**Introdução à Probabilidade e Estatística I
Exercícios para revisão e autoteste**“Probabilidade – Um curso moderno com aplicações”; Sheldon Ross

 **VARIÁVEL ALEATÓRIA CONJUNTAMENTE DISTRIBUÍDA

1.** Dois dados honestos são rolados. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y quando:
a) X é o maior valor obtido em um dado e Y é a soma dos valores;
b) X é o valor do primeiro dado e Y é o maior dos dois valores;
c) X é o menor e Y é o maior valor obtido com os dados.

**2.** Suponha que 3 bolas sejam sorteadas sem reposição de uma urna consistindo em 5 bolas brancas e 8 bolas vermelhas. Considere Yi=1 quando a i-ésima bola selecionada seja branca e Yi=0 caso contrário. Determine a função de probabilidade conjunta de:
a)Y1,Y2;
b) Y1,Y2,Y3.**3.** Repita o problema anterior quando a bola selecionada é recolocada na urna antes da próxima seleção

**4.** Considere uma sequência de tentativas de Bernoulli independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p. Sejam X1, o número de fracassos precedendo o primeiro sucesso e X2 o número de fracassos entre os dois primeiros sucessos. Determine a função de probabilidade conjunta de X1 e X2.
 **5.** A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por
f(x,y)= c(y²-x²)e-y ; -y < x < y ; 0 < y < ∞.

a) Determine c;b) Determine as densidades marginais de X e Y;
c) Determine E(X).

**6.** A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por
f(x,y)= (x²+ ) ; 0<x<1 ; 0<y<2.
a) Verifique se esta de fato é uma função densidade conjunta.
b) Calcule a função de densidade de X.
c) Determine P(X>Y).
d) Determine P(Y>X <
e) Determine E(X).
f) Determine E(Y).

**7.** A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por
f(x,y)= e-(x+y) ; 0 ≤ x < ∞ ; 0 ≤ y < ∞.
Determine:
a) P(X < Y)
b) P(X < a)

**8.** O proprietário de uma loja de televisores imagina que 45% dos clientes que entram em sua loja comprarão um televisor comum, 15% comprarão um televisor de plasma e 40% estarão apenas dando uma olhada. Se 5 clientes entrarem nesta loja em um dia, qual é a probabilidade de que ele venda exatamente 2 televisores comuns e 1 de plasma naquele mesmo dia?

**9.** O número de pessoas que entram em uma farmácia em certo horário é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro ʎ=10. Calcule a probabilidade condicional de que no máximo 3 homens tenham entrado na loja dado que 10 mulheres entraram naquele momento. Que hipótese você adotou?

**10.** Um homem e uma mulher combinam um encontro em certo lugar às 12:30. Se o homem chega em um horário uniformemente distribuído entre 12:15 e 12:45, e se a mulher chega independentemente entre 12:00 e 13:00, determine a probabilidade de que o primeiro a chegar não espere mais de 5 minutos. Qual é a probabilidade de que o homem chegue primeiro?

**11.** O vetor aleatório (X,Y), é chamado de uniformemente distribuído em uma região R do plano se, para alguma constante c, sua densidade conjunta é

f(x,y)=

a) Mostre que 1/c = área da região R. Suponha que (X,Y) seja uniformemente distribuído ao longo do quadrado centrado em (0,0) e com lados de comprimento 2.
b) Mostre que X e Y são independentes, com cada um sendo distribuído ao longo de (-1,1).
c) Qual é a probabilidade de que (X,Y) esteja contido no circulo de raio 1 centrado na origem? Isto é, determine P(X² + Y² ≤ 1).

**12.** Três pontos X1, X2,X3 são selecionados aleatoriamente em uma linha L. Qual é a probabilidade de que X1 esteja entre X2 e X3 ?

**13.** Mostre que f(x,y)=1/x ; 0 < y < x < 1 é uma função densidade conjunta. Supondo que f seja a função densidade conjunta de X,Y, determine
a) a densidade marginal de Y;
b) a densidade marginal de X;
c) E(X);
d) E(Y).

**14.** A densidade conjunta de X e Y é dada por

f(x,y)= .

X e Y são independentes? E se, em vez disso, f(x,y) fosse dada por

f(x,y)= .

X e Y seriam independentes?

**15.** Considere uma sequência de tentativas independentes, cada uma delas com probabilidade de sucesso *p*. Dado que o *k-ésimo* sucesso ocorre na tentativa *n*, mostre que todos os resultados possíveis das primeiras *n -1* tentativas que consistem em *k-1* sucessos e *n-k* fracassos são igualmente prováveis.

**16.** Suponha que Xi, i=1,2,3 sejam variáveis aleatórias com distribuição de Poisson. Determine a sua função de probabilidade conjunta. Isso é, obtenha P(X= n, Y=m).

**17.** Sejam X1, X2 e X3  variáveis aleatórias contínuas independentes e identicamente distribuídas. Calcule:
a) P(X1> X2| X1> X3)
b) P(X1> X2| X1< X3)
c) P(X1> X2| X2 > X3)
d) P(X1> X2| X2 < X3)

**18.** Suponha que U represente uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo (0,1). Calcule a distribuição condicional de U dado que
a) U > a;
b) U < a.

**19.** Se X é exponencial com taxa *ʎ*, determine *P { [X] = n , X – [X] ≤ x }*, onde *[x]* é definido como o maior inteiro menor ou igual a *x*. Pode-se concluir que *[X]* e *X – [X]* são independentes?

**20.** Suponha que *X1,...,Xn* sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição *F* e densidade *f*. A grandeza *M= (X1+Xn)/2* definida como a média do menor e do maior valor, é chamada de alcance central da sequência. Mostre que sua função distribuição é:
FM(m) = n .

**SOLUÇÕES**

2. a) p(0,0) = 14/39
 p(0,1) = 10/39
 p(0,1) = 5/39
 b) p(0,0,0) = 28/143
 p(0,0,1) = 70/429
 p(0,1,1) = 40/429
 p(1,1,1) = 5/143

3. a) p(0,0) = (8/13)²
 p(0,1) = (5/13)(8/13)
 p(0,1) = (5/13)²
 b) p(0,0,0) = (8/13)³
 p(I,j,k)= (8/13)²(5/13) se i+j+k=1 ou (8/13)(5/13)² se i+j+k=2

5. c=1/8;
fy(y)= e-y, 0 < y < ∞;
fx(x) = ¼ e-|X|(1 +|X|).

6. b) fx(x)= 6/7 (2x² + x)
 c) P(X>Y) = 15/36
 d) P(Y>X < =

7. a) P(X < Y) = 1/2
 b) P(X < a) = 1- e-a

8. (0,45)²(0,15)(0,40)²

9. e-5 + 5 e-5 + (5²/2!) e-5 + (5³/3!)e-5]

11. a) Sendo A(R) a área da região R, temos 1 = = c A(R);
 b) f(x,y) = f(x)f(y)= ¼, -1 < x,y < 1;
 c) π/4.

12. 1/3, já que cada ponto é o do meio com igual probabilidade.

13.a) = -ln(y), 0 < y < 1

 b) = 1, 0 < y < 1
 c) 1/2
 d) 1/4.

14. No primeiro caso sim, no segundo não.

16. P(X= n, Y=m) = (X= n, Y=m| X2=i) P(X2=i)
 = e-(ʎ1+ ʎ2 + ʎ3)ʎ1n-i ʎ3m-i ʎ2i] / [(n-1)!(m-i)!i!]

17.a) 2/3
 b) 1/3
 c) 1/3
 d) 2/3

19. Sim, são independentes.