Y forem independentes $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Prova:

$P(A \cap B) = \int \int_{A \cap B} f(x, y) dxdy = \int \int_{A \cap B} g(x)h(y) dxdy =$
$P(A \cap B) = \int_A g(x)dx \int_B h(y)dy = P(A)P(B)$

ANPEC, 2004 - exercício 15

Suponha uma fdp conjunta da v.a. bidimensional (X, Y), sendo:
$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}$ para $0 < x < 1, 0 < y < 2$
$f(x, y) = 0$ caso contrário

Calcule a $P(X < Y)$

- *Resposta*
- R: $P(X < Y) = \int_0^1 \int_0^x x^2 + \frac{xy}{3} dydx = \int_0^1 [x^2y + \frac{xy^2}{3}]_0^x dx$
  $P(X < Y) = \int_0^1 [x^3 + \frac{x^3}{6}]dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24}]_0^1 =$
  $P(X < Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$

ANPEC, 2004 - exercício 15

Suponha uma fdp conjunta da v.a. bidimensional (X, Y), sendo:
$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}$ para $0 < x < 1, 0 < y < 2$
$f(x, y) = 0$ caso contrário

Calcule a $P(X < Y)$

- *Resposta*
- R: $P(X < Y) = \int_0^1 \int_0^x x^2 + \frac{xy}{3} dydx = \int_0^1 [x^2y + \frac{xy^2}{3}]_0^x dx$
  $P(X < Y) = \int_0^1 [x^3 + \frac{x^3}{6}]dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24}]_0^1 =$
  $P(X < Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$