**Introdução à Probabilidade e Estatística I
Exercícios para revisão e autoteste**“Probabilidade – Um curso moderno com aplicações”; Sheldon Ross

 **VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

1.** Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade
f(x)=
a) Qual o valor de *c*?
b) qual é a função distribuição cumulativa de X?

**2.** Considere a função
f(x)=
a)Poderia *f* ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine *C*.
b) Repita considerando que a função f(x) seja dada por
f(x)=

**3.** A função densidade de probabilidade de X, que representa a vida útil de certo tipo de equipamento eletrônico é dada por
f(x)=
a) Determine P(X>20)
b) Qual é a função distribuição cumulativa de X?
c) Qual é a probabilidade de que, de 6 componentes como esse, pelo menos 3 funcionem por pelo menos 15 horas? Que suposições você está fazendo?

**4.** Calcule E(X) se X tem uma função densidade dada por:
a)f(x)=

b) f(x)=

c) f(x)=

**5.** A função densidade de X é dada por
f(x)=

Se E(X)=3/5, determine *a* e *b.*
**6.** Um ponto é escolhido aleatoriamente em um segmento de reta de comprimento L. Interprete este anunciado e determine a probabilidade de que a relação entre o segmento mais curto e o mais longo seja de ¼.

**7.** Trens em direção ao destino A chegam na estação em intervalos de 15 minutos a partir das 7:00 da manhã, enquanto trens em direção ao destino B chegam à estação em intervalos de 15 minutos começando às 7:05.
a) Se certo passageiro chega a estação em um horário uniformemente distribuído entre 7:00 e 8:00 e pega o primeiro trem que chega, em que proporção de tempo ele vai para o destino A?
b) E se o passageiro chegar em um horário uniformemente distribuído entre 7:10 e 8:10 da manhã?

**8.** Se X é uma variável aleatória normal com parâmetros µ=10 e σ²=36, calcule:
a) P(X>5)
b) P(4<X<16)
c) P(X<8)
d) P(X<20)
e) P(X>16)

**9.** Suponha que X seja uma variável aleatória normal com média 0,5. Se P(X>9)=0,2, qual é o valor de Var(X), aproximadamente?

**10.** O tempo de vida útil de componentes de computador produzidos por certo fabricante de semicondutores é normalmente distribuído com parâmetros µ=1,4.106 horas e σ=3.105 horas. Qual é a probabilidade aproximada de que um lote com 100 componentes contenha pelo menos 20 componentes cujos tempos de vida útil sejam menores que 1,8.106 horas?

**11.** Cada item produzido por certo fabricante é, independentemente, de qualidade aceitável com probabilidade 0,95. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que mais de 10 dos próximos 150 itens fabricados sejam inaceitáveis.

**12.** Em 10.000 jogadas independentes de uma moeda, observou-se que deu cara 5800 vezes. É razoável supor que essa moeda não seja honesta? Explique.

**13.** Doze por cento da população são de canhotos. Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de que existam pelo menos 20 canhotos em uma escola de 200 alunos. Enuncie as suas hipóteses.

**14.** Um modelo para o movimento de uma ação supõe que, se o preço atual da ação é *s*, então, após certo período, ele será *us* com probabilidade *p*, ou *ds* com probabilidade *1-p*. Supondo que movimentos sucessivos sejam independentes, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que o preço da ação esteja em alta pelo menos 30% do tempo ao longo dos próximos 1000 períodos se u=1,012, d=0,990 e p=0,52.

**15.** O tempo, em horas, necessário para a manutenção de uma máquina é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com ʎ=1/2. Qual é
a) a probabilidade de que um reparo dure mais do que 2 horas?
b) a probabilidade condicional de que o tempo de reparo dure pelo menos 10 horas, dado que a sua duração é superior a 9 horas?

**16.** Se a variável aleatória X é uniformemente distribuída ao longo do intervalo (-1,1), determine:
a) P(|X|>1/2);
b) a função densidade da variável aleatória |X|.

**17.** Se a variável aleatória Y é uniformemente distribuída ao longo do intervalo (0,5), qual é a probabilidade de que as raízes da equação 4x²+ 4xY + Y + 2 = 0 sejam ambas reais?

**18.** Se X é uma variável aleatória exponencial com parâmetro ʎ=1, calcule a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y definida como Y=log x.

**19.** Se X é uniformemente distribuída ao longo do intervalo (0,1), determine a função densidade de Y=ex.

**20.** Determine a distribuição de *R = A.senθ*, onde *A* é uma constate fixa e *θ* é uma variável aleatória uniformemente distribuída em (-π/2,π/2). A variável aleatória *R* surge da teoria da balística. Se um projetil é disparado de sua origem com um ângulo *α* em relação à superfície da terra com uma velocidade *v*, então o ponto *R* no qual ele retorna a terra pode ser escrito como *R=(v²/g)sen2α*, onde *g* é a aceleração da gravidade que é igual a 9,8m/s².

**21.** Mostre que:

E(Y) = - .

**22.** Seja f(x) a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória normal com média µ e variância σ². Mostre que µ-σ e µ+σ são pontos de inflexão dessa função.

**23.** Seja Z uma variável aleatória normal padrão Z e g uma função derivável com derivada g’.
a) Mostre que E[g’(Z)]=E[Zg(Z)]
b) Mostre que E[Zn+1]=nE[Zn-1]
c) Calcule E[Z4].

**SOLUÇÕES**

1. a) c=3/4
 b) F(x) = ¾(x - - + ), -1 < x < 1

2. Não, pois f(5/2) < 0.

3. a) ½
 b) F(y)= dx = 1- , y > 10. Para y < 10, F(y)=0.
 c) i 6-I desde que (15)= 10/15. Assumindo eventos independentes.

4. a) E(X) = 4
 b) E(X) = 0
 c) E(X) = ∞.

5. a = 3/5 e b =6/5.

6. 2/5.

7. a) 2/3.
 b) mesma resposta que a).

8.a) 0,7977
 b) 0,6827
 c) 0,3695
 d) 0,9522
 e) 0,1587

9. σ = 4,76, e assim a variância é aproximadamente 22,66.

11. 0,86.

12. Não é razoável. P(Z>15,99) é desprezível.

13. 0,8363.

14. 0,9993.

15. a) e-1
 b) e-1/2

16.a) 1/2
 b) P (|X|) ≤ a) = P(-a ≤ X≤ a) = a, 0 < a < 1. Portanto, f|X|(a)= 1, 0 < a < 1. |X| é uniforme em (0,1).

17. 3/5.

18. fY(y)= fX(ey)ey =

19. fY(y) = fX(log y) 1/y = 1/y, 1< y < e.