**Introdução à Probabilidade e Estatística I** **Exercícios para revisão e autoteste

Parte 1: Probabilidade e Variáveis Aleatórias

PROVA DE 2002 – QUESTÃO 1**

Considere o espaço amostral S, os eventos A e B referentes a S e a medida de probabilidade P.

Ⓞ Se P(A) = , P(B) = , e A e B são mutuamente exclusivos, então P(AB) =.

① Se A B, então P(A|B)  P(A).

② Se P(A) = , P(B) =  e P(AB) = , então P(AC  BC) = , em que AC e BC indicam os eventos complementares.

③ Se  representam uma partição de um espaço amostral S, então para A ⊂ S tem-se que , 

④ Se P(A|B) = 0 então A e B são independentes.
**PROVA DE 2002 – QUESTÃO 3**

Considere um investidor cuja composição da carteira é formada por dois ativos A e B.

Ⓞ Se os retornos esperados de A e B são iguais a 10% e 5%, e as participações de A e B na carteira são de 40% e 60%, respectivamente, então o retorno esperado da carteira é de 7,5%.

① Supondo-se que os retornos dos dois ativos referidos no quesito anterior sejam independentes e que suas variâncias sejam iguais a 10 e 20, respectivamente, então a variância da carteira será igual a 8,8.

② Supondo-se que os retornos de A e B tenham a mesma variância, a diversificação dessa carteira nestes dois ativos somente reduzirá o risco total se o coeficiente de correlação entre os respectivos retornos for negativo.

③ No caso de correlação negativa perfeita, se a variância de A é duas vezes a variância de B, então é preciso investir duas vezes mais em A para eliminar o risco da carteira.

## ④ Se existir uma correlação negativa perfeita entre os retornos dos ativos A e B, haverá uma particular composição desses ativos que eliminará completamente o risco da carteira.

## PROVA DE 2003 – QUESTÃO 3

## O custo *X* de produção de certo bem é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade



É correto afirmar que:

Ⓞ o valor de *k* é 63;

① o custo médio do produto é aproximadamente 1,04;

② o custo é menor do que 2 com probabilidade 1/9;

③ a variância do custo do produto é aproximadamente 3,04;

④ o custo é maior do que 3 com probabilidade 8/9.

## PROVA DE 2004 – QUESTÃO 3

Sobre coeficiente de correlação, covariância e independência de variáveis aleatórias, são corretas as afirmativas:

Ⓞ Seja o coeficiente de correlação entre as variáveis x e y. Se *ab*>0, então ; e se *ab*<0, .

① Se a função densidade conjunta de x e y for, x > 0, y > 0 e  para outros valores de x e y, então = 0.

② Sejam A e B dois eventos independentes, com probabilidades positivas, associados a um experimento aleatório ε. Se as variáveis aleatórias x e y são definidas como: x = 1, se ocorrer A e x = 0, em caso contrário; e y = 1, se ocorrer B e y = 0, em caso contrário, então 0.

③ Em relação ao quesito anterior, pode-se afirmar ainda que a covariância entre x e y é diferente de zero.

④ Se o coeficiente de correlação = 0, a covariância entre x e y também é zero. Assim sendo, pode-se afirmar que x e y são variáveis aleatórias independentes.

**PROVA DE 2004 – QUESTÃO 5**

Uma variável aleatória continua x tem a sua função densidade de probabilidade dada pelo gráfico:

 K1

K2

 1 1

São corretas as afirmativas:

Ⓞ O valor da constante *K*1 não poderá ser maior do que 1.

① O valor da constante *K*2 será igual a (*K*1+2)/2*K*1.

② A função densidade de probabilidade de *x* será 

③ A função de distribuição acumulada de *x* será 

④ Supondo que *K*2 =1, a esperança matemática de *x*, E(*x*), será 1/3.

 **PROVA DE 2006 – QUESTÃO 3**

Julgue as afirmativas. Em uma função densidade de probabilidade conjunta *f(x,y)*, para as variáveis aleatórias contínuas X e Y:

Ⓞ A função densidade de probabilidade marginal de *X* é: .

① Se F(y) é a função distribuição de probabilidade marginal de Y, então f(y) = dF(y)/dy, para F(y) derivável em todo o y.

② X e Y serão independentes se f(x) = f(x | y).

③ EX[E(Y | x ) ] = E[Y]

④ Se X e Y são independentes, VY[E(X | y ) ] = V[X].

**PROVA DE 2007 – QUESTÃO 1**

Sejam *X*, *Y* e *Z* três variáveis aleatórias. Julgue as proposições:

Ⓞ E(E(*Y* | *X*)) = E(*X*).

① Se *Y* = *cX* , então Var(*Y*) = *c*2 Var(*X*).

② Var (*X* + *Y*) = Var(*X*) + Var(*Y*) + 2Cov(*X*,*Y*).

③ Se *Z* = *X* 2 + *Y*, então E(*Z*|*X*) = 0.

④ Se *Z* = *X* 2 + *Y*, então E(*ZX*) = 0.

**PROVA DE 2008 – QUESTÃO 1**Julgue as afirmativas que se seguem. Se *X* e *Y* são duas variáveis aleatórias,

Ⓞ V(*Y* | *X*) = E(*Y* 2| *X*) - [E(*Y* | *X*)] 2.

① Se E(*Y*) = E(*X*) = E(*YX*) = 0, então E(*Y* | *X*) = 0.

② V(*Y*) > V(*Y* | *X*) se Y e X forem linearmente dependentes.

③ Se E(*Y* | *X*) = *b*0 + *b*1*X*, então E(*Y*) = *b*0.

④ Se E(*Y* | *X*) = *b*0 + *b*1 *X + b*2 *Z* e *Y* = *b*0 + *b*1 *X + b*2 *Z* + *u*, em que *u* é uma variável aleatória, então E(*u*| *X*) = 0.

**PROVA DE 2008 – QUESTÃO 8**Sejam X, Y, Z variáveis aleatórias não negativas. Julgue as afirmativas:

Ⓞ Se X > Y, então, E(X|Z) > E(Y|Z).

① (cov(X,Y))2 ≤ var(X)var(Y).

② Se Z = X + Y, então, corr(Z,X) = corr(Y,X).

③ Se W1 e W2 são variáveis aleatórias Bernoulli, independentes, com P(W1) = P(W2) = *p*, Z é

uma variável aleatória com distribuição Binomial em que Z = W1 + W2.
④ Se *F(Y) = 1- e-y*, *y* ≥ *0*, P(Y > 3|Y > 1) = P(Y > 2).
 **PROVA DE 2009 – QUESTÃO 2**
*Sobre Teoria das Probabilidades indique as alternativas corretas e falsas:*

Ⓞ *Sejam 3 eventos A, B e C. Então, podemos demonstrar que*

*P(A|B)=P(C|B)P(A|B∩C)+P(C |B)P(A|B∩C ), assumindo que todos os eventos tem probabilidade positiva.*

① *Se dois eventos A e B são independentes, os eventos A e B não serão necessariamente independentes.*

② *Se A, B e C são três eventos tais que A e B são disjuntos, A e C são independentes e B e C são independentes e supondo-se que
4P(A) = 2 P(B) = P(C) e P(A∪B∪C)=5P(A), pode-se dizer que P(A) = 1/6.*

③ *Se uma família tem exatamente n crianças (n ≥ 2) e assumindo-se que a probabilidade de que qualquer criança seja uma menina é igual a ½ e todos os nascimentos são independentes, pode-se afirmar que dado que a família tem no mínimo uma menina, a probabilidade da mesma ter no mínimo um menino é igual a (1–(0,5)n-1)/ (1–(0,5)n).*④ *Se A, B e C são eventos com probabilidade não nula, definidos em um espaço amostral S, então P(A∩C|B∩C)=P(A∩B|C)/P(B|C).*
**PROVA DE 2010 – QUESTÃO 3**
Sobre a Teoria das Probabilidades e considerando A, B e C três eventos

quaisquer, mas com probabilidades de ocorrência diferentes de zero, indique

as alternativas corretas e falsas:

Ⓞ P(A|B) / P(B|A) = P(A)/P(B) ;

① Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos e exaustivos, eles são

independentes;

② P(A B C) = P(A B) + P(C) se A, B e C são independentes;

③ Probabilidade é uma função que relaciona elementos do espaço de

eventos a valores no intervalo fechado entre zero e um;

④ P(A B C) ≤ P(A)+P(B)+P(C), com desigualdade estrita se, e somente se, os eventos forem independentes.

**PROVA DE 2011 – QUESTÃO 7**Considere a seguinte função de densidade conjunta de duas variáveis aleatórias contínuas X e Y dada por



Ⓞ Para que  satisfaça as propriedades de uma função de densidade conjunta, k=6.

① A densidade marginal de Y é dada por .

② A densidade de Y, condicional em X=2, é igual a .

③ X e Y são variáveis aleatórias não correlacionadas.

④ A variância de Y, condicional em X=2, é igual a 1/9.

**PROVA DE 2011 – QUESTÃO 9**A variável aleatória discreta X assume apenas os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 5. A função densidade de probabilidade de X é dada por







E[ . ] e V[ . ] denotam, respectivamente, esperança e variância. Julgue as seguintes afirmativas:

Ⓞ Para que a função densidade de probabilidade seja válida, *a* = 1/4 e *b* = 1/8.

① E[X] = 3.

② V[X] = 12.

③ Defina Z = 3 + 4X. Então a covariância entre Z e X é igual a 12.

④ A probabilidade de que a soma de duas variáveis independentes provenientes desta distribuição exceda 7 é 1/8.

**Parte 2: Distribuições de Probabilidade**

**PROVA DE 2002 – QUESTÃO 8**Em relação às distribuições de probabilidade contínuas:

Ⓞ Se X tem distribuição Normal(), então a função densidade de probabilidade de X, f(x), atinge o seu valor máximo quando x = e nesse ponto .

① Se X tem distribuição Uniforme no intervalo [0,], >0, então, tem que ser igual a 4/3 para que P(X > 1) = 1/3.

② A distribuição t de Student assemelha-se à Normal padrão, N(0,1), mas possui caudas mais pesadas, quando n, o tamanho da amostra, é maior do que 30.

③ Se uma variável aleatória contínua tem função de distribuição



então a função densidade de probabilidade de X será



④ A variável aleatória Z tem distribuição Lognormal se e somente se exp (Z) tiver distribuição Normal.

**PROVA DE 2003 – QUESTÃO 4**

Com relação à variáveis aleatórias discretas é correto afirmar que:

Ⓞ se *X*1, ..., *Xn* são variáveis aleatórias identicamente distribuídas com distribuição Bernoulli com parâmetro *p*, então  terá uma distribuição Poisson quando *n* for grande;

① uma variável aleatória com distribuição binomial representa o número de sucessos em *n* experimentos de Bernoulli;

② a distribuição hipergeométrica é um caso especial da distribuição Normal;

③ a distribuição Qui-quadrado possui média igual a n e variância igual a 4n, em que n é o número de graus de liberdade;

④ a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição de Poisson para valores grandes de *n* (tamanho da amostra) e pequenos de *p* (probabilidade de sucesso).

**PROVA DE 2005 – QUESTÃO 2**
O retorno de uma carteira de investimentos com duas ações **A** e **B** e um papel de renda fixa **F** é dado por , em que *a1, a2* e *a3*  são constantes. *RA* e *RB* são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média zero, variância 1 e covariância 0,5 e *RF* é uma constante igual a 0,1. Julgue as afirmativas:

Ⓞ A média do retorno da carteira será igual a zero se, e somente se, a correlação entre os retornos das ações A e B for nula.

① A média do retorno da carteira é: .

② Se a covariância entre o retorno das ações A e B for 0,5, a variância do retorno da carteira será .

③ O retorno  é uma variável aleatória normalmente distribuída com média .

④ O coeficiente de correlação entre *RA* e *RB* é 0,25.

**PROVA DE 2006 – QUESTÃO 2**

São corretas as afirmativas:

Ⓞ Seja *Y* uma variável aleatória com distribuição Binomial com parâmetros *n* e *p*, em que . Então, sendo *n* grande e *p* pequeno, a distribuição de *Y* aproxima-se de uma Poisson cuja média é *np*.

① Se *Y* é uma variável aleatória Normal com média 0 e variância 1; se *X* segue uma Qui-quadrado com *r* graus de liberdade; e se *Y* são *X* independentes, então segue uma distribuição *t* com *r* graus de liberdade.

② Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias distribuídas segundo uma Normal bivariada. Suponha que *E*(*X*) = *X*, *E*(*Y*) = *Y*, ,  e que a correlação entre *X* e *Y* seja *XY*. Então, *Z* = *aX* + *bY*, em que *a* e *b* são constantes diferentes de 0, segue uma distribuição Normal com média *aX + bY + abX Y* e variância *a2X2 + b2Y2 + 2abXY* .

③ Sejam *Y* e *X* variáveis aleatórias com distribuições Qui-quadrado com *p* e *q* graus de liberdade, respectivamente. Portanto,  segue uma distribuição *F* com *p* e *q* graus de liberdade.

④ Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas segundo uma Normal bivariada. Suponha que *E*(*X*) = *X*, *E*(*Y*) = *Y*, , e que a correlação entre *X* e *Y* seja *XY*. Então, *E(Y|X) = Y + XY (x – X)*.

**PROVA DE 2011 – QUESTÃO 6**

Sejam X1, X2,...,Xn variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas, com média 0 e variância σ².

Ⓞ Se σ = 1, a variável Y = (+)/(2) possui uma distribuição F com n1 e n2 graus de liberdade, para n1 = 1 e n2 = 2.

① A variável  possui uma distribuição t com 2 graus de liberdade.

② Defina Z = (+) /σ². Então E(Z - 2)³ = 0.

③ Suponha que σ = 1 e que H seja uma variável aleatória independente de X1 e que P(H = 1) = P(H = -1) = 0,5. Então Y = HX1 ~ N(0,1).

④ Sabemos que Pr(Z>5165,615)=0,05, onde Z é uma variável aleatória com distribuição . Suponha que n = 5001. Defina  e . Se S² = 5,3, pode-se rejeitar a hipótese nula de que σ² = 5 ao nível de significância de 5%.

**Gabarito

Parte 1

PROVA DE 2002 – QUESTÃO 1**Ⓞ F
① F
② V
③ V
④ F

**PROVA DE 2002 – QUESTÃO 3**Ⓞ F
① V
② F
③ F
④ V

**PROVA DE 2003 – QUESTÃO 3**Ⓞ F
① F
② V
③ F
④ F

**PROVA DE 2004 – QUESTÃO 3**Ⓞ V
① V
② F
③ F
④ F

**PROVA DE 2004 – QUESTÃO 5**Ⓞ F
① V
② V
③ F
④ F

**PROVA DE 2006 – QUESTÃO 3**Ⓞ F
① V
② V
③ V
④ F

**PROVA DE 2007 – QUESTÃO 1**Ⓞ F
① V
② V
③ F
④ F

**PROVA DE 2008 – QUESTÃO 1**Ⓞ V
① F
② V
③ F
④ F

**PROVA DE 2008 – QUESTÃO 8**Ⓞ F
① V
② F
③ V
④ V

**PROVA DE 2009 – QUESTÃO 2**Ⓞ V
① F
② V
③ V
④ V

**PROVA DE 2010 – QUESTÃO 3**Ⓞ V
① F
② F
③ V
④ F

**PROVA DE 2011 – QUESTÃO 7**Ⓞ V
① F
② Anulada
③ V
④ F
 **PROVA DE 2011 – QUESTÃO 9**Ⓞ F
① V
② F
③ V
④ F

**Parte 2**

**PROVA DE 2002 – QUESTÃO 8**Ⓞ V
① F
② F
③ V
④ F

**PROVA DE 2003 – QUESTÃO 4**Ⓞ F
① V
② F
③ F
④ V

 **PROVA DE 2005 – QUESTÃO 2**Ⓞ F
① F
② V
③ V
④ F

**PROVA DE 2006 – QUESTÃO 2**Ⓞ V
① V
② F
③ F
④ F

**PROVA DE 2011 – QUESTÃO 6**

Ⓞ F
① F
② F
③ V
④ V