

O Modelo de Crescimento Neoclássico de Solow  
Notas de Aula

---

Prof. Giacomo Balbinotto Neto  
UFRGS/FCE

---

---

---

---

---

---

---

---

Robert Solow (1924 - )



Prêmio Nobel - 1987

*Toda teoria depende de hipóteses que não são totalmente verdadeiras. É isto que a faz teoria. A arte de bem teorizar é fazer as inevitáveis hipóteses simplificadoras de tal maneira que os resultados finais não sejam muito sensíveis. (1956, p.65)*

<http://nobelprize.org/economics/laureates/1987/press.html>

2

---

---

---

---

---

---

---

---

A Contribuição de Solow (1956)

*Solow's theoretical model had an enormous impact on economic analysis. From simply being a tool for the analysis of the growth process, the model has been generalized in several different directions. It has been extended by the introduction of other types of production factors and it has been reformulated to include stochastic features. The design of dynamic links in certain "numerical" models employed in general equilibrium analysis has also been based on Solow's model. But, above all, Solow's growth model constitutes a framework within which modern macroeconomic theory can be structured.*

3

---

---

---

---

---

---

---

---

### O Modelo de Solow

- explica as diferenças das taxas de crescimento entre países?
- explica as diferenças em níveis de renda por países?
- explica a relação entre níveis de renda e taxas de crescimento?
- explica a convergência (ou divergência?) de países diferentes para o mesmo nível de vida?
- as predições do modelo são corroboradas pelos fatos?

4

---

---

---

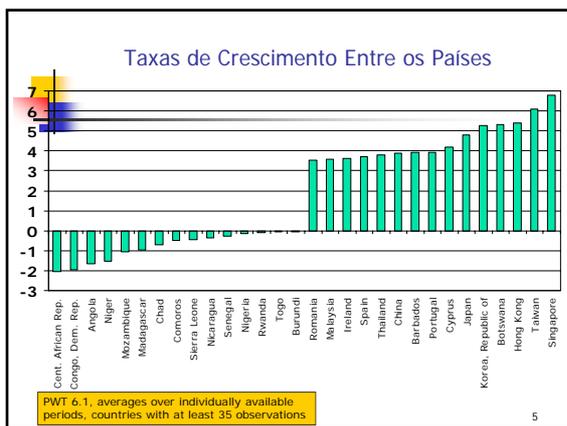
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

### A Estrutura da Economia

Como pressuposto implícito do modelo neoclássico, assume-se o individualismo metodológico, no sentido de que, embora estejamos analisando o comportamento da economia em seus grandes traços e tendências, por traz dessas tendências estão os indivíduos e empresas que buscam maximizar o seu bem-estar e os lucros.

6

---

---

---

---

---

---

---

---



### A Estrutura da Economia

Além disso, assume-se que as famílias são possuidoras, em algumas medida, dos insumos e ativos da economia.

Isto está estritamente relacionado ao marco institucional da economia que define os direitos de propriedade das várias economias.

7

---

---

---

---

---

---

---

---



### A Estrutura da Economia

Existem mercados no qual as firmas vendem produtos as famílias e estas, insumos as firmas.

Portanto, existe um mercado que funciona dentro de um determinado marco institucional que permite a existência trocas onde as quantidades demandadas e ofertadas pelos agentes econômicos determinam os preços relativos dos insumos e dos bens produzidos na economia.

8

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

(i) Função de produção - é assumido por Solow (1956) que a economia produz somente um bem, cuja a taxa de produção é dada por  $Y(t)$ .

Deste modo, é possível falarmos aqui, de modo não ambíguo de renda real da economia.

9

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

É assumido também que, em qualquer ponto do tempo a economia possui um dado estoque de capital (K), trabalho (N) e conhecimento (A), que podem ser combinados pelos empresários para produzir um nível de produto (Y), que é dado pela função de produção agregada desta economia.

10

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Formalmente a função de produção pode ser representada como:

$$(1) Y(t) = F [K(t), N(t), A(t)]$$

11

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Y(t) é a taxa de produto de um bem homogêneo que, pode ser tanto consumido C(t) ou investido I(t) para criar um novo bem de capital em t+1, K(t+1).

K(t) é o fluxo de serviços do capital;  
 N(t) é o fluxo de serviços do trabalho e,  
 A(t) é a efetividade do trabalho.

12

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Este pressuposto neoclássico implica que, no modelo, não são levada em conta as distinções keynesianas entre aqueles que poupam e aqueles de investem, pois a poupança da economia refere-se, simplesmente, ao investimento realizado, não sendo assim necessário incluir no modelo uma função investimento separada da de poupança.

13

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Este pressuposto equivale a assumirmos a "parábola do milho", no qual o estoque de capital da economia  $K(t)$  toma a forma de um bem composto - milho, no qual todo o milho não consumido e automaticamente poupado e é transformado em parte do estoque de capital milho.

14

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Embora possa parecer forte este pressuposto, ele é em nosso entender, muito poderoso, no sentido de que ele descarta uma série de dificuldades analíticas referentes a agregação do produto, bem como entre a discrepância entre poupança *ex-ante* e investimento *ex-post*, bem como entre investidores e poupadores na economia.

15

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

Os problemas referentes a agregação não surgem porque é assumido por hipótese que há somente um bem que é produzido nesta economia.

Além disso, dado que somente um bem é produzido, a questão referente a mudanças nos preços relativos dos bens também desaparece, bem como a questão referentes a composição do capital.

16

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

A função de produção neoclássica nada mais é do que uma função matemática que busca descrever os fatos físicos que estão por traz da transformação dos insumos produtivos, tais como trabalho e capital em produto.

Ela pode ser interpretada como o fluxo máximo de produto que pode ser associado com um determinado conjunto de insumos e conhecimentos tecnológicos.

17

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

É assumido também que a função de produção neoclássica agregada é contínua.

Isto permite que haja uma substituição de capital por trabalho na produção de  $Y$ , podendo ele ser produzido segundo várias combinações de capital e trabalho.

18

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

(NA) é referido no modelo neoclássico como sendo o trabalho efetivo, sendo que o progresso tecnológico que entra nesta especificação do modelo é chamado de *labour-augmenting*.

19

---

---

---

---

---

---

---

---



### Pressupostos do Modelo

O progresso técnico no modelo neoclássico é considerado como sendo exógeno.

A tecnologia é definida como sendo o modo pelo qual os insumos são transformados em produto no processo de produção.

20

---

---

---

---

---

---

---

---



### Angus Maddison(1995, p.45-46)

*It is quite plausible that technical progress has been to a large degree endogenous in the Rommer sense for the United States, but this is unlikely to have been the general situation. Large and fairly advanced follower countries like France, Germany, the UK and Japan have had elements of endogeneity in their technological development, but for the rest of the world technological progress is likely to have been exogenous.*

21

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

(i) ela exibe retornos marginais positivos e decrescentes:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0$$

22

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

(ii) retornos constantes de escala, isto é, quando, por exemplo, dobra-se as quantidades de insumos de capital e trabalho efetivo, obtém-se um nível de produto duas vezes maior, ou seja:

$$F[\lambda K, \lambda AN] = \lambda F[K, AN] \quad \forall \lambda \geq 0.$$

23

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

(iii) o produto marginal do capital e do trabalho tende ao infinito quando o capital ou o trabalho tende a zero ou o capital ou o trabalho tende ao infinito. Estas proposições são conhecidas como as condições de Inada.

$$(e) \lim_{K \rightarrow 0} (FK) = \lim_{L \rightarrow 0} (FL) = \infty$$

$$(f) \lim_{K \rightarrow \infty} (FK) = \lim_{L \rightarrow \infty} (FL) = 0$$

24

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

(iv) ao infinito quando o capital ou o trabalho tende a zero ou o capital ou o trabalho tende ao infinito. Estas proposições são conhecidas como as condições de Inada.

(e)  $\lim_{K \rightarrow 0} (FK) = \lim_{LN \rightarrow 0} (FN) = \infty$

(f)  $\lim_{K \rightarrow \infty} (FK) = \lim_{N \rightarrow \infty} (FN) = 0$

25

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

O pressuposto referente aos retornos constantes de escala da função de produção neoclássica é derivado de dois pressupostos implícitos que assumimos:

(1) em primeiro lugar, é assumido que a economia é suficientemente grande para que os ganhos que podem ser obtidos com a especialização da economia sejam completamente exauridos e;

(2) os outros recursos utilizados na produção, tais como os recursos naturais não se constituem numa restrição ao crescimento.

26

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

Assumindo o pressuposto dos retornos constantes de escala, temos que o nosso trabalho analítico fica facilitado pois isto nos permitirá trabalhar com uma função de produção na forma intensiva.

27

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

Assim, se  $c = (1/AN)$ , obtemos a seguinte expressão para a função de produção na forma intensiva:

$$F [(K/AN), 1 ] = (1/AN) F (K,AN)$$

$$F (K,AN)/ AN = Y /AN$$

onde:  $Y/AN$  é o produto por unidade de trabalho efetivo.

28

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

Definindo, agora  $k = K/AN$  como sendo a relação capital-trabalho efetivo e  $y = Y/AN$  como a relação produto/trabalho efetivo ou renda per capita efetiva, temos que:

$$f(k) = F (k,1)$$

Assim, a função de produção neoclássica na sua forma intensiva pode ser escrita como:

$$y = f (k)$$

29

---

---

---

---

---

---

---

---

A função de produção do modelo neoclássico de Solow (1956) tem as seguintes propriedades:

A equação abaixo nos mostra o nível de produto por trabalho efetivo.

$$y = f (k)$$

Esta é a forma da função de produção na forma intensiva.

30

---

---

---

---

---

---

---

---



**Implicitamente é assumido também que:**

(a)  $f(0) = 0$

O pressuposto (a) é conhecida como o pressuposto do *free lunch* ou da impossibilidade da produção livre. Isto é, não se consegue produzir algo sem insumos.

Aqui, especificamente, temos que nenhum produto pode ser produzido sem capital.

31

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os pressupostos sobre a função de produção**

(b)  $f(\infty) = \infty$

O pressuposto (b) diz que um nível indefinidamente elevado da relação capital-trabalho, está relacionada a um nível indefinidamente alto do produto por trabalhador.

32

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os pressupostos sobre a função de produção**

(c)  $f'(k) > 0$

O pressuposto (c) no diz que o produto marginal da relação capital-trabalho é positiva. Isto é, um aumento da relação (K/N) está associada a um aumento no fluxo de produto.

Contudo, conforme o pressuposto (d), a cada incremento da relação (K/N) gera um fluxo de produto que produzem incrementos decrescente no fluxo de produção, ou em outras palavras, a taxa de mudança no produto com relação a taxa de mudança na relação (K/N) é negativa.

33

---

---

---

---

---

---

---

---

### Os pressupostos sobre a função de produção

(d)  $f''(k) < 0$

O pressuposto (d) nos diz que a função de produção está sujeita a rendimentos decrescentes. Isto é, o produto marginal do capital diminui quando o capital por trabalhador aumenta.

34

---

---

---

---

---

---

---

---

### Os pressupostos sobre a função de produção

(e)  $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$

(f)  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$

O pressuposto (e) nos diz que quando o capital tende a zero, o produto marginal do capital tende ao infinito.

O pressuposto (f) nos diz que quando o capital tende ao infinito, o produto marginal do capital tende a zero.

35

---

---

---

---

---

---

---

---

### Função de Produção Agregada

Nota: esta função de produção exibe rendimentos marginais decrescentes.

36

---

---

---

---

---

---

---

---

### A Função Poupança

Função poupança - no que se refere a função poupança ( $S$ ), é assumido que existe uma relação proporcional entre o nível de poupança e renda, isto é:

$$S = sY \text{ onde } 0 < s < 1,$$

s nada mais é do que a fração do produto que é poupada para ser investida, ou em outras palavras, é a fração do produto não consumido. Esta propensão é assumida ser exôgena.

37

---

---

---

---

---

---

---

---

### A Função Poupança

O nível de poupança das famílias ou a sua taxa de poupança é determinada como o resultado de uma comparação entre os custos e benefícios de consumir no presente e consumir no futuro, quando são levados em conta o estado da economia, a função preferência dos indivíduos, o seu nível de riqueza e a taxa de juros subjacente [cf. modelo de Irving Fisher (1930)].

38

---

---

---

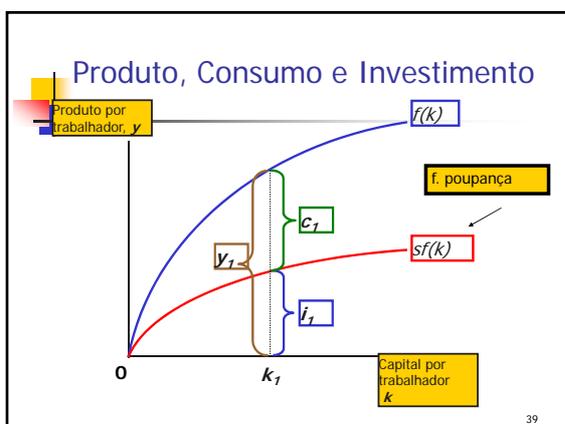
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---



### Economia Fechada

**Economia fechada** - assume-se, também, nesta versão simplificada no modelo neoclássico de crescimento, que a economia é fechada.

Isto implica que as famílias não podem comprar e nem vender ativos no exterior e nem as empresas podem comprar e vender produtos e insumos no mercado externo.

Em outras palavras, não há transações com o exterior.

40

---

---

---

---

---

---

---

---



### Economia Fechada

Em termos práticos, tal pressuposto implica que o produto seja igual a renda e que o montante poupado seja investido ( $I = S$ ).

Além disso, temos que a renda é medida de maneira não ambígua em termos do único bem produzido na economia, sendo igual ao consumo, (C) e ao investimento agregado (I).

41

---

---

---

---

---

---

---

---



### Economia Fechada

Embora este pressuposto possa parecer irrealista num primeiro momento, principalmente quando aplicado a dados regionais ou dentro de um mesmo país, ele pode ser considerado adequado na análise dos dados do tipo *cross-country* onde a mobilidade dos fatores tende a ser bem menor do que entre regiões de um mesmo país.

42

---

---

---

---

---

---

---

---

**Depreciação do Capital (d)**

Depreciação do capital e a taxa de investimento líquido - é assumido que o capital físico se deprecia a uma taxa constante (d), ou em outras palavras, temos que em cada período de tempo, uma parte ou fração do estoque de capital físico existente na economia é consumida durante o processo de produção, não podendo mais ser usada.

43

---

---

---

---

---

---

---

---

**Depreciação do Capital (d)**

Depreciação por trabalhador,  $\delta k$

d = taxa de depreciação  
= fração do estoque de capital que se desgasta a cada período.

Capital por trabalhador,  $k$

44

---

---

---

---

---

---

---

---

**A Taxa de Investimento**

O aumento líquido do estoque de capital físico na economia é dado por:

$$\dot{K} = I - dK$$

$$= s \cdot F(K, AN) - dK$$

A função  $F(\bullet)$  determina a trajetória de  $K$ , o estoque de capital da economia, para uma dada tecnologia e uma dada força de trabalho (N).

45

---

---

---

---

---

---

---

---



## Acumulação de Capital

*Idea básica:*  
*O investimento torna o estoque de capital maior, e a depreciação menor.*

46

---

---

---

---

---

---

---

---



## A Taxa de Crescimento Populacional (n)

A função do crescimento populacional é função das mudanças na taxa de participação da força de trabalho e pelos deslocamento populacionais devido aos movimentos migratórios.

No que se refere ao crescimento da população, ela reflete, em última instância, o comportamento da fertilidade, da mortalidade e das migrações por parte das famílias no sentido de maximizar o seu bem-estar.

47

---

---

---

---

---

---

---

---



## A Taxa de Crescimento Populacional (n)

O modelo neoclássico de crescimento assume que a população cresce a uma taxa constante e exógena  $n$ .

Além, disso, implicitamente é assumido também, que todos os indivíduos trabalham com a mesma intensidade. Assim:

$$\dot{N}/N = n \geq 0$$

48

---

---

---

---

---

---

---

---



**A Taxa de Crescimento Populacional (n)**

Normalizando o número de indivíduos e o seu esforço no trabalho como sendo igual a 1 no período 0, temos que a força de trabalho no período t é igual a:

$$N(t) = e^{-nt}$$

49

---

---

---

---

---

---

---

---



**Progresso Tecnológico**

A fim de simplificarmos o modelo, assumimos que o progresso tecnológico é dado, negligenciando, assim o efeito de t.

Portanto temos que a função de produção neste caso fica sendo igual a:

$$Y = F(K, N)$$

50

---

---

---

---

---

---

---

---



**Renda Agregada**

Como vimos acima, numa economia fechada, na qual apenas um bem é produzido, a renda agregada pode ser medido como sendo igual a:

$$Y = C + I$$

51

---

---

---

---

---

---

---

---



*Renda per capita*

A equação acima pode ser transformada dividindo-se todos os membros por N.

O resultado obtido é o seguinte:

$$Y/N = C/N + I/N$$

ou

$$f(k) = C/N + I/N$$

52

---

---

---

---

---

---

---

---



*Renda per Capita*

dado que  $k = (K/N)$  , se

$\partial K/\partial t = \partial N/\partial t$ , temos que  $\partial k/\partial t = 0$

$\partial K/\partial t > \partial N/\partial t$ , temos que  $\partial k/\partial t > 0$

$\partial K/\partial t < \partial N/\partial t$ , temos que  $\partial k/\partial t < 0$

53

---

---

---

---

---

---

---

---



*Renda per capita*

Como  $\partial k/\partial t = (\partial K/\partial t - \partial N/\partial t) / N$  e  $(\partial N/\partial t) = n$ , temos que:

$$\partial k/k = [(\partial k/\partial t)/k] - n$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação acima por  $k (= K/N)$  obtém-se:

$$(\partial k/\partial t) = (\partial k/\partial t)/N - n(K/N)$$

54

---

---

---

---

---

---

---

---



### Renda *per capita*

$$\partial k / \partial t = (\partial k / \partial t / N) - (n+d)k$$

Visto que  $(\partial k / \partial t) = I/N$ , temos que:

$$(I/N) = [(\partial k / \partial t) / N];$$

portanto:

$$(\partial k / \partial t) / N = (\partial k / \partial t) + (n+d)k$$

55

---

---

---

---

---

---

---

---



### Renda *per capita*

Dada estas deduções preliminares, temos que:

$$f(k) = C/N + \partial k / \partial t + (n+d)k$$

56

---

---

---

---

---

---

---

---



### A alocação da renda *per capita*

A equação acima nos mostra que o produto por trabalhador da economia [ $f(k) = (Y/N)$ ] é alocado para atender três finalidades:

- (i) ao consumo per capita ( $C/N$ );
- (ii) a uma porção  $(\partial k / \partial t)$  que busca aumentar a relação  $(K/N)$ , que é igual ao investimento bruto e;
- (iii) para o investimento que busca manter a relação capital-trabalho  $(K/N)$  constante tendo em vista que a força de trabalho que cresce a uma taxa exógena  $nk$  e o capital se deprecia a uma taxa  $dk$ .

57

---

---

---

---

---

---

---

---

**A alocação da renda *per capita***

$$f(k) = C/N + \partial k/\partial t + (n+d)k$$

Consumo *per capita*

Extensão do capital

Aprofundamento do capital

58

---

---

---

---

---

---

---

---

**Investimento**

Rearranjando os termos da equação acima, temos que:

$$f(k) = C/N + \partial k/\partial t + (n+d)k$$

$$\partial k/\partial t = [f(k) - C/N] - (n+d)k$$

59

---

---

---

---

---

---

---

---

**Investimento**

Dado que:

$$(\partial k/\partial t) = (Y/N - C/N) - (n+d)k$$

$(Y/L - C/N) = S/N$  e

$S = sY$ , temos que:

$$(\partial k/\partial t) = s(Y/N) - (n+d)k$$

portanto:  $(\partial k/\partial t) = s \cdot f(k) - (n+d)k$

60

---

---

---

---

---

---

---

---

A equação fundamental do crescimento econômico neoclássico

$$\dot{k} = (\partial k / \partial t) = s \cdot f(k) - (n+d)k$$

ou

$$\dot{k} = (\partial k / \partial t) = s \cdot y - (n+d)k$$

61

---

---

---

---

---

---

---

---

A equação fundamental do crescimento econômico neoclássico

A equação fundamental do crescimento econômico neoclássico nos diz que a variação no capital por trabalhador  $[(\partial k / \partial t)]$  é determinada, a cada período de tempo (t) por dois termos:

(i)  $s[f(k)] = (s \cdot y)$  – que nada mais é do que a poupança por trabalhador e, desde que neste modelo a poupança é automaticamente transformada em investimento, ela pode ser também interpretada como sendo o fluxo de investimento por trabalhador;

62

---

---

---

---

---

---

---

---

A equação fundamental do crescimento econômico neoclássico

(ii) o segundo termo  $[(n+d)k]$  - é o montante de investimento que seria necessário para manter a relação capital-trabalho constante, dado que a força de trabalho está crescendo a uma taxa proporcional [e exógena], n – isto é a extensão do capital e o capital se deprecia a uma taxa d.

63

---

---

---

---

---

---

---

---



### Break-even Investment

$(d + n)k = \text{break-even investment}$ , é o montante de investimento necessário para manter a relação capital/trabalho  $[k]$  constante.

Este investimento inclui:

- $dk$  - para substituir o capital que é depreciado;
- $nk$  - para equipar os novos trabalhadores com capital; (pois caso contrário,  $k$  iria cair, dado o estoque de novos trabalhadores que são incorporados a força de trabalho).

64

---

---

---

---

---

---

---

---



### Equação de movimento para $k^*$

Com o crescimento populacional, a equação de movimento para  $k$  é dada por:  $\Delta k = s f(k) - (d + n)k$

Investimento corrente

break-even investment

65

---

---

---

---

---

---

---

---



### O Gráfico de Solow

No eixo das abscissas temos a relação capital/trabalho ( $k$ ) e no eixo das ordenadas temos representado o nível de produção per capita ( $y$ ).

A curva  $f(k)$  representa a função de produção na sua forma intensiva. Ela tem este formato devida as propriedades da função de produção neoclássica conforme indicado por Inada (1963).

66

---

---

---

---

---

---

---

---



*O Gráfico de Solow*

A reta  $(d+n)k$  indica a quantidade de capital necessário para manter a força de trabalho empregada.

A curva  $s \cdot f(k)$  é a função de investimento e seu formato é o mesmo da função de produção.

67

---

---

---

---

---

---

---

---



*O Gráfico de Solow*

O ponto A da figura representa o ponto no qual temos que  $(n+d)k = sf(k)$ . Isto implica que:

$$(\partial k / \partial t) = s f(k) - (n+d)k ;$$

portanto:  $\partial k / \partial t = 0$ .

Quando  $(\partial k / \partial t) = 0$  temos que as poupanças dos trabalhadores atingem um ponto no qual a quantidade requerida para manter equipada a força de trabalho em crescimento e a relação  $K/N = (k)$  permanece constante.

68

---

---

---

---

---

---

---

---



*O Gráfico de Solow*

Além disso, dado que  $k^*$  é uma constante no estado estacionário, temos um nível constante da razão produto/trabalho  $y^*$ .

Como  $y = Y/N$ , então  $[(\partial y / \partial t) / y] = n$ .

Se a relação  $k^*$  for constante, temos que todas as demais variáveis do modelo estão crescendo, também, a mesma taxa de crescimento da força de trabalho.

69

---

---

---

---

---

---

---

---

*O Gráfico de Solow*

Assim, quando existir uma solução não trivial para o modelo, temos que  $(n+d)k$  deve, necessariamente, interceptar a curva  $s \cdot f(k)$  nos níveis positivos de produto e capital por trabalhador.

70

---

---

---

---

---

---

---

---

*O Gráfico de Solow*

Dado que  $\partial k / \partial t = 0$ , temos que:

$$y^* = f(k^*);$$

$$y^* = (1-s)f(k^*)$$

71

---

---

---

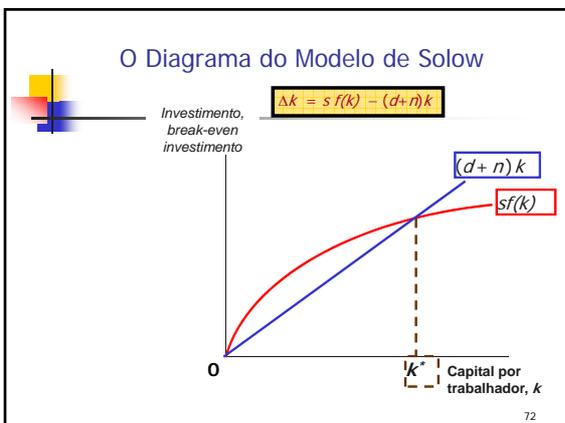
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

**O Diagrama do Modelo de Solow**

Dados os pressupostos do modelo, existe uma solução de crescimento balanceado [estado estável ou estacionário [no sentido de que, qualquer que sejam os valores iniciais de todas as variáveis do modelo, a economia se move continuamente em direção à tendência de crescimento balanceado [*steady state*]]?

73

---

---

---

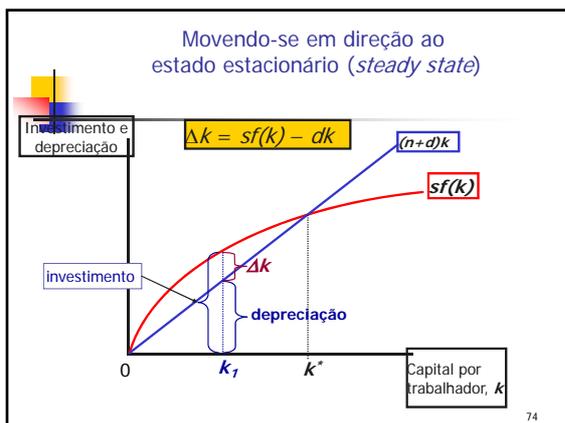
---

---

---

---

---




---

---

---

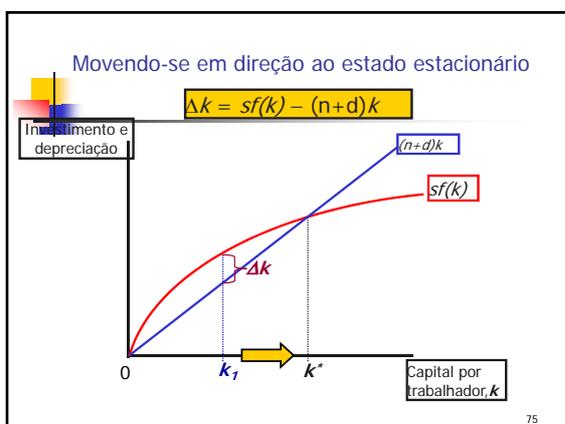
---

---

---

---

---




---

---

---

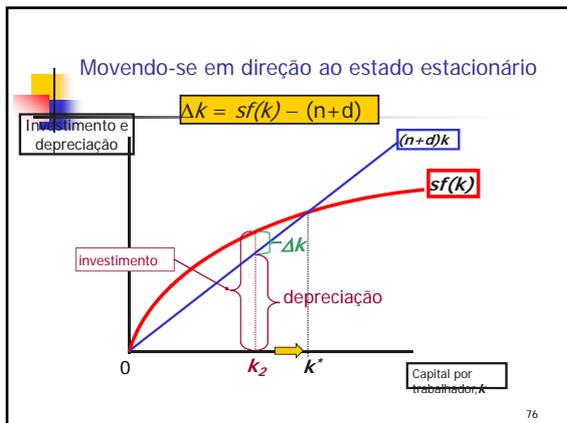
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

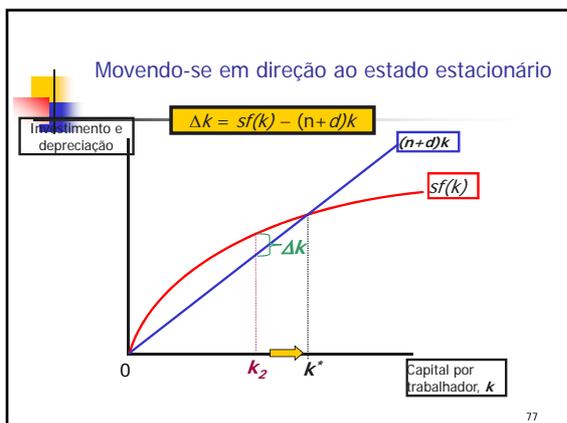
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

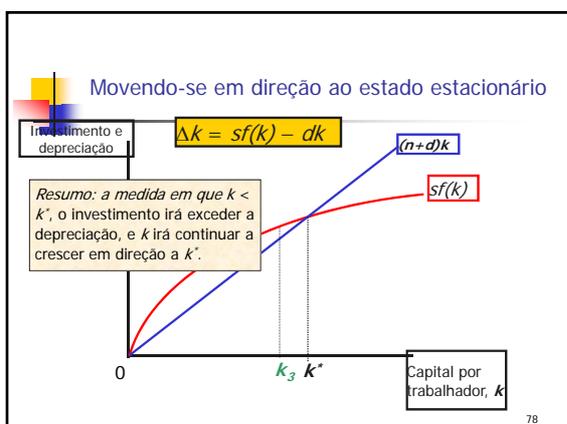
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Movendo-se em direção ao estado estacionário**

Quando  $k < k^*$ , temos que ao nível da relação  $(K/N)$  correspondente, a poupança por trabalhador é maior do que o investimento necessário para manter a força de trabalho empregada.

Assim, temos que,  $(\partial k / \partial t) / k > 0$  e a relação  $(K/N)$  cresce, pois  $s \cdot f(k) / k > n$ .

79

---

---

---

---

---

---

---

---

**Movendo-se em direção ao estado estacionário**

No caso contrário, quando  $k > k^*$ , temos que a relação  $(K/N)$  correspondente implica que o nível de poupança por trabalhador é insuficiente para equipar a força de trabalho que cresce a taxa exógena  $n$  e a relação  $(K/N)$  diminui.

80

---

---

---

---

---

---

---

---

**O Diagrama de Fase**

Diagrama de fase

81

---

---

---

---

---

---

---

---

**O Estado Estacionário**

Uma economia está no estado estacionário quando a renda *per capita* e o capital *per capita* permanecem constantes. Os valores da renda e do capital per capita no estado estacionário, denotados por  $y^*$  e  $k^*$ . São os valores onde o investimento necessário para fornecer capital para os novos trabalhadores e substituir máquinas que se desgastam é igual à poupança gerada na economia.

82

---

---

---

---

---

---

---

---

**Iniciando com uma relação capital trabalho elevada**

Se  $k > k^*$  então  $c$  crescente \* requer uma queda em  $s$ .  
Na transição para a Regra Dourada (*Golden Rule*), consumo é a tempo mais alto a todos os pontos.

83

---

---

---

---

---

---

---

---

**Iniciando com uma relação capital trabalho baixa**

Se  $k < k^*$  então  $c$  crescente \* requer uma queda em  $s$ .  
Na transição para a Regra Dourada (*Golden Rule*), consumo é a tempo mais alto a todos os pontos.

84

---

---

---

---

---

---

---

---



**Movendo-se em direção ao estado estacionário**

---

Dada a equação fundamental, temos que  $k$  ( $=K/N$ ) está caindo.

Portanto, vemos que, qualquer que seja o nível da relação capital trabalho ( $k$ ), que não seja  $k^*$ , o modelo neoclássico de crescimento assume que há um processo de convergência para  $k^*$ , como pode ser visto nos diagramas de fase acima.

85

---

---

---

---

---

---

---

---



**Movendo-se em direção ao estado estacionário**

---

Dada a equação fundamental, temos que  $k$  ( $=K/N$ ) está caindo.

Portanto, vemos que, qualquer que seja o nível da relação  $k$  que não seja  $k^*$ , o modelo neoclássico de crescimento assume que há um processo de convergência para  $k^*$ , como pode ser visto nos diagramas de fase acima.

86

---

---

---

---

---

---

---

---



**Movendo-se em direção ao estado estacionário**

---

O processo de ajustamento da relação capital-trabalho pode levar um tempo considerável, mas a expectativa de longo prazo para esse tipo de economia neoclássica é o crescimento da força de trabalho.

87

---

---

---

---

---

---

---

---



### Movendo-se em direção ao estado estacionário

Uma vez que a relação capital trabalho  $k^*$  é atingida, o produto e o capital crescem á mesma taxa constante proporcional  $n$ , e o produto por trabalhador [ $y = (Y/N)$ ], o capital por trabalhador [ $k = (K/N)$ ], o consumo por trabalhador [ $c = (C/N)$ ] e a poupança por trabalhador [ $s = (S/N)$ ], todos permanecem constantes.

88

---

---

---

---

---

---

---

---



### O Ponto Chave do Modelo Neoclássico de Solow

A chave para compreendermos o modelo neoclássico de crescimento econômico é que quando a poupança –  $sy$  – for maior do que a linha  $(n+d)k$ , então  $k$  (a relação capital/trabalho) está aumentando.

Assim, temos que  $sy$  é maior do que  $(n+d)k$ , e  $k$  deve estar aumentando, e com o decorrer do tempo a economia está se deslocando para a direita em direção a  $k^*$ .

89

---

---

---

---

---

---

---

---



### A trajetória de crescimento balanceado

Dados os pressupostos do modelo, podemos ver que existe uma solução que implica numa trajetória de crescimento balanceado, que é estável no sentido matemático de que quaisquer que sejam os valores iniciais das variáveis do modelo, existe uma tendência ou forças que forcem a economia a direção de um crescimento balanceado.

90

---

---

---

---

---

---

---

---





**A dinâmica de transição do modelo neoclássico de crescimento econômico**

Contudo, o modelo tem uma importante implicação no que diz respeito a dinâmica de transição, mostrando e indicando como uma economia converge para o seu equilíbrio de longo prazo, bem como para a o mesmo nível de renda per capita de outras economias.

Vejamos primeiramente os efeitos referentes a um aumento da taxa de poupança da economia e de uma melhora tecnológica que desloque a função de produção para cima.

94

---

---

---

---

---

---

---

---



**Um aumento na taxa de investimento = um aumento na taxa de poupança**

Um aumento na taxa de poupança, de  $s_0$  para  $s_1$ , onde  $s_0 < s_1$ , desloca a função  $s \cdot f(k)$  na figura abaixo para cima e  $s \cdot f(k)$ .

Suponha que o equilíbrio inicial seja dado por  $k^*_0$ .

95

---

---

---

---

---

---

---

---



**Um aumento na taxa de investimento = um aumento na taxa de poupança**

Dado o aumento da taxa de poupança, temos que no antigo equilíbrio ( $k^*_0$ ), o nível de investimento excede a depreciação efetiva da economia e a taxa de crescimento do estoque de capital torna-se positiva, isto é, está havendo um aumento real no estoque de capital por trabalhador.

Este crescimento ocorre até que a economia atinja o novo equilíbrio, dado por  $k^*_1$ , onde  $k^*_1 > k^*_0$ .

96

---

---

---

---

---

---

---

---

**Um aumento na taxa de investimento = um aumento na taxa de poupança**

O aumento no estoque de capital por trabalhador ocorre devido ao fato de que, agora, o nível de poupança e investimento na economia é maior do que para repor o estoque de capital devido a depreciação e ao crescimento populacional.

Assim, vemos que um aumento permanente da taxa de poupança da economia produz ou gera um efeito temporário sobre a taxa de crescimento da economia, que aumenta durante o período de transição.

97

---

---

---

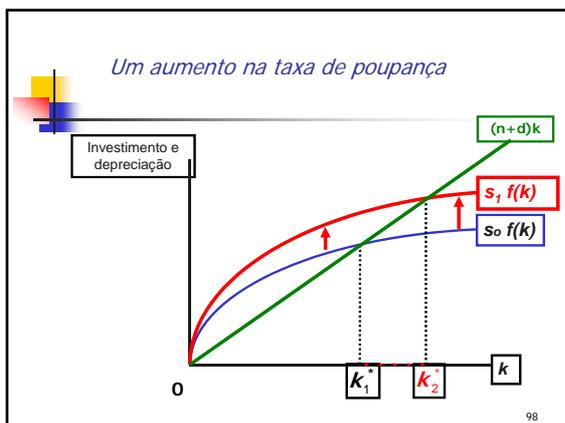
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

**Predição do Modelo**

Alto  $s \Rightarrow$  alto  $k^*$ .

E visto que  $y = f(k)$ ,  
alto  $k^* \Rightarrow$  alto  $y^*$ .

Portanto, o modelo de Solow prediz que países com elevadas taxas de poupança e investimento terão altos níveis de capital e renda por trabalhador no longo prazo.

99

---

---

---

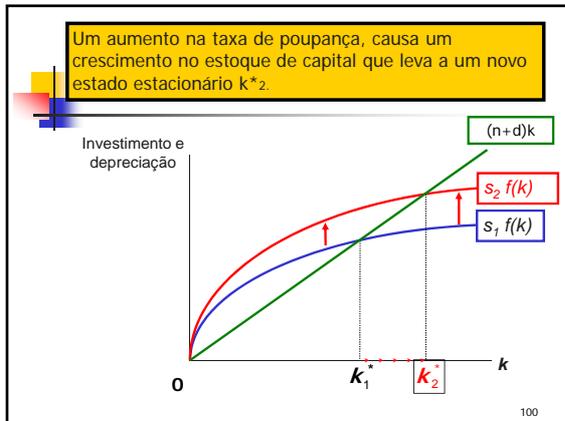
---

---

---

---

---




---

---

---

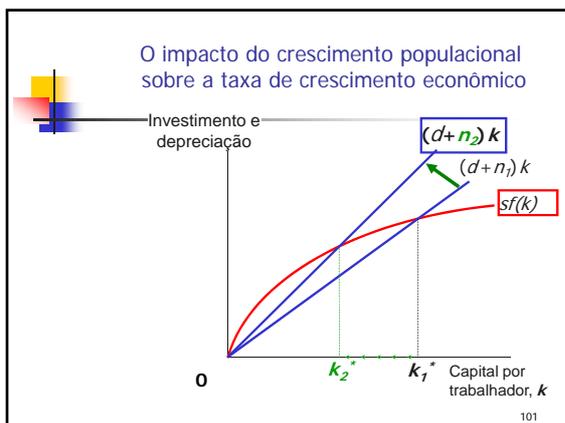
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

Predição

Alto  $n \Rightarrow$  baixo  $k^*$ .

E visto que  $y = f(k)$ ,

baixo  $k^* \Rightarrow$  baixo  $y^*$ .

Portanto, o modelo de Solow (1957) prediz que países com uma elevada taxa de crescimento populacional terão baixos níveis de capital e renda *per capita* no longo prazo.

102

---

---

---

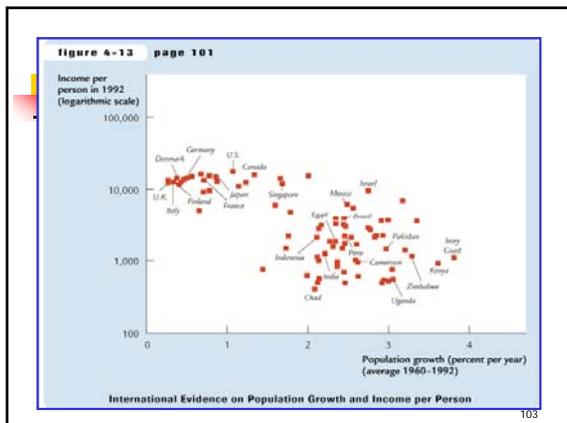
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### As Propriedades do Estado Estacionário

A taxa de crescimento balanceado no modelo neoclássico é a taxa constante exógena de crescimento da força de trabalho.

A longo prazo, a economia converge para uma tendência de crescimento balanceado. A taxa de crescimento de longo prazo numa economia neoclássica é, portanto,  $n$ , e é interiramente independente da renda.

104

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### As Propriedades do Estado Estacionário

A quantidade de capital por trabalhador ( $k$ ), no estado estacionário, é determinada pela condição:

$$\dot{k} = 0$$

Visto que no estado estacionário  $k$  é constante,  $y$  e  $c$  também são constantes nos valores em que  $y^* = f(k^*)$  e  $c^* = (1-s) f(k^*)$ , respectivamente. Portanto, no modelo neoclássico as quantidades *per capita*,  $k$ ,  $y$  e  $c$  não crescem no estado estacionário (*steady state*).

105

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

Visto que no estado estacionário (*steady state*)  $y$ ,  $c$  e  $k$  não crescem, temos que os níveis das variáveis  $K$ ,  $Y$  e  $C$  crescem no estado estacionário a taxa  $n$  (taxa de crescimento populacional).

106

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

Seja:

$$y = k^\alpha$$

$$\dot{k} = sy - (n+d)k$$

107

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

Substituindo  $(y)$  por  $(k)$ , e tornado a equação resultante igual a zero obtemos:

$$k^* = [s/(n+d)]^{1/(1-\alpha)}$$

108

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

Substituindo  $k^*$  resultante da equação acima na função de produção, obtemos o produto per capita no estado estacionário,  $y^*$ :

$$y^* = \left[ \frac{\alpha}{s/n+d} \right]^{1/(1-\alpha)}$$

109

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

O equilíbrio de longo prazo do modelo de Solow (1957) é também consistente com uma distribuição constante da renda entre trabalho e capital (cf. fatos estilizados de Kaldor).

Visto que a maximização dos lucros requer que tanto a mão-de-obra como o capital sejam empregados até o ponto em que o valor de seu produto físico marginal sejam igual aos preços dos fatores de produção e que a função de produção seja:

$$Y = A N^\alpha K^{1-\alpha}$$

110

---

---

---

---

---

---

---

---



### As Propriedades do Estado Estacionário

$w = \alpha (Y/N)$  e

$(r+d) = (1-\alpha) Y/K$

$\alpha (wN/Y) + (r+d)K/Y = \alpha + (1-\alpha) = 1$

111

---

---

---

---

---

---

---

---



**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

Diferentes valores de  $s$  levam a diferentes equilíbrios estacionários?

Como nós podemos saber qual é o melhor equilíbrio estacionário?

112

---

---

---

---

---

---

---

---



**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

Para uma dada função de produção agregada e para dados valores de  $n$  e  $d$ , há um único valor de  $k^* > 0$ , para cada valor de  $s$ . Seja então:  $k^*(s) > 0$  com  $\partial k^*(s)/\partial s > 0$ .

Para  $c^*$  no *steady state*, temos então que:

$$c^* = (1-s) \cdot f[k^*(s)]$$

113

---

---

---

---

---

---

---

---



**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

Sabemos também que:  $s \cdot f(k^*) = (d)k^*$ .

Portanto:  $c^*(s) = f[k^*(s)] - (d)k^*(s)$

Assim, vemos que a quantidade  $c^*$  é crescente em  $s$  para baixos valores de  $s$  e decrescente em  $s$  para altos valores de  $s$ . Ele atinge o seu máximo quando:

$$\partial c(s)/\partial s = \{f'[k(s^*)] - (d)\} dk^*(s)/ds = 0$$

114

---

---

---

---

---

---

---

---

**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

A quantidade  $c^*(s)$  atinge seu máximo quando:

$$f' [k^*(s)] = (d)$$

115

---

---

---

---

---

---

---

---

**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

$$f' (k^*) = (d)$$

Esta condição é chamada de regra de ouro da acumulação de capital [*golden rule of capital accumulation*]. [cf. Phelps (1966)]



116

---

---

---

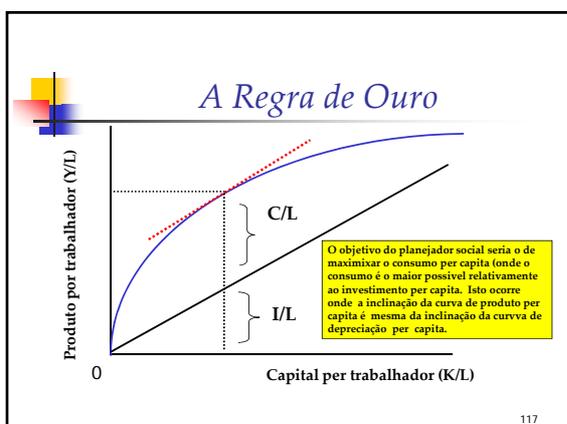
---

---

---

---

---




---

---

---

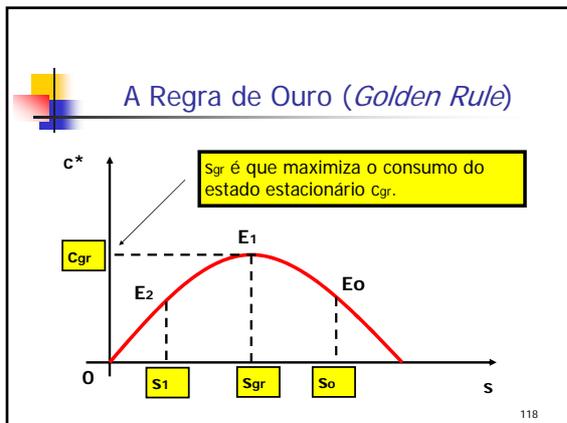
---

---

---

---

---




---

---

---

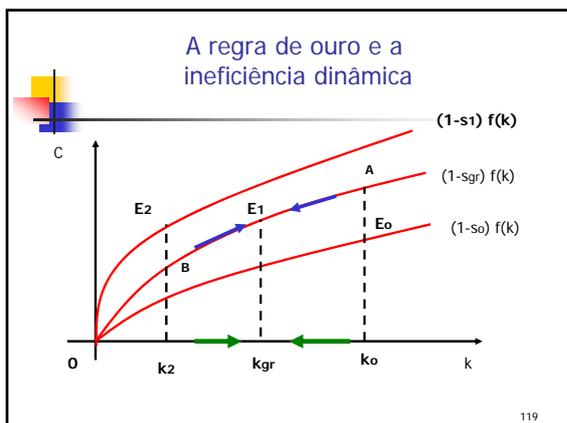
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

### A Regra de Ouro (Golden Rule)

O bem-estar econômico depende do consumo, portanto, o "melhor" *steady state* tem o mais elevado valor de consumo *per capita*, isto é:

$$c^* = (1-s) f(k^*)$$

Um aumento em  $s$ :

- 1) Leva a um elevado valor de  $k^*$  e  $y^*$ , o qual, por sua vez leva a um aumento em  $c^*$
- 2) Reduz a participação do consumo na renda de  $(1-s)$ , o qual pode reduzir  $c^*$ .

120

---

---

---

---

---

---

---

---

**A Regra de Ouro (Golden Rule)**

Questão fundamental com relação a regra de ouro:

Como nós encontramos  $s$  e  $k^*$  que maximize  $c^*$ ?

121

---

---

---

---

---

---

---

---

**Golden Rule Capital Stock**

Para encontramos o  $c^*$ , seja  $f(k^*)$  e  $dk^*$ , e encontre o ponto onde o hiato seja o maior.

$y_{gold}^* = f(k_{gold}^*)$

$i_{gold}^* = \delta k_{gold}^*$

$c_{gold}^*$

$k_{gold}^*$

$k^*$

$f(k^*)$

$dk^*$

122

---

---

---

---

---

---

---

---

**The Golden Rule Capital Stock**

$c^* = f(k^*) - \delta k^*$  é o maior onde a inclinação da função de produção iguala a inclinação da linha de depreciação. Isto ocorre quando:

$PFMgk = d$

$k_{gold}^*$

$k^*$

$f(k^*)$

$dk^*$

$c_{gold}^*$

123

---

---

---

---

---

---

---

---



### The Golden Rule Capital Stock

A condição de que  $PFMgK = d$  é chamada de **regra de ouro**, e pode ser considerada uma receita para se alcançar o melhor proveito da capacidade tecnológica existente.

Quais são as consequências e implicações de se desobedecer a regra de ouro?

124

---

---

---

---

---

---

---

---



### A Regra de Ouro e a Ineficiência Dinâmica

Se a proporção capital trabalho (K/N) ultrapasse  $k^*$ , isto implica que foi acumulado capital de mais nesta economia. Isto representa uma situação na qual há ineficiência dinâmica – isto é – ao se reduzir a poupança hoje, uma economia pode consumir mais não apenas hoje, mas também no futuro. **As economias com ineficiências dinâmicas simplesmente investem demais e consomem pouco.**

**A ineficiência dinâmica surge quando a poupança é alta de mais.**

125

---

---

---

---

---

---

---

---

**EXEMPLO**

**Finding the Golden Rule Steady State: A Numerical Example**

Assumptions:  $y = \sqrt{k}$ ;  $\delta = 0.1$

s	$k^*$	$y^*$	$\delta k^*$	$c^*$	MPK	MPK - $\delta$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$\infty$	$\infty$
0.1	1.0	1.0	0.1	0.9	0.500	0.400
0.2	4.0	2.0	0.4	1.6	0.250	0.150
0.3	9.0	3.0	0.9	2.1	0.167	0.067
0.4	16.0	4.0	1.6	2.4	0.125	0.025
<b>0.5</b>	<b>25.0</b>	<b>5.0</b>	<b>2.5</b>	<b>2.5</b>	<b>0.100</b>	<b>0.000</b>
0.6	36.0	6.0	3.6	2.4	0.083	-0.017
0.7	49.0	7.0	4.9	2.1	0.071	-0.029
0.8	64.0	8.0	6.4	1.6	0.062	-0.038
0.9	81.0	9.0	8.1	0.9	0.056	-0.044
1.0	100.0	10.0	10.0	0.0	0.050	-0.050

126

---

---

---

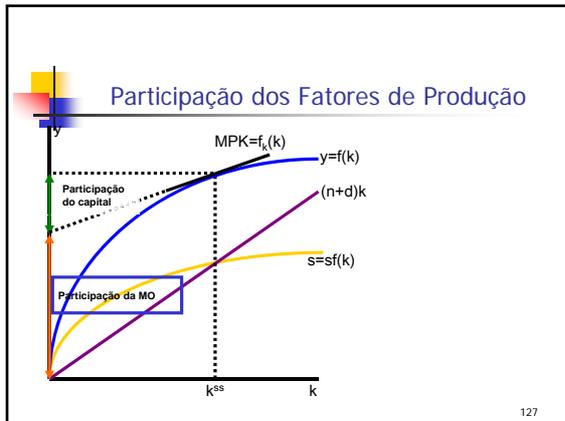
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

**Principais conclusões do modelo neoclássico de crescimento de Solow (1957)**

- 1) a taxa de crescimento de longo prazo do estoque de capital e da renda nacional é a taxa de crescimento da força de trabalho que, por hipótese, é uma constante exógena  $n$ ;
- 2) a economia invariavelmente tende para uma tendência de crescimento balanceado, qualquer que seja a relação capital-trabalho ( $k$ ) inicial;

---

---

---

---

---

---

---

---

**Principais conclusões do modelo neoclássico de crescimento de Solow (1957)**

- 3) o produto por trabalhador, capital por trabalhador, o consumo por trabalhador e a poupança por trabalhador são constantes a longo prazo;
- 4) aumentos permanentes na proporção a poupar, embora aumentem os níveis de produto por trabalhador,  $y$ , de de capital por trabalhador ( $k$ ), não produzem nenhuma mudança na taxa de crescimento econômico a longo prazo.

---

---

---

---

---

---

---

---



**Por que somos tão pobres e eles tão ricos?**

Pela equação acima, a resposta de Solow reside no fato de que países que têm altas razões poupança/investimento tenderão a ser mais ricos, *ceteris paribus*.

Assim, países que acumulam mais capital por trabalhador, e países com mais capital por trabalhador têm um maior produto por trabalhador.

130

---

---

---

---

---

---

---

---



**Por que somos tão pobres e eles tão ricos?**

Já os países que têm taxas de crescimento populacional elevadas tendem a ser mais pobres, de acordo com o modelo de Solow. Em tais economias, é necessário uma fração maior de poupanças apenas para manter constante a razão capital-produto, tendo em vista o crescimento populacional que ocorre a taxa  $n$ .

Esta alargamento do capital dificulta o processo de aprofundamento de capital, o que leva a que elas acumulem menos capital por trabalhador.

131

---

---

---

---

---

---

---

---



**O que dizem as evidências empíricas?**

(i) países com altas taxas de investimento tendem a ser, em média, mais ricos que países que registram taxas de investimento menores e,

(ii) países com altas taxas de crescimento populacional são mais pobres, em média.

Portanto, as previsões geradas pelo modelo neoclássico de crescimento de Solow parecem ser corroboradas pelas evidências empíricas existentes.

132

---

---

---

---

---

---

---

---

**O crescimento econômico no modelo simples de Solow**

O crescimento econômico no estado estacionário implica que não há crescimento *per capita*, pois o produto por trabalhador é constante no estado estacionário.

Aqui temos que o produto [Y] cresce, mas o faz à taxa igual a do crescimento populacional, o que implica então, que a taxa de crescimento per capita é igual a zero.

133

---

---

---

---

---

---

---

---

**O crescimento econômico no modelo simples de Solow e os fatos estilizados**

(i) o modelo neoclássico de Solow é capaz de gerar diferenças na renda *per capita* de diferentes economias;

(ii) o modelo gera também uma razão capital/produto constante, por que tanto  $k$  quanto  $y$  são também constantes;

(iii) o modelo gera uma taxa de juros constante, o produto marginal do capital.

134

---

---

---

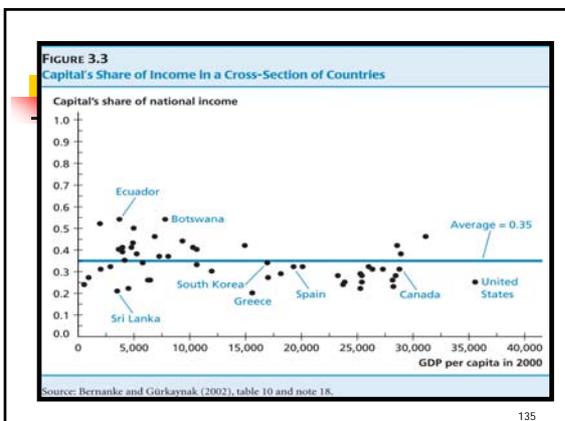
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

**O crescimento econômico no modelo simples de Solow e os fatos estilizados**

(iv) contudo o modelo não prevê o fato de que as economias registram um crescimento sustentado da renda *per capita*. No modelo neoclássico de crescimento econômico, as economias crescem durante um período, mas não sempre.

Com o tempo, o crescimento se torna mais lento à medida em que a economia se aproxima do estado estacionário e, finalmente, o crescimento econômico cessa por completo.

136

---

---

---

---

---

---

---

---

**O crescimento econômico no modelo simples de Solow a a desaceleração do crescimento econômico**

Dada a equação referente a taxa de acumulação de capital temos que:

$$\dot{k}/k = s k^\alpha - (n+d)$$

Como  $\alpha$  é menor que 1, temos que, à medida em que  $k$  aumenta, a taxa de crescimento de  $k$  declina gradualmente. Além disso, como a taxa de crescimento de  $y$  é proporcional à taxa de crescimento de  $k$ , o mesmo ocorre com o produto *per capita*.

137

---

---

---

---

---

---

---

---

**O crescimento econômico no modelo simples de Solow e a desaceleração do crescimento econômico – a dinâmica de transição ao estado estacionário**

Quanto mais a economia se encontra abaixo do valor  $k^*$  no estado estacionário, tanto mais rápido será o crescimento da economia.

138

---

---

---

---

---

---

---

---



### A Tecnologia e o Modelo de Solow

Para obtermos um crescimento sustentado da renda per capita no modelo neoclássico, temos que introduzir o progresso tecnológico.

Isto é feito acrescentando-se uma variável [A] à função de produção.

$$Y = F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{(1-\alpha)}$$

139

---

---

---

---

---

---

---

---



### O que é tecnologia e taxa de progresso tecnológico?

Segundo Schmookler (1966, p.1), tecnologia é o conjunto social de conhecimentos da arte industrial e a taxa de progresso tecnológico como a taxa à qual esse estoque de conhecimentos está crescendo.

140

---

---

---

---

---

---

---

---



### O que é tecnologia e taxa de progresso tecnológico?

O efeito do progresso tecnológico é o progressos técnico, que consiste de três fatos básicos:

- a) mais produto pode ser produzido dando-se a mesma quantidade de insumos ou, equivalentemente, o mesmo montante de produto pode ser gerado com menores quantidades de um ou mais insumos;
- b) o produto existente sofre uma melhoria qualitativa;
- c) produtos totalmente novos são produzidos.

141

---

---

---

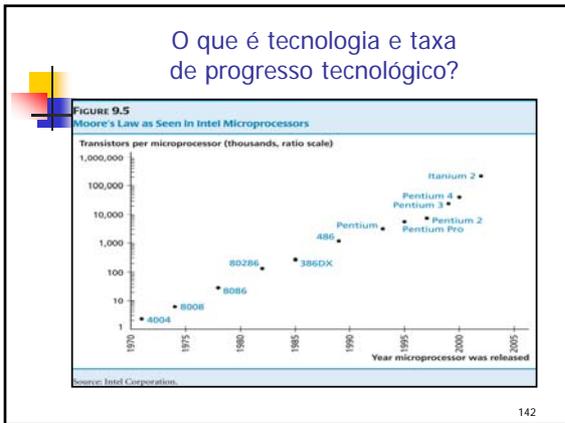
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

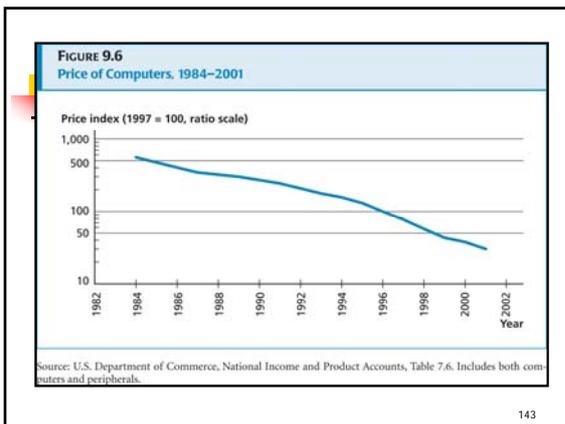
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**O que é Inovação?**

*When an enterprise produces a good or service or uses a method or input that is new to it, it makes a technical change. The first enterprise to make a given technical change is a innovator. Its action is innovation.*

*[cf. Schmookler (1966)]*

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

O modelo neoclássico assume, por hipótese que este parâmetro cresce a uma taxa exponencial, constante e exógena. Ele seria uma "mana" que cai do céu, no sentido de que ele surge automaticamente na economia.

145

---

---

---

---

---

---

---

---

**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

Assim, temos que o progresso tecnológico pode ser visto como um aumento na oferta efetiva de trabalho a qual cresce não apenas em função do crescimento populacional, mas também do progresso técnico.

146

---

---

---

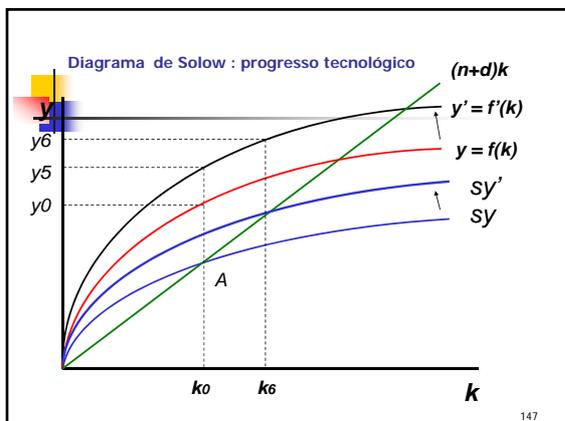
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

No modelo neoclássico, portanto, as taxas de crescimento da renda e do consumo dependem da taxa de progresso técnico, que é exógena no modelo, isto é, ela não seria explicada pela dinâmica do modelo ou pelos fatores econômicos e do comportamento dos indivíduos e empresas.

Aqui, assumimos que ela cresce a uma taxa constante  $g$ .

148

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

$\dot{A}/A = g \iff A = A_0 e^{gt}$

$g$  – é um parâmetro que representa a taxa de crescimento da tecnologia e que é considerado no modelo como sendo exógeno.

149

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

A função de produção na sua forma intensiva fica como:

$$y = k^\alpha A^{(1-\alpha)}$$

transformando a equação acima em logaritmos e derivando obtemos:

$$\dot{y}/y = \alpha \dot{k}/k + (1-\alpha) \dot{A}/A$$

150

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

Ao longo da trajetória de crescimento equilibrado, o produto *per capita* e o capital por trabalhador crescem, ambos, à taxa do progresso tecnológico exógeno,  $g$ .

Assim, o modelo de Solow com tecnologia mostra que o progresso tecnológico é a fonte do crescimento econômico *per capita* sustentado.

151

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

No modelo de Solow com progresso tecnológico temos que a variável  $k$  deixa de ser uma constante no longo prazo, de modo que temos que escrever agora uma equação diferencial em termos de outra variável.

A nova variável estacionária será  $\kappa^*$ , que representa a razão a razão entre o capital por trabalhador e a tecnologia,  $\kappa = (K/AN)$ .

152

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

A função de produção por ser agora reescrita em termos de  $\kappa^*$ :

$$y = \kappa^\alpha \quad \text{onde: } y = Y/NA = y/AN$$

153

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

A função de acumulação de capital em termos per capita no modelo com progresso tecnológico é dada por:

$$\dot{\kappa} / \kappa = \dot{K} / K - \dot{A} / A - \dot{N} / N$$

154

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

A equação de acumulação de capital sob progresso técnico fica agora como:

$$\dot{\kappa} = sy - (n+g+d) \kappa$$

155

---

---

---

---

---

---

---

---



**Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow**

No estado estacionário, a razão produto-tecnologia é determinada pela função de produção e pela condição

$$\dot{\kappa} = 0.$$

Resolvendo para  $\kappa^* = 0$ , verifica-se que:

$$\kappa^* = (s / (n+g+d))^{1/(1-\alpha)}$$

156

---

---

---

---

---

---

---

---

Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow

Substituindo  $\kappa^*$  na função de produção obtemos:

$$y^* = (s / (n+g+d))^{\alpha / (1-\alpha)}$$

157

---

---

---

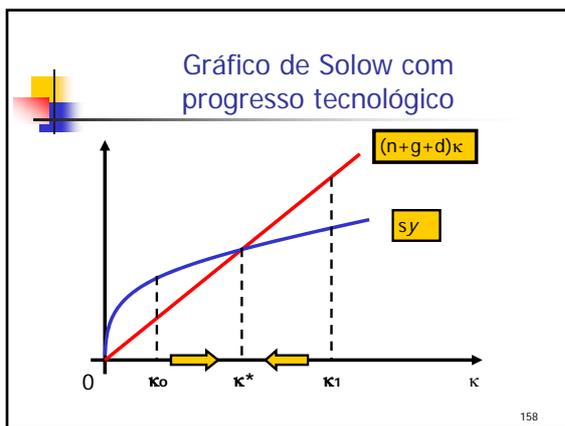
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow

Contudo, este ponto é uma das principais críticas ao modelo neoclássico de Solow, que toma o progresso técnico como sendo exógeno.

A implicação disto é que ele seria incapaz de explicar as razões da persistência das diferenças nas taxas de crescimento entre os países. Tendo em conta este problema, foram feitas várias tentativas para superá-lo.

159

---

---

---

---

---

---

---

---



### Os efeitos do progresso tecnológico no modelo de Solow

Empiricamente, a importância do progresso técnico é visto através do chamado "resíduo de Solow", também chamado de produtividade total dos fatores [PTF] o qual busca evidenciar a importância dos fatores exógenos, sobre a taxa de crescimento de longo prazo.

160

---

---

---

---

---

---

---

---



### Políticas para promover crescimento econômico

Questões suscitadas pelo modelo de Solow:

1. Nós estamos poupando o bastante? Muito?
2. Que políticas poderiam mudar a taxa de poupança?
3. Que políticas poderiam encorajar progresso tecnológico mais rápido?

161

---

---

---

---

---

---

---

---



### Políticas para aumentar a taxa de poupança

Reduza o déficit de orçamento de governo (aumenta de ou o excesso de orçamento)

Aumente incentivos para poupança privada:

- Reduzindo os impostos sobre os ganhos de capital, os impostos de renda das empresas, os impostos estaduais, pois eles desencorajam a poupança.
- Estimule a poupança para a aposentadoria e reduza os impostos sobre estas aplicações;

162

---

---

---

---

---

---

---

---



### Alocando o investimento da economia

No modelo Solow, há somente um tipo de capital. Mas no mundo real há muitos tipos que podem ser classificados em três categorias:

- estoque de capital privado;
- infra-estrutura pública;
- capital humano: o conhecimento e habilidades que os trabalhadores adquirem por educação.

163

---

---

---

---

---

---

---

---



### Alocando o investimento da economia: dois pontos de vista

1. Iguale regime fiscal de todos os tipos de capital em todas as indústrias, então deixe o mercado alocar investimento ao tipo com o produto marginal mais alto.
2. Política industrial: o governo deveria encorajar investimento ativamente em capital de certos tipos ou em certas indústrias, porque eles podem ter externalidades positivo (subprodutos) para aqueles investidores privados que não consideram os benefícios gerados para a sociedade.

164

---

---

---

---

---

---

---

---



### Possíveis problemas com a política industrial

O governo têm um habilidade para escolher os vencedores“ [ *pick winners* ]?

A influência política (e.g. contribuições de campanha) ao invés da economia influencia quais indústrias devem receber um tratamento preferencial?

165

---

---

---

---

---

---

---

---



**Enconrajando o progresso tecnológico ...**

Leis de patentes: encorajam a inovação concedendo monopólios temporários um inventores de produtos novos;

Incentivos fiscais para R&D;

Garantir fundos para a pesquisa básica em universidade;

166

---

---

---

---

---

---

---

---



**Sites didáticos para exercicios de dinâmica comparada**

[http://www.fgn.unisg.ch/eurmacro\\_Tutor//solow-es.html](http://www.fgn.unisg.ch/eurmacro_Tutor//solow-es.html)

<http://bcs.worthpublishers.com/mankiw5/pages/bcs-main.asp?v=category&s=00040&n=98000&i=98040.09&o=&ns=83>

<http://www.cbe.wvu.edu/Krieg/Econ307/Excel%20Spreadsheets/KAcc.xls>

167

---

---

---

---

---

---

---

---



**O Modelo de Crescimento Neoclássico de Solow**  
**Notas de Aula**

---

Prof. Giacommo Balbinotto Neto  
UFRGS/FCE

---

---

---

---

---

---

---

---