**Introdução à Probabilidade e Estatística I
Exercícios para revisão e autoteste**“Probabilidade – Um curso moderno com aplicações”; Sheldon Ross

**ANÁLISE COMBINATÓRIA**

**1.** De quantas maneiras 3 romances, 2 livros de matemática e um livro de química podem ser arranjados em uma prateleira se:
a) eles puderem ser colocados em qualquer ordem;
b) for necessário que os livros de matemática fiquem juntos e os romances também;
c) for necessário que os romances fiquem juntos, e os demais livros de qualquer maneira.

**2.** Cinco prêmios diferentes (melhor desempenho escolar, melhores qualidades de liderança, e assim por diante) serão dados a estudantes selecionados de uma classe de trinta alunos. Quantos resultados diferentes são possíveis se:
a) um estudante pode receber qualquer número de prêmios;
b) cada estudante puder receber no máximo um prêmio.

**3.** Considere um grupo de vinte pessoas. Se todos cumprimentarem uns aos outros com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos serão dados?

**4.** Um estudante tem que vender 2 livros de uma coleção formada por 6 livros de matemática, 7 de ciências e 4 de economia. Quantas escolhas serão possíveis se
a) ambos livros devem tratar do mesmo assunto;
b) os livros devem tratar de assuntos diferentes.

**5.** Se 8 quadros-negros idênticos forem divididos entre quatro escolas, quantas divisões são possíveis? E se cada escola tiver que receber pelo menos um quadro-negro?

**6.** Um elevador parte do subsolo com 8 pessoas (não incluindo o ascensorista) e as deixa todas juntas ao chegar no último piso, do sexto andar. De quantas maneiras poderia o ascensorista perceber as pessoas deixando o elevador se todas elas parecessem iguais para ele? E se as 8 pessoas correspondessem a 5 homens e 3 mulheres, e o ascensorista pudesse diferenciar um homem de uma mulher?

**7.** Um total de n estudantes está matriculado em um curso de probabilidade. Os resultados dos exames vão listar os nomes dos alunos aprovados em ordem decrescente de notas. Supondo que todas as notas sejam diferentes, quantos resultados serão possíveis?

**8.** Existem $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{r}\right)$ arranjos lineares diferentes de n bolas, das quais r são pretas e n – r brancas. Dê uma explicação combinatória para esse fato.

**9.** Seja Hk(n) o número de vetores Xi,...,Xk para os quais cada Xi é um inteiro positivo satisfazendo 1≤Xi≤n e X1≤X2≤...≤Xk.
a) Sem quaisquer cálculos, mostre que:
H1(n)=n
Hk(n)=$\sum\_{i=1}^{n}[Hk-1(i)]$ ; k > 1.
b) Use a recursão anterior para calcular H3(5)

**10.** De um grupo de 10 pessoas, suponha que queiramos escolher um comitê de k, k ≤ n, das quais uma será designada a presidente.
a) Mantendo o foco primeiro na escolha do comitê e então na do presidente, mostre que há $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)$ escolhas possíveis.
b) Mantendo o foco primeiro na escolha dos momentos do comitê que não serão escolhidos como presidente, mostre que há $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k-1}\right)$(n – k + 1) escolhas possíveis.
c) Mantendo o foco primeiro na escolha do presidente e então na escolha dos demais membros do comitê, mostre que há $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n-1}{k-1}\right)$ escolhas possíveis.
d) Conclua das letras anteriores que $k\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)$ = $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k-1}\right)$(n – k + 1) =n $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n-1}{k-1}\right)$.
e) Use a definição fatorial de $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{m}{r}\right)$ para verificar a identidade mostrada na letra (d).

**SOLUÇÕES**

1. a) 6!
 b) 3!2!3!
 c) 3!4!

2.a) 305
 b) 30.29.28.27.26

3. $\left(\begin{array}{c}20\\2\end{array}\right)$

4. a) $\left(\begin{array}{c}6\\2\end{array}\right)$ + $\left(\begin{array}{c}7\\2\end{array}\right)$ + $\left(\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right)$ = 42 possibilidades
 b) Existem 6.7 escolhas de um livro de matemática e ciências, 6.4 de um de matemática e economia e 7.4 de um de ciências e um de economia. Então, são 94 possibilidades.

5. a) Número de soluções inteiras não negativas de x1 + x2 +x3 +x4 = 8.
Então, a resposta é $\left(\begin{array}{c}11\\3\end{array}\right)$= 165.
 b) Aqui é o número de soluções positivas – a resposta é $\left(\begin{array}{c}7\\3\end{array}\right)$ = 35.

6. a) Número de soluções não negativas de de x1 +...+x6 = 8.
Resposta = $\left(\begin{array}{c}13\\5\end{array}\right)$.
 b) (número de soluções de x1 +...+x6 = 5) x (número de soluções de x1 +...+x6 = 3) =
 $\left(\begin{array}{c}10\\5\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}8\\5\end{array}\right)$.

8. Cada arranjo é determinado pela escolha das *r* posições onde as bolas pretas estarão situadas.

9. a) O número de vetores que tem xk=j é igual ao número de vetores x1≤x2≤...≤xk-1, satisfazendo 1≤xi≤j. Ou seja, o número de vetores é igual a Hk-1(j).
 b) H2(1) = H1(1) = 1
 H2(2) = H1(1) + H1(2) = 3
 H2(3) = H1(1) + H1(2) + H1(3) = 6
 H2(4) = H1(1) + H1(2) + H1(3) + H1(4) = 10
 H2(5) = H1(1) + H1(2) + H1(3) + H1(4) + H1(5) = 15
 H3(5) = H2(1) + H2(2) + H2(3) + H2(4) + H2(5) = 35