

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

Programa de Educação Tutorial

Variáveis Aleatórias Discretas

por

José Carlos Oliveira da Silva

&

Joelson da Cruz Campos

Natal

2007

Sumário

1	Variáveis Aleatórias Discretas	1
2	Algumas Densidades Importantes	4
2.1	A densidade de Poisson	4
2.2	Densidade Geométrica	5
2.3	Densidade Hipergeométrica	7
3	Distribuição de Variáveis Aleatórias Discretas	8
3.1	Vetores Aleatórios Discretos	10
3.2	Variáveis Aleatórias Independentes	12
	Referências Bibliográficas	15

Capítulo 1

Variáveis Aleatórias Discretas

Sempre que realizamos um experimento aleatório nos preocupamos em observar características numéricas ocorrentes nessa realização. Por exemplo: Quando lançamos uma moeda honesta, podemos estar interessados em observar se a face voltada para cima é cara ou coroa. Dessa forma, se definirmos X como sendo “a ocorrência de cara no lançamento”, podemos intuitivamente, observar que a ocorrência de X é aleatória, ou seja, não é manipulada.

A esse característico numérico damos, intuitivamente, o nome de variável aleatória discreta. Cujas definições formais são as seguintes:

Definição 1: Uma variável aleatória discreta, é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, cuja imagem é um subconjunto enumerável do conjunto dos números reais e tal que o conjunto $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$ é um evento para todo i .

Exemplo 1: Dois jogadores A e B estão participando da seguinte aposta: “um deles lança uma moeda, honesta, três vezes para cima, se o resultado obtido em cada lançamento for cara (c), o jogador A ganha um real. Se for coroa (k), paga um real. Suponha que estejamos torcendo pelo jogador A . Dessa forma só vai nos interessar a quantidade final do jogador A .

Representando por X a quantidade de A no fim do jogo, vemos que X é uma variável aleatória discreta.

Para verificarmos basta observar que os possíveis resultados desse experimento são: $\{(c, c, c); (c, c, k); (c, k, c); (k, c, c); (c, k, k); (k, c, k); (k, k, c); (k, k, k)\}$, dessa forma temos, $\Omega = \{(c, c, c); (c, c, k); (c, k, c); (k, c, c); (c, k, k); (k, c, k); (k, k, c); (k, k, k)\}$. Notamos que os possíveis valores de X são $(-3, -1, 1, 3)$ e que o conjunto $\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}$ é evento, uma vez que ocorrendo (c, c, c) temos $X(c, c, c) = 3$, (c, c, k) temos $X(c, c, k) = 1$, (k, k, c) temos $X(k, k, c) = -1$ e assim por diante.

Dessa forma, podemos descrever esse experimento por meio de uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada evento $w \in \Omega$ associa $X(w) = x_i$.

Já sabemos que uma variável aleatória discreta é um característico numérico que sempre aparece na realização de um experimento, mas ainda não sabemos qual a probabilidade dela ocorrer em certo experimento.

Com o objetivo de sabermos a probabilidade da variável aleatória discreta X assumir um dado valor real num certo experimento, iremos definir, a seguir, a densidade de uma variável aleatória discreta X em um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, pois essa definição nos dará o que estamos procurando.

Definição 2: Chama-se função densidade de uma variável aleatória discreta X a uma função real definida por $f(x) = P(X = x) = P(w \in \Omega : X(w) = x)$ e que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $f(x) \geq 0$;
- (ii) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x_1, x_2, \dots\}$;
- (iii) $\sum_i f(x_i) = 1$.

Exemplo 2: Consideremos novamente o experimento do lançamento da moeda visto no exemplo anterior.

a) A probabilidade do jogador A ganhar três reais no fim do jogo é dada por:

$f(3) = P(X = 3) = P(w \in \Omega : X(w) = 3) = P(\{c, c, c\}) = \frac{1}{8}$. Já que vimos no exemplo anterior que a moeda é honesta.

b) $f(1) = P(X = 1) = P(w \in \Omega : X(w) = 1) = P(\{c, c, k\}; \{c, k, c\}; \{k, c, c\}) = \frac{3}{8}$.

Capítulo 2

Algumas Densidades Importantes

Apresentaremos agora algumas densidade que serão de grande importância para o nosso estudo posterior. Começaremos a falar sobre a

2.1 A densidade de Poisson

A densidade Poisson é uma função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{Para outros valores de } x. \end{cases}$$

Para chegarmos a essa expressão basta seguirmos os mesmos procedimentos apresentados no trabalho “Construção do processo de Poisson”.

Para verificarmos que $f(x)$ é uma densidade, basta verificar que as condições (i), (ii) e (iii).

Observe que as condições (i) e (ii) são imediatamente satisfeitas, uma vez que $f(x)$ é uma probabilidade e o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$.

Para verificarmos que (iii) é verdadeira, basta lembrarmos da expansão da função exponencial em *série de Taylor*.

Dessa forma, veremos que $e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$, daí

$$e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Multiplicando essa expressão por $e^{-\lambda}$, temos:

$$e^\lambda e^{-\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$$

Dessa forma, acabamos de mostrar que $\sum_i f(x_i) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$.

Outra densidade importante é a

2.2 Densidade Geométrica

Seja $0 < p < 1$. Chamamos de Densidade Geométrica a uma função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{Para outros valores de } x. \end{cases}$$

Essa densidade é utilizada para descrevermos experimentos do tipo sucesso, fracasso, ou seja, se considerarmos um lançamento de uma moeda e atribuirmos o valor p a probabilidade de sucesso e consequentemente $1 - p$ a probabilidade de fracasso. Observamos que $(1-p)(1-p)(1-p) \dots (1-p)$, x -vezes, representa a probabilidade de fracasso obtido em x jogadas consecutivas e p representa a probabilidade de sucesso numa determinada jogada. Assim, a densidade $f(x)$ nos dar a probabilidade de obtermos o primeiro sucesso na $(x+1)$ - ésima jogada.

Para verificarmos que $f(x)$ é realmente uma densidade, vamos verificar as três condições da definição.

Observamos que (i) e (ii) são diretamente satisfeitas, ou seja (i) vem do fato de $f(x)$ ser uma probabilidade e (ii) segue do fato que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$.

A condição (iii) está ligada com a convergência da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots$, que trazendo para o nosso problema, temos:

$$\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x, \text{ onde } a = 1 \text{ e } r = 1-p.$$

Como $\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots$ e $0 < p < 1$, temos $|1-p| < 1$. Logo, pelo teorema da convergência da série geométrica, nossa série converge. Além disso, converge para $\frac{a}{1-r}$. Como em nosso problema $a = 1$ e $r = 1-p$, temos que $\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x$ converge para $\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$.

$$\text{Logo, } \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{p}.$$

Multiplicando ambos os membros dessa expressão por p , temos:

$$p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = p \frac{1}{p} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = 1.$$

Assim, podemos verificar a condição (iii), ou seja, $\sum_i f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = 1$. Portanto, $f(x)$ é realmente uma densidade.

Outra densidade importante é a

2.3 Densidade Hipergeométrica

A densidade Hipergeométrica é uma função que nos dar a probabilidade de uma variável aleatória discreta X assumir um determinado valor numa amostra de tamanho n , retirada de uma população de r objetos, sendo estes de dois tipos, ou seja, tipo r_1 e tipo r_2 .

Dessa forma, dada uma população de r objetos, onde r_1 são de um tipo e $r_2 = r - r_1$ do outro tipo, temos, que a retirada, nessa população de r objetos, de uma amostra de tamanho n , $n < r_1$ e $n < r_2$. Vemos que essa retirada pode ser feita de $\binom{r}{n}$ modos.

Assim, definindo X como sendo a quantidade de objetos do primeiro tipo na amostra. Vamos calcular a probabilidade dessa quantidade assumir um dado valor real x , ou seja, $P(X = x)$.

Para isso, basta observar que, na amostra de tamanho n temos $\binom{r_1}{x}$ formas de escolhermos x objetos do primeiro tipo e $\binom{r - r_1}{n - x}$ formas de escolhermos $n - x$ objetos do segundo tipo.

$$\text{Dessa forma, } P(X = x) = \frac{\binom{r_1}{x} \binom{r - r_1}{n - x}}{\binom{r}{n}}.$$

Assim, a *Densidade Hipergeométrica* é uma função real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r_1}{x} \binom{r - r_1}{n - x}}{\binom{r}{n}}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{Para outros valores de } x. \end{cases}$$

Capítulo 3

Distribuição de Variáveis Aleatórias Discretas

Como vimos até agora sempre trabalhamos com intuito de determinar $P(X = x)$, porém frequentemente surge a necessidade de se determinar a probabilidade $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ com mais de um ponto. Agora devido a essa necessidade vamos tentar estabelecer um método para determinar a probabilidade da variável aleatória $X \in A$, onde como já sabemos A é um subconjunto dos reais com mais de um ponto, vamos denotar essa probabilidade da seguinte forma $P(X \in A)$.

Seja f a densidade de X , podemos determinar $P(X \in A)$ através da densidade de f por meio da seguinte expressão

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x_i)$$

Isso pelo fato os $\{\omega | X(\omega) \in A\}$ é o mesmo que $\bigcup_{x_i \in A} \{\omega | X(\omega) = x_i\}$, onde $i = 1, 2, \dots$, porém os $\{\omega | X(\omega) = x_i\}$ com i variando em $\mathbb{Z}_+^*$ são disjuntos, ou seja, a probabilidade da união é a soma das probabilidades o que implica na expressão a qual havíamos comentado. Definição: Chama-se função de distribuição da variável aleatória X ou da

densidade f a função $F(t)$, $-\infty < t < \infty$, definida por

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} f(x)$$

Como sequência imediata da definição temos que probabilidade de uma variável aleatória X pertencer a um intervalo semi aberto $(a, b]$ é dado através da seguinte expressão

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Demonstração:

$$[X \leq a] \cup [a < X \leq b] = [X \leq b]$$

$$P(X \leq a) + P(a < X \leq b) = P(X \leq b)$$

logo, temos que

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

E se X é uma variável aleatória inteira, então

$$F(t) = \sum_{x=-\infty}^{[t]} f(x)$$

onde $[t]$ representa o maior inteiro menor ou igual a t exemplo $[2, 6] = [2] = 2$. logo podemos perceber que f é uma função não decrescente e que para qualquer inteiro x , F dá um salto de magnitude $f(x)$ no ponto x e F é constante no intervalo $[x, x + 1]$.

Exemplo: Seja $S = 1, 2, \dots, 10$ e seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída em S . Então $f(x) = 1/10$ para $x = 1, 2, \dots, 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x . A função distribuição de X é dada por $F(t) = 0$ para $t < 1$, $F(t) = 1$ para $t > 10$ e

$$F(t) = \sum_{x=1}^{[t]} f(x) = \frac{[t]}{10}, 1 \leq t \leq 10$$

logo se desejarmos calcular $P(3 < x \leq 5)$ usando o resultado obtido temos que

$$P(3 < X \leq 5) = F(5) - F(3) = 5/10 - 3/10 = 2/10$$

e se quisermos calcular a probabilidade dessa variável aleatória X assumir um valor no intervalo $[3, 5]$, ou seja, $P(3 \leq X \leq 5)$ como sabemos que nesse caso X é uma variável aleatória que assume valores inteiros podemos reescrever $P(3 \leq X \leq 5)$ como sendo $P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 5/10 - 2/10 = 3/10$ utilizando o método que sabemos.

3.1 Vetores Aleatórios Discretos

Acontece frequentemente de estarmos interessados em estudar a relação entre duas ou mais variáveis aleatórias, por exemplo numa extração de uma amostra aleatória de tamanho de n de uma caixa contendo r bolas, numeradas de 1 a r , poderíamos desejar saber qual o número mais alto Y ou o número mais baixo Z observados entre as bolas selecionadas. Seja um espaço probabilidade com r variáveis aleatórias discretas $X_1, X_2, \dots, X_r$ definidas nesse espaço. Então para cada ponto $w \in \Omega$ cada uma das variáveis aleatórias assumem um dos seus possíveis valores, os quais denotaremos da seguinte forma

$$X_1(w) = x_1, X_2(w) = x_2, \dots, X_r(w) = x_r$$

Em vez de pensar em observar r números reais $x_1, x_2, \dots, x_r$ podemos pensar em uma r -tupla $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ onde para cada i , x_i é um dentre o número finito ou infinito enumerável de valores que a variável aleatória X_i pode assumir. Seja R^r a coleção de todas as r -tuplas de números reais um ponto $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ de R^r é habitualmente chamado de vetor r -dimensional. Assim, para cada $\omega \in \Omega$, os valores $X_1(\omega), \dots, X_r(\omega)$ definem um ponto. Definição: Um vetor aleatório r -dimensional X é uma função $X : \Omega \rightarrow R$ assumindo um finito ou infinito enumerável de valores $x_1, x_2, \dots, x_r$ tais que $\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ é um evento para todo i . E a função de densidade f fica definida da seguinte forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_r = x_r)$$

ou equivalentemente

$$f(x) = P(X = x), \text{ onde } x \in R^r$$

E também pode-se determinar a probabilidade de que X pertença a uma subconjunto A de R^r da maneira como fazíamos

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

No caso unidimensional para que uma função seja função densidade discreta, ela deveria ter as seguintes propriedades

$$i) f(x) \geq 0, x \in R^r.$$

ii) $\{x : f(x) \neq 0\}$ é um subconjunto finito ou infinito enumerável de R^r , que será representado por $\{x_1, x_2, \dots\}$.

$$iii) \sum_i f(x_i) = 1$$

Essas propriedades se estendem também para R^r , ou seja, qualquer função real f definida em R^r que possua estas três propriedades, será chamada de função densidade discreta r-dimensional. Obs: Essa função densidade discreta r-dimensional f é habitualmente chamada de função densidade conjunta das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_r$. A função de densidade da variável aleatória X_i é chamada de i-ésima densidade marginal de X ou de f . Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas: para quaisquer números reais x e y , conjunto $\{\omega | X(\omega) = x \text{ e } Y(\omega) = y\}$ é um evento, que será representado por $\{X = x, Y = y\}$. Suponha que os valores possíveis distintos de X sejam $x_1, x_2, \dots$ e os de Y sejam $y_1, y_2, \dots$ para cada x os eventos $\{X = x, Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, são disjuntos e sua união é o evento $\{X = x\}$ logo,

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P\left(\bigcup_j \{X = x, Y = y_j\}\right) = \sum_j P(X = x, Y = y_j) = \sum_y P(X = x, Y = y) \\ &\Rightarrow P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

Analogamente segue que,

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

Exemplo: Suponha que X e Y são duas variáveis aleatórias que assumem os valores x e y , onde $x = 1, 2$ e $y = 1, 2, 3, 4$ com as probabilidades dadas na tabela abaixo.

$x \setminus y$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/4	1/8

Então $f_X(1) = \sum_{y=1}^4 f(1, y) = 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1/2$, e $f_X(2) = 1 - f_X(1) = 1/2$ de modo que X tem distribuição uniforme sobre 1 e 2. Analogamente

$$f_Y(1) = 1/4 + 1/16 = 5/16, f_Y(2) = 3/16, f_Y(3) = 5/16, f_Y(4) = 3/16$$

3.2 Variáveis Aleatórias Independentes

Considere o experimento lançar uma moeda e um dado. De forma intuitiva acreditamos que o resultado do lançamento da moeda, qualquer que seja ele, não deve influenciar no resultado do dado e vice e versa. Agora vamos construir um modelo de probabilidade que reflita essas idéias. Seja X uma variável aleatória que assume 0 ou 1 dependendo do lançamento moeda resultar cara ou coroa $\{X = 1\}$ representa cara $\{X = 0\}$ representa coroa da mesma maneira podemos utilizar a variável aleatória Y que nos dará

1, 2, 3, 4, 5, 6 dependendo se o número voltado para cima é 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 então $\{X = x\}$ e $\{Y = y\}$ devem ser independentes assim o vetor aleatório (X, Y) deve ter densidade conjunta $f(x, y)$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x)P(Y = y), & X = 0, 1, Y = 1, 2, \dots, 6; \\ 0, & \text{para outros valores de } X \text{ e } Y. \end{cases}$$

Em outras palavras, a densidade conjunta f de X e Y deve ser dada por

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$$

Definição

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ r variáveis aleatórias discretas tendo as densidades $f_1, f_2, \dots, f_r$ respectivamente. Diz-se que estas variáveis aleatórias são mutuamente independentes se a função densidade conjunta f é dada por $f(x_1, x_2, \dots, x_r) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_r(x_r)$

Considere duas variáveis aleatórias independentes com densidades f_x e f_y , respectivamente então para dois conjuntos quaisquer A e B de R .

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} P(X \in A, Y \in B) &= P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \\ &= P([\bigcup_{x \in A} \{X = x\}] \cap [(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\})]) \\ &= P(\bigcup_{y \in B} [\{Y = y\} \cap (\bigcup_{x \in A} \{X = x\})]) \\ &= \sum_{y \in B} P[\{Y = y\} \cap (\bigcup_{x \in A} \{X = x\})] \\ &= \sum_{y \in B} P(\bigcup_{x \in A} [\{X = x\} \cap \{Y = y\}]) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} P[\{X = x\} \cap \{Y = y\}] \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} P[X = x, Y = y] \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} f_{x,y}(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} f_x(x) f_y(y) \\
 &= \sum_{y \in B} f_y(y) \sum_{x \in A} f_x(x) \\
 &\quad \sum_{y \in B} P(Y = y) \sum_{x \in A} P(X = x) \\
 &= P\left(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) P\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right) \\
 &\quad = P(Y \in B) P(X \in A)
 \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] MSA MATH JOURNAL; Vol III; Número 1, Spring 1992; Pag. 43–50.
- [2] AGES, Elon Lima. *Meu professor de matemática*; Coleção do professor de matemática; 4º ed.; RJ.; SBM editora.
- [3] OLCE, Osvaldo; POMPEO, J. Nicolau. *Geometria espacial posição e métrica*; Fundamentos da matemática elementar; Vol. 10. 5º ed.; Editora Atual; São Paulo; 1994.