

1 Axiomas de Probabilidade

1.1 Espaço amostral e eventos

seja $\mathcal{E}$ um experimento aleatório

Ω = conjunto de **todos** os resultados possíveis de $\mathcal{E}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E}$ lançamento de uma moeda

$$\Omega = \{c, \bar{c}\}$$

2. $\mathcal{E}$ retirada de uma peça de um lote com peças defeituosas e não defeituosas

$$\Omega = \{D, N\}$$

3. $\mathcal{E}$ colocação de 4 antenas em série sendo 2 defeituosas

$$\Omega = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

4. $\mathcal{E}$ retirada de duas peças de um lote com peças defeituosas e não defeituosas

$$\Omega = \{(D, D), (D, N), (N, D), (N, N)\}$$

5. $\mathcal{E}$ final do campeonato paulista entre 4 times: Corinthians, São Paulo, Palmeiras e Santos

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_i \in \{\text{Corinthians, São Paulo, Palmeiras e Santos}\}, x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

6. $\mathcal{E}$ observação do tempo de vida de um circuito integrado

$$\Omega = [0, \infty)$$

7. $\mathcal{E}$ observação do tempo de vida de um paciente submetido a transplante de coração

$$\Omega = [0, \infty)$$

8. $\mathcal{E}$ erro cometido quando medimos a distância percorrida por um carro de F1 em 10 seg

$$\Omega = (-\infty, \infty)$$

Eventos Subconjunto do espaço amostral aos quais queremos atribuir probabilidade

Exemplos

1. $A_1 = \{c\}, B_1 = \{\bar{c}\}$
2. $A_2 = \{D\}, B_2 = \emptyset$
3. $A_3 = \text{"o sistema é funcional"}$
 $B_3 = \text{"a primeira antena é não defeituosa"}$
4. $A_4 = \text{"ambas as peças retiradas são não defeituosas"}$
 $B_4 = \text{"exatamente uma peça retirada é defeituosa"}$
5. $A_5 = [0, 100), B_5 = (50, \infty)$

Propriedades desejadas:

E1 Se A é evento então A^c também é evento.

E2 Ω é um evento

E3 Se $A_1, A_2, \dots$ são eventos então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ também é evento.

Consequências: $\emptyset, \cup A_i$ e $A_1 \cup A_2$ são eventos.

Teoria de conjuntos

$$E \cup F = F \cup E$$

$$E \cap F = F \cap E$$

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$$

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

Diagramas de Venn

Leis de Morgan

$$(\cup_{i=1}^n E_i)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c$$

$$(\cap_{i=1}^n E_i)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c$$

AXIOMAS DE PROBABILIDADE

Axioma 1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1, \forall E \in \mathcal{A}$

Axioma 2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Axioma 3 Se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Propriedades:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ **Prova:** $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$

2. Se $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ são disjuntos

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i).$$

3. $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$

4. Se $E \subset F$ então $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

5. $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

Exemplos:

1. $\mathcal{E}$ lançamento de uma moeda

$$\Omega = \{c, \bar{c}\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{c\}, \{\bar{c}\}, c, \bar{c}\}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\{c\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{\bar{c}\}) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\{c, \bar{c}\}) = 1$$

2. $\mathcal{E}$ colocação de 4 antenas em série sendo 2 defeituosas

$$\Omega = (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6, \forall \omega \in \Omega \text{ e } \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \#(A)/6$$

3. $\mathcal{E}$ observação do tempo de vida de um circuito integrado

$$\Omega = [0, \infty)$$

$\mathcal{A}$ = todos os subconjuntos de $[0, \infty)$ que podem ser obtidos através de operações com intervalos

$$\mathbb{P}([0, x]) = 1 - e^{-x/100}$$

4. $\mathcal{E}$ erro cometido quando medimos a distância percorrida por um carro de F1 em 10 seg

$$\Omega = (-\infty, \infty)$$

$\mathcal{A}$ = todos os subconjuntos de $[0, \infty)$ que podem ser obtidos através de operações com intervalos

$$\mathbb{P}((a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

2 Espaços amostrais equiprováveis

$$\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots, \mathbb{P}(\{N\}) = \frac{1}{N}.$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\#(E)}{N}$$

Exemplos:

1. Se dois dados (um vermelho e o outro verde) são lançados, qual a probabilidade da soma ser 7?
2. Se dois dados (idênticos) são lançados, qual a probabilidade da soma ser 7?
3. Se 3 bolas são retiradas ao acaso de uma urna contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual a probabilidade de que uma bola seja branca e as outras duas sejam pretas?

Supor que as bolas são numeradas $1, 2, \dots, 11$ e $\#(\Omega) = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Todos os resultados são equiprováveis.

- 1a. bola branca e as outras duas pretas: $6 \cdot 5 \cdot 4$
- 1a. bola preta, 2a. bola branca e 3a. bola preta: $5 \cdot 6 \cdot 4$
- 1a. bola preta, 2a. bola preta e 3a. bola branca: $5 \cdot 4 \cdot 6$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{120 + 120 + 120}{990}$$

Outro argumento, sem ordenação das bolas:

$$\begin{aligned} \#(\Omega) &= \binom{11}{3} \\ \mathbb{P}(E) &= \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} \end{aligned}$$

4. Um comitê de 5 pessoas será formado entre os professores da Matemática Aplicada e da Estatística. Se a seleção é feita de forma aleatória entre os $(18+43)$ professores qual a probabilidade de que este comitê contenha 3 professores da MA e 2 professores da Estatística?

$$\frac{\binom{43}{3} \binom{18}{2}}{\binom{61}{5}}$$

5. Uma urna contém n bolas das quais somente uma é vermelha, as outras são brancas. Se k destas bolas forem retiradas uma de cada vez da urna, qual a probabilidade da bola vermelha ser selecionada?

$$\frac{\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = k/n$$

Outra solução :

A_i : a bola vermelha foi retirada na i -ésima seleção

Como cada uma das n bolas tem a mesma probabilidade de ser a bola retirada na i -ésima seleção , temos

$$\mathbb{P}(A_i) = 1/n$$

Portanto, queremos

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) = k/n$$

6. Em um baralho com 52 cartas, se selecionamos 5 cartas ao acaso, qual a probabilidade de termos um "full house"?

Assumimos que todas as $\binom{52}{5}$ retiradas são igualmente prováveis.

Note que temos $\binom{4}{2} \binom{4}{3}$ diferentes combinações de 2 rainhas e 3 reis. Como há 13 diferentes escolhas para um par e depois para cada par outras 12 escolhas para o segundo par, temos que a probabilidade desejada é:

$$\frac{13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}$$

7. Um baralho de 52 cartas é dividido igualmente entre 4 pessoas.

(a) Qual a probabilidade de um dos jogadores receber todas as cartas de espadas?

Há $\binom{52}{13, 13, 13, 13}$ possíveis divisões do baralho entre os 4 jogadores. Há $\binom{39}{13, 13, 13}$ possíveis divisões do baralho entre os 4 jogadores de modo que o jogador 1 receba todas as cartas de espadas. Portanto,

$$\frac{4 \binom{39}{13, 13, 13}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} \approx 6.3 \times 10^{-12}$$

(b) Qual a probabilidade de que cada jogador receba exatamente um ás?

Ponha de lado todos os áses e distribua as 48 cartas entre os jogadores. Depois distribua os áses.

$$\frac{4! \binom{48}{12, 12, 12, 12}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} \approx 0.105$$

8. **O problema dos aniversários:** Se temos n indivíduos presentes em uma sala, qual a probabilidade de que não temos aniversários em comum?

$\mathcal{E}$: perguntar a n pessoas a data de seu aniversário.

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n); x_i = 1, 2, \dots, 365, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad \#(\Omega) = 365^n$$

A = não há repetições do mesmo número na n -upla acima.

$$\#(A) = \frac{365!}{(365 - n)!}$$

e

$$\mathbb{P}(A) = \frac{365!}{(365 - n)!365^n}$$

Portanto, a probabilidade de termos coincidência de aniversários ($\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$) é:

n	10	20	21	22	23	24	25	30	40	50	60
$\mathbb{P}(A^c)$	.129	.411	.444	.476	.507	.538	.569	.706	.891	.970	.994

9. O departamento de pesquisa de uma fábrica de lâmpadas desenvolveu um novo tipo de filamento para aumentar o tempo de vida das lâmpadas.

Para comparar o novo tipo de lâmpada com o antigo, foram fabricada 10 lâmpadas com o novo filamento e dez lâmpadas regulares foram selecionadas e estas foram pareadas, uma nova e uma antiga. Estes 10 pares foram colocados em um testador e foi anotado qual lâmpada queimou primeiro (a nova ou a antiga).

Se o novo processo não é melhor que o antigo, qual a probabilidade que a lâmpada antiga falhe primeiro em pelo menos 9 dos pares?

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{10}); x_i = 0, 1\}, \quad \#(\Omega) = 2^{10}$$

Se o processo não aumenta o tempo de vida das lâmpadas é razoável pensar que todos os eventos unitários são equiprováveis.

$$\begin{aligned} A &= \text{"pelo menos 9 dos testes tiveram como resultado a falha da lâmpada antiga primeiro"} \\ &= \{(0, 0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

$$\#(A) = 11 \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{11}{2^{10}} = \frac{11}{1024} = 0.011$$

Rejeitamos a hipótese de que o novo processo não é melhor que o antigo.