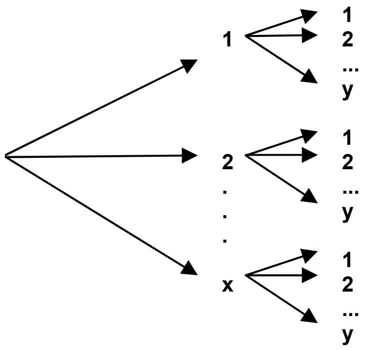
Análise Combinatória

1 – Introdução: Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar **- de uma forma indireta -** o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.
A análise combinatória é usada para a solução de problemas matemáticos envolvendo contagem.

Princípio fundamental da contagem:
Se um experimento pode se realizar em 2 etapas. A primeira com x resultados possíveis e a segunda com y resultados possíveis, o número total dos possíveis resultados do experimento de **x** e **n** será:

Se um experimento pode ser



Exemplos do **PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM**:
No lançamento de 3 moedas, os resultados possíveis serão:
(Ca, Ca, Ca) - (Ca, Ca, Co) - (Ca, Co, Co) - (Co, Co, Co)
(Co, Co, Ca) - (Co, Co, Ca) - (Ca, Co, Ca) - (Co, Ca, Co)

Onde: Ca: Cara
Co: Coroa

2 **- Fatorial**: Seja **n** um número inteiro não negativo. Define-se o fatorial de **n** (indicado pelo símbolo **n!**) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) 4.3.2.1

Lembramos que:
n = 1 , teremos : 1! = 1
n = 0 , teremos : 0! = 1.

Exemplos:
a) 5! = 5.4.3.2.1 = 120
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) 3! = 3.2.1 = 6
d) 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40.320
e) 8! = 8.7.6.5! = 40.320 [336 x 120 = 40.320]

3 – Permutação simples
3.1 – Permutação de **n** objetos é o número de maneiras diferentes que é formado com todos os **n** elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,V,O são possíveis as seguintes permutações: **AVO, AOV**, **VOA, VAO**, **OAV e OVA**.
3 elementos ➔ P3 → 3! = 3 x 2 x 1 = 6.

3.2 - O número total de permutações simples de **n** elementos distintos é dado por **n!,** isto é

$$P_n = n! \text{ onde } n! = n(n-1)(n-2)\ldots .1.$$

Exemplos:
a) P5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120
b) Quantos anagramas nós podemos formar com a palavra FAMEC.
P5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120

3.3 - Denomina-se **ANAGRAMA** o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

3.4. Permutações de elementos nem Todos Distintos [Diferentes]:

$$_nP_{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

Exemplo:
1) Quantos são os anagramas com a palavra Mauro?
Permutação simples: P5 = 5x4x3x2x1 = 120, podemos formar 120 anagramas.

2) Quantos são os anagramas com a palavra Maura?
Observe que há dois elementos repetidos: mAurA → o "A", logo

$$P_2^5 = \frac{5!}{2!} \Rightarrow \frac{5x4x3x\cancel{2x1}}{\cancel{2x1}} = \frac{5x4x3}{1} = 60$$

3) Quantos são os anagramas com a palavra M<u>I</u>**SS**<u>I</u>**SS**<u>I</u>PP<u>I</u> ?
Observe os elementos repetidos: SS – SS – I I I I (IIII) PP → 1 M; 4 S; 4 I e 2 P.

$$P_n^{n_1\cdot n_2,\dots,n_K.} = \frac{11!}{1!4!4!2!} \Rightarrow \frac{39.916.800}{24x24x2} = \frac{39.916.800}{1152} = 34.650$$

3) Quantos anagramas possuem a palavra TÁRTARA ?

O número de anagramas de "TARTARA" será representado por $P_7^{3,2,2}$ ou $\binom{7}{3,2,2}$

Para formar o anagrama de "TÁRTARA" temos que arrumar 3ª, 2R e 2T em 7 lugares, _ _ _ _ _ _ _. O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os A é C_7^3, depois temos C_4^2 modos de escolher os lugares para colocar os R e finalmente, um único modo de escolher os lugares para os T[1].

$$P_n^{n_1\cdot n_2,\dots,n_K.} \Rightarrow P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} \Rightarrow \frac{5.040}{6x2x2} = \frac{5.040}{24} = 210$$

4. Arranjo

Um arranjo de n objetos distintos tomados **r** a **r**, **r** de cada vez, (com n ≥ r), é dado por:

$$\boxed{A_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Exemplo:
Contar a quantidade de números formados por 2 algarismos distintos pelos algarismos 1, 2, 3, 4.
Solução: Temos 4 algarismos diferentes (1, 2, 3, 4) queremos arranjar 2 a 2, portanto temos:

$$A_{(4,2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} \Rightarrow \frac{4x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4x3 = 12$$

ou seja: { (1,2); (1,3); (1,4); - (2,1); (2,3); (2,4) – (3,1); (3,2); (3,4) – (4,1); (4,2); (4,2) } .

Observação: No **ARRANJO – IMPORTA** a **ordem** dos elementos como estão dispostos: o número 23 ≠ 32.

Exemplo: Calcule o número de arranjos de 8 objetos tomados 3 a 3.

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} \Rightarrow \frac{8x7x6x\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336 \quad \text{ou} \quad \Rightarrow \frac{8!}{5!} = \frac{40.320}{120} = 336$$

5.Combinação: →

Nas combinações **NÃO IMPORTA** a **ordem** em que os elementos se encontram. Se estivermos esperando o casal Sr. José Maria e Dona Maria José, não importa quem entra primeiro em nossa casa se é O Sr. José Maria ou Dona Maria José. Portanto, AS COMBINAÇÕES diferenciam-se das permutações e arranjos, conforme demonstramos acima, a ordem de escolha não tem importância.
Uma combinação de n objetos distintos tomados **r** a **r** é dado por:

$$\boxed{C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Onde: n: número total de elementos.
r: número de elementos do agrupamento.

[1] Vide MORGADO et alii. Análise Combinatória e Probabilidade, 2004. pp.45-6.

O termo $\binom{n}{r}$ é chamado binomial e é calculador pela expressão: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Exemplo: Calcule o número de combinações possíveis formados com 8 objetos tomados 3 a 3.

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} \Rightarrow \frac{8x7x6x\cancel{5!}}{3!\cancel{5!}} \Rightarrow \frac{8x7x6}{3x2x1} = \frac{336}{6} = 56$$

Exercícios:
Calcule (Permutação simples):
a) P_5 b) P_7 c) P_4 d) P_8

a) P5 = 5x4x3x2x1 = 120
b) P7 = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040
c) P4 = 4x3x2x1 = 24
d) P8 = 8x7x6x5x4x3x2x1 = 40.320

e) Com a palavra FAMEC quantos anagramas podem-se formar?
f) Quantos são os anagramas da palavra LIGADO?
g) Quantos são os anagramas da palavra LAMPEJO?
h) Quantos são os anagramas da palavra **LIGADA**?
i) Quantos são os anagramas da palavra **ARARA**?
j) Quantos são os anagramas da palavra **BANANADA**?

Solução:
Cada ordenação dos **n** objetos é chamada uma **permutação** simples de **n** objetos e o número de permutações simples de **n** objetos distintos é representado por Pn[2]. Logo, Pn = n!

e) FAMEC → há 5 elementos diferentes, então, P5 → 5! = 5x4x3x2x1 = 120. Pode-se obter 120 anagramas com a palavra FAMEC;
f) LIGADO → há 6 elementos diferentes, então, P6 → 6! = 6X5x4x3x2x1 = 720. Pode-se obter 720 anagramas com a palavra LIGADO;
g) LAMPEJO → há 7 elementos diferentes, então, P7 → 7! = 7X6X5x4x3x2x1 = 5040. Pode-se obter 5040 anagramas com a palavra LAMPEJO;
h) LIG**A**D**A** → há 6 elementos, porém 2, são iguais, 2A. A solução para esta situação é a seguinte:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} \to \frac{6x5x4x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}} \Rightarrow 6x5x4x3 = 360$$

i) **ARARA**→ há 5 elementos, porém há 2R e 3A. A solução para esta situação é a seguinte:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} \to \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} \Rightarrow \frac{5x4}{2x1} \to \frac{20}{2} = 10$$

j) **BANANADA**→ há 8 elementos, porém há 4A, 2N, 1B e 1D. A solução para esta situação é a seguinte:

$$P_8^{4,2,1,1} = \frac{8!}{4!2!1!1!} \to \frac{8x7x6x5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2x1} \Rightarrow \frac{8x7x6x5}{2x1} \to \frac{1680}{2} = 840$$

Calcule (Arranjo):
a) $A_{5,2}$ b) $A_{3,2}$ c) a) $A_{6,4}$

a) $A_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} \Rightarrow \dfrac{5!}{3!} \Rightarrow \dfrac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

b) $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow A_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} \Rightarrow \dfrac{3!}{1!} \Rightarrow \dfrac{3x2x\cancel{1!}}{\cancel{1!}} = 6$

c) $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow A_{6,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} \Rightarrow \dfrac{6!}{2!} \Rightarrow \dfrac{6x5x4x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$

Bibliografia utilizada

CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo : Saraiva, 1998.
MORGADO, Augusto César de Oliveira et alii. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
SPIEGEL, Murray Ralph. *Estatística*. 2. ed. São Paulo : McGraw-Hill, 1995.
___________________. *Probabilidade e Estatística*. São Paulo : Pearson, 2004.
TIBONI, Conceição Gentil Rebelo. *Estatística básica para o curso de Turismo*. São Paulo : Atlas, 2002.
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP "IME - Instituto de Matemática e Estatística". MAE-116, Noções de Estatística, [Obtido em 15 dez. 2004]. Disponível em http://www.ime.usp.br/~mae116

[2] MORGADO et alli. Op. cit. pp. 27-55.