5ª Lista de Exercícios – Álgebra Linear – Prof. Erica Romão.

Espaço Vetorial finitamente gerado, subespaço gerado, Combinação Linear e
Dependência e Independência. Linear.

1. Verificar se o conjunto de polinômios $\{1 + 2x + 3x^2, 5 + 7x - 3x^2\}$ é um subespaço de $F(-\infty, \infty)$. Explicar?

2. Seja W o conjunto de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S. Verificar se W é um subespaço de V.

3. Dados os vetores do conjunto A = {(1,2,-1), (6, 4, 2)}. Mostre que o vetor w = (9, 2, 7) é uma combinação linear dos vetores do conjunto A. Explique o resultado obtido.

4. Determine se: v = (1, 1, 2), u = (1, 0, 1) e s = (2, 1, 3) geram o espaço vetorial R^3.

5. Mostrar que é subespaço de M_{2x2} o seguinte subconjunto W = $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2 \mid y = -x\right\}$;

6. Achar um conjunto de geradores dos seguintes subespaços de R^4:
   a) U = $\{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x - y - z + t = 0\}$
   b) b) V = $\{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x - y = z + t = 0\}$

7. Mostrar que os polinômios: 1 - t, $(1 - t^2)$, $(1 - t)^3$ e 1 geram $P_3(t)$.

8. Mostrar que os dois conjuntos {(1, -1, 2), (3, 0, 1)} e {(-1, -2, 3), (3, 3, -4)} geram o mesmo subespaço vetorial do R^3.

9. Seja o espaço vetorial M_{2x2}. Determinar seus subespaços gerados pelos vetores e verificar se são linearmente dependentes ou independentes:
   a) $v = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e\ u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $v = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ e\ t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. Classificar se os seguintes subconjuntos são linearmente dependentes ou independentes:
    a) A = {(1, 1, 0), (1, 4, 5), (3, 6, 5)}
    b) A = {(1, 2, 3), (1, 4, 9), (1, 8, 27)}
    c) A = {(1, 2, 1), (2, 4, 2), (5, 10, 5)}
    d) A = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)}
    e) A = {(0,0,0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)}
    f) C = $\{ \cos^2 x; \text{sen}^2 x; 1 \}$, $C(-\infty, \infty)$;
    g) C = $\{\cos 2x, \cos^2 x, \text{sen}\ 2x\}$, $C(-\infty, \infty)$;

11. Quais dos subconjuntos de $P_4(x)$ são linearmente independentes?
    a) $B = \{ 1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$
    b) $B = \{ 2x, x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1\}$
    c) $B = \{ x(x - 1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$
    d) $B = \{ x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

12. Mostrar que se o conjunto {u, v, w} de vetores de um espaço vetorial V for linearmente independente, então { u + v, u + w, v +w} é linearmente independente.

13. Sendo V o espaço vetorial de $M_{2 \times 3}$, verificar se {A, B, C} é LI ou LD, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Determine três elementos de R^3 que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer sejam linearmente independentes.

15. Consideremos no espaço $P_2 = \{at^2 + bt + c$, onde $a, b, c \in R\}$ e os vetores:

    $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

    a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3;
    b) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?