**Introdução à Probabilidade e Estatística I
Exercícios para revisão e autoteste**“Probabilidade – Um curso moderno com aplicações”; Sheldon Ross

 **PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

1.** Uma apostadora joga simultaneamente uma moeda e um dado honestos. Se a moeda der cara, ela então ganha o dobro do valor que aparecer no dado; se der coroa, ela ganha a metade. Determine seus ganhos esperados.

**2.** Tem-se apostas independentes, cada uma delas resultando em uma igual probabilidade de que o apostador ganhe ou perca 1 unidade. Suponha que W represente o ganho líquido de um apostador cuja estratégia consiste em parar de apostar logo após a sua primeira vitória. Determine:
a) P(W>0)
b) P(W<0)
c) E(W)

**3.** Se X e Y tem função densidade conjunta
fX,Y(x,y)=
determine:
a) E(XY)
b) E(X)
c) E(Y)

**4.** Um dado honesto é rolado 10 vezes. Calcule a soma esperada das 10 rodadas.

**5.** Suponha que A e B escolham aleatória e independentemente 3 objetos em um conjunto de 10. Determine o número esperado de objetos:
a) escolhidos simultaneamente por A e B;
b) não escolhidos nem por A nem por B;
c) escolhidos exatamente por um de A ou B.

**6.** *N* pessoas chegam separadamente em um jantar de negócios. Ao chegar, cada pessoa olha para ver se tem amigos entre aqueles presentes. Aquela pessoa então se senta ou na mesa de um amigo, ou em uma mesa desocupada casa nenhuma das pessoas presentes seja seu amigo. Supondo que cada um dos pares de pessoas seja, independentemente um par de amigos com probabilidade p, determine o número esperado de mesas ocupadas.

**7.** Um total de *n* bolas numeradas de 1 a n é colocado em *n* urnas (também numeradas de 1 a n), de forma tal que a bola *i* tenha igual probabilidade de ir para qualquer urna 1,2,...,i. Determine:
a) o número esperado de urnas vazias;
b) a probabilidade de que nenhuma das urnas esteja vazia.

**8.** Alinha-se aleatoriamente um grupo de n homens e n mulheres.
a) Determine o número esperado de homens que tem uma mulher ao seu lado;
b) Repita a letra (a), mas agora supondo que o grupo esteja sentado aleatoriamente em uma mesa redonda.

**9.** Seja Z uma variável aleatória normal e, para um x fixo, considere

X=

Mostre que E(X) = e-x²/2.

**10.** Certa região é habitada por r tipos distintos de certa espécie de inseto. Cada inseto capturado será, independentemente dos tipos capturados anteriormente, do tipo i com probabilidade
Pi,i=1,...,r ; .

a) Calcule o número médio esperado de insetos capturados antes da captura de um inseto do tipo 1.
b) Calcule o número médio esperado de tipo de insetos que são capturados antes da captura de um inseto do tipo i

**11.** Quantas vezes você espera rolar um dado honesto até que todos os 6 lados tenham aparecido pelo menos uma vez?

**12.** Se X e Y são independentes e identicamente distribuídos com média µ e variância σ², determine:
E[(X – Y)²].

**13.** Se E(X)=1 e Var(X)=5, determine
a) E[(X+2)²]
b) Var(4+3X)

**14.** Se 10 casais se sentam em uma mesa redunda, compute o número esperado e a variância do número de esposas que se sentam ao lado de seus maridos.

**15.** A função densidade conjunta de X e Y é dada por

f(x,y) = e-(y+x/y) , x > 0 , y > 0.

Determine E(X), E(Y) e mostre que Cov(X,Y) = 1.
 **16.** A função densidade conjunta de x e Y é dada por

f(x,y) = , 0 < x < ∞ , 0 < y < ∞.

Calcule E(X²|Y=y).

**17.** Uma população é formada por r subgrupos disjuntos. Suponha que pi represente a proporção da população que esta no subgrupo i, i=1,...,r. Se o peso médio dos membros do subgrupo é wi,i=1,...,r, qual é o peso médio dos membros da população?

**18.** Uma urna contém 30 bolas, das quais 10 são vermelhas e 8 são azuis. Doze bolas são sorteadas dessa urna. Suponha que X represente o número de bolas azuis sorteadas. Determine Cov(X,Y)
a) definindo variáveis indicadoras (isto é, de Bernoulli) apropriadas
Xi, Yj tais que X = e Y = ;
b) condicionando ( em X ou Y) para determinar E(XY).

**19.** O número de acidentes que uma pessoa sofre em um ano é uma variável aleatória de Poisson com média ʎ. Entretanto, suponha que o valor de ʎ mude de pessoa para pessoa, sendo igual a 2 em 60% da população e 3 nos 40% restantes. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela sofra (a) 0 acidentes e (b) exatamente 3 acidentes em um ano? Qual é a probabilidade condicional de que ela sofra 3 acidentes em certo ano, dado que não tenha sofrido acidentes no ano anterior?

**20.** Repita o exercício anterior, para quando a proporção da população com valor de ʎ menor que *x* é igual a 1 – e-x.

**21.** Vendas semanais sucessivas, em unidades de milhares de reais, possuem uma distribuição normal bivariada, com média 40, desvio padrão 6 e correlação 0,6.
a) Determine a probabilidade de que o total de vendas das próximas duas semanas seja superior a 90.
b) Se a correlação fosse de 0,2, isso aumentará ou diminuirá a resposta da letra (a)?
c) Reputa a letra (a) para uma correlação de 0,2.

**22.** Mostre que a esperança E[(X-a)²] é otimizada quando a =E(X).

**23.** Nos estudos, notamos que

 E[] = ,

onde Xi são variáveis aleatórias não negativas. Como uma integral é um limite de somas, pode-se esperar que

E[] = .

sempre que as variáveis aleatórias X(t), 0≤t<∞, forem não negativas; e este resultado é realmente verdadeiro. Utilize-o para dar outra demonstração para o resultado que mostra que, para uma variável aleatória não negativa de X,

E(X) = .

**24.** Mostre que, se X e Y são identicamente distribuídos e não necessariamente independentes, então Cov(X+Y, X-Y)=0.

**25.** Mostre que, se X e Y são independentes, então
E[X|Y=y] = E[X] para todo y
a) no caso discreto;
b) no caso contínuo.

**26.** Mostre que, para variáveis aleatórias X e Z,

E[(X-Y)²]= E[X²] - E[Y²], onde Y=E[X|Z].

**27.** Mostre como calcular Cov(X,Y), a partir da função geratriz de momentos conjunta de X e Y.

**28.** Suponha que Y seja uma variável aleatória normal com média µ e variância σ², e também que a distribuição condicional de X dado Y=y seja normal com média y e variância 1.
a) Mostre que a distribuição conjunta de X,Y é igual aquela de Y+Z,Y, quando Z é uma variável aleatória normal padrão independente de Y.
b) Use o resultado da letra (a) para mostrar que X e Y possuem uma distribuição normal bivariada.
c) Determine E(X), Var(X) e Corr(X,Y).
d) Determine E[Y|X=x].
e) Qual é a distribuição condicional de Y dado que X=x?

**SOLUÇÕES**

1. 52,5/12.

2. a) 1/2
 b) 1/4
 c) 0

3. 1/6, 1/4 e 1/2.

4. 35.

5. a) 0,9
 b) 4,9
 c) 4,2.

7. a)
 b)

9. E(X) = e-y²/2dy e-x²/2

11. 1+ 6/5 + 6/4 + 6/3 + 6/2 + 6

12. E[(X – Y)²] = Var(X – Y)= Var(X) + Var(-Y) = 2σ².

13.a) 14
 b) 45

14. a) 2/19
 b) Var = 10. 2/19 (1 – 2/19) + 10.9[2/19.2/18 – (2/19)²]

15. E(X)=E(Y)= 1
 Como E(XY)=E[E(EXY|Y)]=E[YE(X|Y)]=E(Y²)=2. Então, Cov(X,Y) =2-1 = 1.

16. 2y².

17. ipi.

18. -96/145.

21. a) 0,15
 b) Diminuiria, pois a probabilidade é menor com a correlação de 0,2, porque a média normal de X1 + X2 é menor do que 90, e a probabilidade de que ela exceda 90 aumenta com o aumento da variância de X1 + X2.
 c) 0,141.

26. Devemos mostrar que E(Y²)=E(XY). Então,
 E(XY) = E[XE(X|Z)]
 = E{E[XE(X|Z)|Z]}
 =E[E²(X|Z)]= E(Y²)

28. a) Isso acontece pois a distribuição condicional de Y + Z, dado que Y= y é normal com média y e variância 1, o que é o mesmo que a distribuição condicional de X dado que Y = y.
 b) Como Y + Z e Y são ambos combinações lineares das variáveis aleatórias normais e independentes Y e Z, então temos que Y + Z tem uma distribuição normal bivariada.
 c) E(X) = E(Y + Z) = µ;
Var(X)= Var(Y + Z) = Var(Z) + Var(Y) = σ² + 1
р =

 d) E[Y|X=x] = µ + ( x - µ)

 e) A distribuição é normal, com a média demonstrada acima e variância .