**Introdução à Probabilidade e Estatística I
Exercícios para revisão e autoteste**“Probabilidade – Um curso moderno com aplicações”; Sheldon Ross

**PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

1.** Considere 3 urnas. A urna *A* contém 2 bolas brancas e 4 bolas vermelhas, a urna *B* contém 8 bolas brancas e 4 bolas vermelhas, e a urna *C* contém 1 bola branca e 4 bolas vermelhas. Se 1 bola é selecionada de cada urna, qual é a probabilidade de que a bola escolhida da urna A seja branca dado que exatamente 2 bolas brancas tenham sido selecionadas?

**2.** Um total de 46% dos eleitores de uma certa cidade classifica a si mesmo como petista, enquanto 30% se classificam como tucano e 24% se classificam como democratas. Em uma eleição local recente, 35% dos petistas, 62% dos tucanos e 58% dos democratas votaram. Um eleitor é escolhido aleatoriamente. Dado que essa pessoa tenha votado na eleição local, qual é a probabilidade de que ela seja:
a) petista?
b) tucana?
c) democrata?
d) Que fração dos eleitores participou da eleição local?

**3.** Há 15 bolas de tênis em uma caixa, das quais 9 nunca foram usadas anteriormente. Três das bolas são escolhidas aleatoriamente, utilizadas em uma partida e então devolvidas para a caixa. Mais tarde, outras três bolas são retiradas aleatoriamente da caixa. Determine a probabilidade de que nenhuma dessas bolas tenha sido usada.

**4.** Uma família tem *j* crianças com a probabilidade pj, onde p1=0,1,p2=0,25,p3=0,35,p4=0,3. Uma criança dessa família é escolhida aleatoriamente. Dado que ela é a primogênita, determine a probabilidade condicional de que a família tenha:
a) apenas 1 criança;
b) 4 crianças.
Repita o exercício, tendo como a criança selecionada aleatoriamente a caçula.

**5.** Em dias chuvosos, Joe chega atrasado ao trabalho com a probabilidade 0,3; em dias não chuvosos, ele chega atrasado com a probabilidade 0,1. Com a probabilidade 0,7, choverá amanhã.
a) Determine a probabilidade chegar cedo amanhã.
b) Dado que Joe tenha chegado cedo, qual a probabilidade condicional de que tenha chovido?

**6.** A urna A tem 5 bolas brancas 7 bolas pretas. A urna B tem 3 bolas brancas e 12 bolas pretas. Jogamos uma moeda honesta; se dar cara, retiramos uma bola da urna A. Se der coroa, retiramos uma bola da urna B. Suponha que uma bola branca seja selecionada. Qual é a probabilidade de que tenha dado coroa na moeda?

**7.** Cada um de dois criados-mudos com aparência idêntica tem duas gavetas. O criado-mudo A contém uma moeda de prata em cada gaveta, e o criado-mudo B contém uma moeda de prata em uma de suas gavetas e uma moeda de ouro na outra. Um criado-mudo é selecionado aleatoriamente, uma de suas gavetas é aberta e uma moeda de prata é encontrada. Qual é a probabilidade de que exista uma moeda de prata na outra gaveta?

**8.** Se você tivesse que construir um modelo matemático para os eventos E e F descritos nas letras (a) até (e) a seguir, você os consideraria eventos independentes? Explique seu raciocínio.
a) E é o evento em que uma mulher de negócios tem olhos azuis, F é o evento em que sua secretaria tem olhos azuis.
b) E é o evento em que um professor tem um carro, F é o evento em que seu nome está na lista telefônica.
c) E é o evento em que um homem tem menos de 1,80m de altura, F pe o evento em que ele pesa mais de 90kg.
d) E é o evento em que uma mulher vive nos EUA, F é o evento em que ela vive no hemisfério ocidental.
e) E é o evento em que choverá amanhã, F é o evento em que choverá depois de amanhã.

**9.** Uma questão de verdadeiro ou falso é colocada para um time formado por marido e sua esposa em um jogo de perguntas e respostas. Tanto o homem quanto a mulher darão, de forma independente, a resposta correta com probabilidade *p*. Qual das estratégias seguintes é a melhor para o casal?
a) Escolher um deles e deixar que a pessoa escolhida responda a questão.
b) Ambos pensaram na questão e darem a resposta comum se estiverem de acordo, ou então, se não estiverem de acordo, jogar uma moeda para determinar que resposta devem dar.

**10.** No problema anterior, se p=0,6 e o casal usar a estratégia da letra b, qual é a probabilidade condicional de que o casal dê a resposta correta dado que o marido e sua esposa:
a) estejam de acordo;
b) não estejam de acordo?

**11.** A e B se alternam no lançamento de um par de dados, parando quando A obtém uma soma igual a 9, ou quando B obtém uma soma igual a 6. Supondo que A role o dado primeiro, determine a probabilidade em que a ultima rodada seja feita por A.

**12.** Em jogadas sucessivas de um par de dados honestos, qual a probabilidade de que saiam 2 setes antes de 6 números pares?
Obs: estamos olhando o valor da soma dos dados.

**13.** *A* e *B* lançam moedas. *A* começa e continua a jogar a moeda até que dê coroa, instante no qual *B* também começa a jogar a moeda até que dê coroa. Em seguida, *A* assume novamente o jogo e assim por diante. Suponha que P1 seja a probabilidade de dar cara com *A* jogando a moeda e P2 a probabilidade de dar cara com *B* jogando a moeda. O vencedor da partida será o primeiro a obter:
a) uma sequência de 2 caras;
b) um total de 2 caras;
c) uma sequência de 3 caras;
d) um total de 3 caras.
Em cada caso, determine a probabilidade de A vencer a partida.

**14.** Um réu julgado por três juízes é declarado culpado se pelo menos 2 juízes o condenarem. Suponha que, se o réu for de fato culpado, cada juiz terá a probabilidade de 0,7 de condená-lo, de forma independente. Por outro lado, se o réu for de fato inocente, essa probabilidade cai para 0,2. Se 70% dos réus são culpados, calcule a probabilidade condicional de o juiz número 3 condenar o réu dado que:
a) os juízes 1 e 2 também o tenham condenado;
b) um dos juízes 1 e 2 o tenha considerado culpado, e o outro inocente;
c) os juízes 1 e 2 o tenham considerado inocente.
Suponha que Ei, *i*=1,2,3 represente o evento em que o juiz *i* considera o réu culpado. Esses eventos são independentes ou condicionalmente independentes? Explique.

**15.** Seja A [⊂](http://pt.wiktionary.org/w/index.php?title=%E2%8A%82&action=edit&redlink=1) B. Expresse as seguintes probabilibades da forma mais simples possível:
a) P(A|B);
b) P(A|Bc);
c) P(B|A);
d) P(B|Ac).

**16.** Considere uma comunidade escolar com *m* famílias, com *ni* delas possuindo i crianças,
*i*=1,...,k, sendo ( $\sum\_{i=1}^{k}ni$ )= *m*. Considere os dois métodos a seguir para selecionar uma criança:
I- Escolha uma das *m* famílias aleatoriamente e então selecione aleatoriamente uma criança daquela família.
II- Escolha uma das $\sum\_{i=1}^{k}ini$ crianças aleatoriamente.
Mostre que o método I possui maior probabilidade de resultar na escolha de um filho primogênito.

**17.** Considere duas jogadas independentes de uma moeda honesta. Suponha que A seja o evento em que a primeira jogada da cara, B o evento em que a segunda dá cara e C o evento em que ambas as jogadas da moeda caem do mesmo lado.
Mostre que os eventos A, B e C são independentes por pares – isto é, A e B são independentes, A e C são independentes, B e C são independentes – mas não totalmente independentes.

**18.** Em cada uma das n jogadas independentes de uma moeda, obtém-se cara com uma probabilidade p. Quão grande deve ser n para que a probabilidade de se obter pelo menos uma cara seja de no mínimo ½?

**19.** O Problema da Eleição. Em uma eleição, o candidato A recebe n votos e o candidato B recebe m votos, onde n>m. Assumindo que todas as (n+m)/n!m! ordens de votos seham igualmente prováveis, suponha que Pn,m  represente a probabilidade de que A esteja sempre a frente na contagem de votos.
a) Calcule P2,1,P3,1,P3,2,P4,1,P4,2 e P4,3 ;
b) Determine Pn,1 e Pn,2  ;
c) Com base nos resultados obtidos em (a) e (b), faça conjecturas a respeito do valor de Pn,m  ;
d) Deduza uma fórmula recursiva para Pn,m  em termos de Pn-1,m  e Pn,m-1  condicionando em quem recebe o último voto.
e) Use a letra (d) para verificar sua conjectura da letra (c) usando uma prova de indução em n+m.

**20.** Como um modelo simplificado de previsão de tempo, suponha que o tempo amanhã (seco ou úmido) será o mesmo de hoje com probabilidade *p*. Mostre que, se o tempo está seco em 1º de janeiro, então a probabilidade Pn , de que ele esteja seco n dias depois, satisfaz:
Pn = (2p-1)Pn-1 + (1-p) ; n≥1, pois P0=1.
Demonstre que:
Pn = ½ + ½ (2p-1)n ; n≥0.

**21.** Uma sacola contém a bolas brancas e b bolas pretas. Bolas são tiradas da sacola de acordo com o seguinte método:
I- Uma bola é escolhida aleatoriamente e descartada.
II- Escolhe-se em seguida uma segunda bola. Se a sua cor é diferente da bola anterior, ela é recolocada na sacola e o processo é repetido desde o início. Se a sua cor é a mesma, ela é descartada e começamos do passo II. Em outras palavras, bolas são amostradas e descartadas até que uma mudança de cor ocorra, momento no qual a ultima bola é devolvida para a urna e o processo começa de novo. Seja Pa,b a probabilidade da última bola na sacola ser branca. Demonstre que Pa,b = ½.

**SOLUÇÕES**

1. 7/11.

2. a) 0,331
 b) 0,383
 c) 0,286
 d) 48,62%

3. 0,083.

4. a) 0,24.
 b) 0,18.

5. a) 0,76
 b) 49/76

6. P(coroa|branca) = $\frac{\frac{3}{15} \frac{1}{2}}{\frac{3}{15} \frac{1}{2}+ \frac{5}{12} \frac{1}{2}}$ = $\frac{36}{111}$.

7. 2/3.

9. A estratégia a) ganha com probabilidade *p*.
Já para a estratégia b), temos:
P(vencer) = P(vencer|os dois corretos)*p²* + P(vencer|um deles correto)*2p(1-p)* + P(vencer|nenhum correto)*(1-p)²*
= *p² +p(1-p) + 0 = p.*

Então, ambas estratégias tem a mesma chance de sucesso.

10. a) 9/13
 b) 1/2.

11. 9/19.

14. a) 97/142
 b) 15/26
 c) 33/102.

15. a) P(A|B) = $\frac{P(A)}{P(B)}$
 b) P(A|Bc) = 0
 c) P(B|A) = 1
 d) P(B|Ac) = P(BAc)/ P(Ac).

16. Demonstração de $\sum\_{i=1}^{k}in$i $\sum\_{j=1}^{k}n$j/j ≥ $\sum\_{i=1}^{k}n$i $\sum\_{j=1}^{k}n$j.

17. P(A)=P(B)=P(C)=1/2,
 P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4,
 mas P(ABC)=1/4.

18. 1-(1-p)n ≥ ½, ou, n ≥- -$\frac{log⁡(2)}{log⁡(1-p)}$.

19. b) Pn,1 = $\frac{n-1}{n+1}$ e Pn,2 = $\frac{n-2}{n+2}$
 c) Pn,m  = $\frac{n-m}{n+m}$
 d) Pn,m = $\frac{n}{n+m}$ Pn-1,m  +$\frac{m}{n+m}$ Pn,m-1
 e) A conjectura é verdadeira quando n+m=1.
 Para n+m=k+1, temos Pn,m = $\frac{n-m}{n+m}$