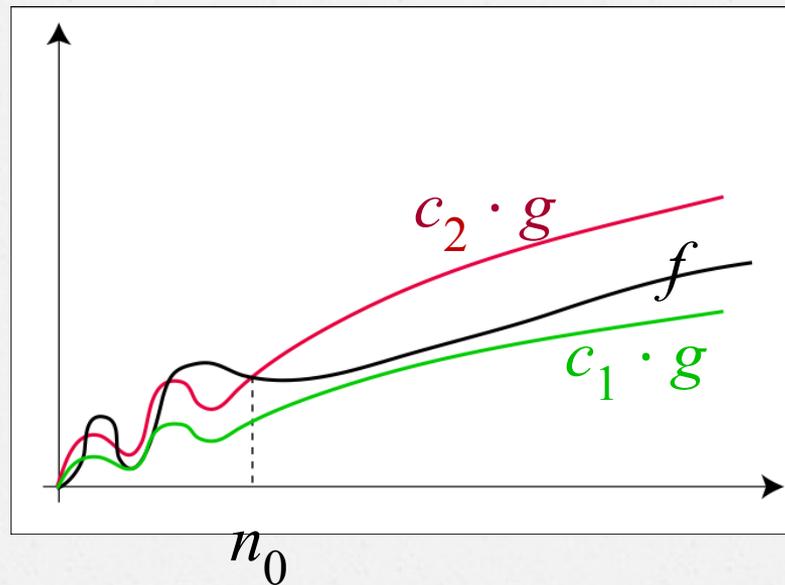


Introdução à Ciência da Computação II

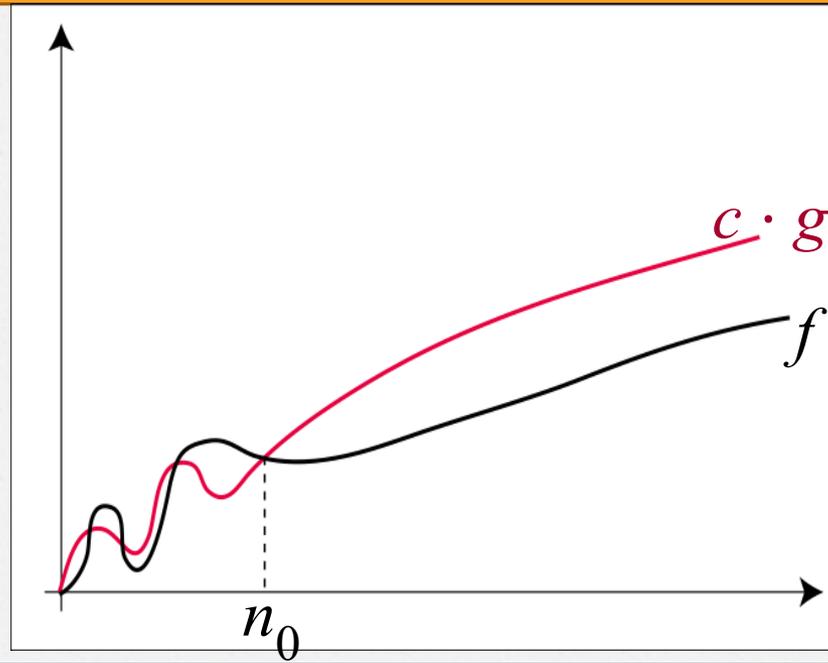
Notação - Θ

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) : \exists c_1, c_2 > 0, n_0 > 0 \text{ tais que} \\ 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \forall n \geq n_0 \}$$



Notação - O

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0, n_0 > 0 \text{ tais que} \\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \forall n \geq n_0 \}$$



Notação - O

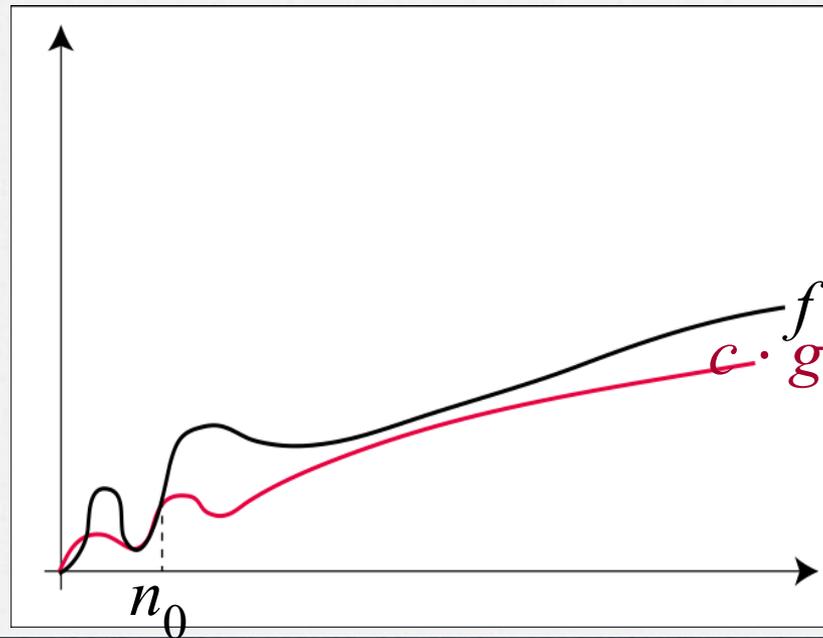
- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
 - $an^2+bn+1 = \Theta(n^2) \Rightarrow an^2+bn+1 = O(n^2)$.
 - $an+b \in O(n^2)$, mas $an+b \notin \Theta(n^2)$.
- $f(n)=\Theta(g(n))$ define limitantes assintoticamente apertados (tight) para $f(n)$.
- $f(n)=O(n)$ define limitantes superiores, ou seja, alguma constante c define $g(n)$ como um limitante superior para $f(n)$. Não há nenhuma argumento a respeito de quão apertado é esse limitante superior.

Notação - O

- Observe que $O(n^2)$ significa que há uma função n que é $O(n^2)$ tal que para qualquer valor de n , não importa o tamanho específico de entrada n escolhido, o tempo de execução daquela entrada é $O(n^2)$.
- Isso significa que o tempo de execução no pior caso é $O(n^2)$.
- Por exemplo, dizer que o tempo de execução do *insertion-sort* é $O(n^2)$ é um abuso já que seu tempo de execução depende da entrada.
 - Se os dados de entrada estão ordenados, o *insertion-sort* é $O(n)$ no melhor caso.
 - Logo, o *insertion-sort* é $O(n^2)$ no pior caso.

Notação - Ω

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0, n_0 > 0 \text{ tais que} \\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0 \}$$



EXEMPLOS:

(1) $3n^3+2n^2 = \Omega(n^3)$: $n > 0$ e $c = 1$

(2) Seja $f(n) = n$ para n ímpar e $f(n) = n^2/10$ para n par

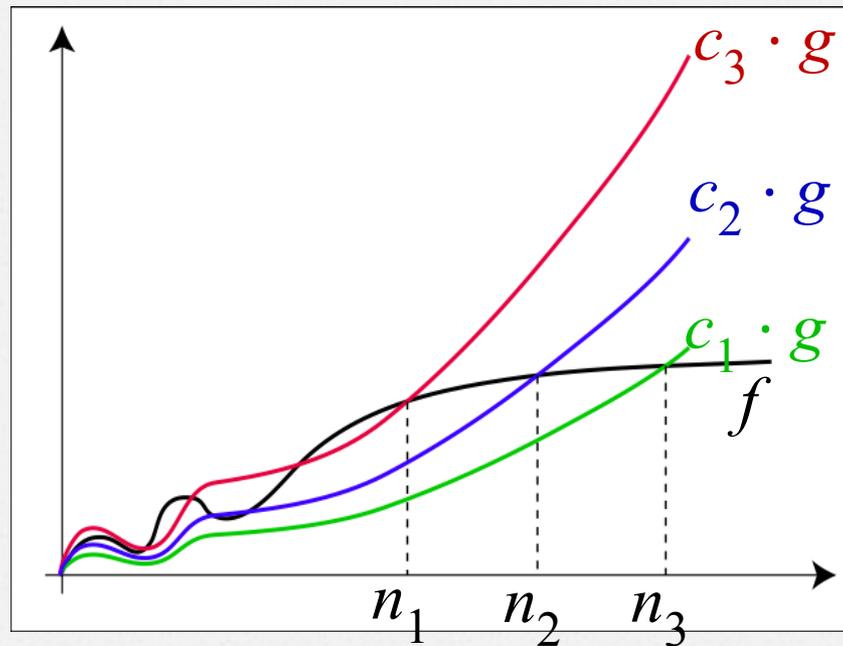
$$f(n) = \Omega(n^2) : n \text{ par e } c = 1/10.$$

- **Teorema:** Para duas funções $f(n)$ e $g(n)$, $f(n)=\Theta(g(n))$ se e somente se, $f(n)=O(g(n))$ e $f(n)=\Omega(g(n))$.
- Temos que $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.
- Na prática, utiliza-se os limitantes assintóticos superior $O(g(n))$ e inferior $\Omega(g(n))$ para se chegar a um limitante assintótico firme (*tight*) $\Theta(g(n))$.

EXEMPLO3: $\frac{1}{2}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$

Notação - o

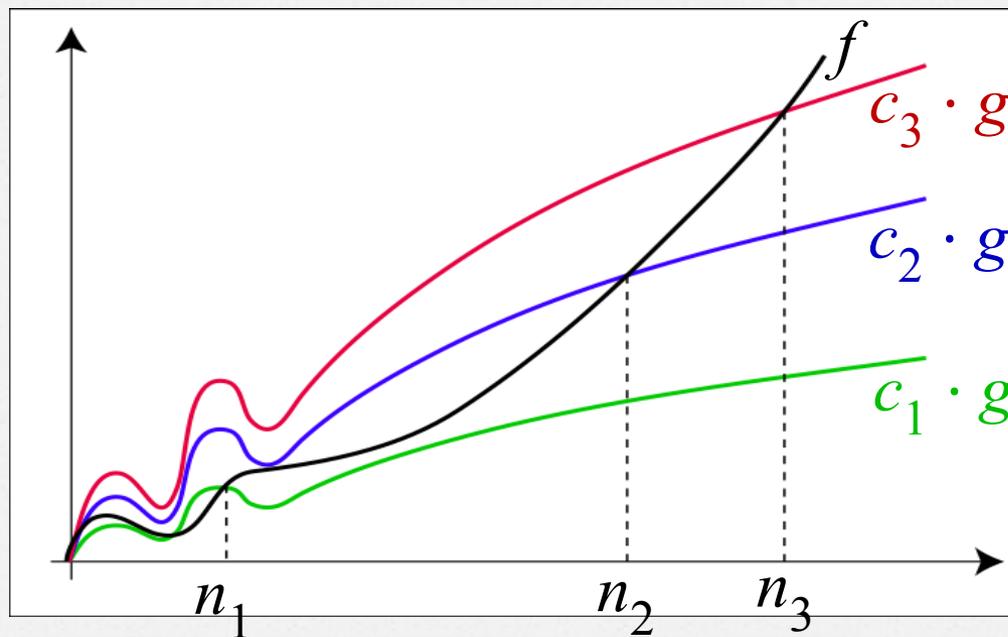
$$o(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \text{ tais que } f(n) \leq c \cdot g(n) \forall n \geq n_0\}$$



- $O(g(n))$ é um limite assintótico superior que pode ou não ser assintoticamente firme.
 - **Exemplo4:** $2n^2=O(n^2)$ é firme, $2n=O(n^2)$ não é firme.
- $o(g(n))$ define um limite superior que não é assintoticamente firme.
 - **Exemplo5:** $2n=o(n^2)$, mas, $2n^2 \neq o(n)$
- Para $f(n)=O(g(n))$, temos $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ sendo válida para alguma constante $c > 0$.
- Para $f(n)=o(g(n))$, temos $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ sendo válida para toda constante $c > 0$.

Notação - ω

$$\omega(g(n)) = \{ f(n) : \forall c > 0 \exists n_0 > 0 \text{ tais que} \\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \forall n \geq n_0 \}$$



Propriedades

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty,$$

Propriedades

Transitividade:

$$f(n)=O(g(n)) \text{ e } g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

$$f(n)=\Omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$$

$$f(n)=\Theta(g(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$$

Reflexividade:

$$f(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = \Theta(f(n))$$

Propriedades

Simetria:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

Reflexividade:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$

Teorema:

$$f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

Propriedades

- *Analogia entre $f(n)$ e $g(n)$ com a e b reais:*
 - $f(n)=O(g(n))$ é como $a \leq b$.
 - $f(n)=\Omega(g(n))$ é como $a \geq b$.
 - $f(n)=\Theta(g(n))$ é como $a = b$.
 - $f(n)=o(g(n))$ é como $a < b$.
 - $f(n)=\omega(g(n))$ é como $a > b$.

- *Nos reais temos que $a > b$ ou $a = b$ ou $a < b$.*
- *Porém, podemos ter $f(n) \notin O(g(n))$ e $f(n) \notin \Omega(g(n))$.*

- **Exemplo6:** Não podemos comparar n e $n^{1+\sin(n)}$ usando notação assintótica.

Propriedades

$$f(n) = o(g(n)) \implies a^{f(n)} = o(a^{g(n)}), \text{ for any } a > 1.$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \not\Rightarrow a^{f(n)} = \Theta(a^{g(n)})$$

$$f_1(n) = O(g_1(n)) \text{ e } f_2(n) = O(g_2(n))$$

$$\implies f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \implies f(n) + g(n) = O(g(n))$$

Conceitos

- Uma função $f(n)$ é monotonicamente crescente se $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é monotonicamente decrescente se $m \leq n \Rightarrow f(m) \geq f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é estritamente crescente se $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$.
- Uma função $f(n)$ é estritamente decrescente se $m < n \Rightarrow f(m) > f(n)$.

Conceitos

➤ Função Piso

➤ $\forall x \in \mathbb{R}$, o maior inteiro menor que ou igual a x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

➤ Função teto

➤ $\forall x \in \mathbb{R}$, o menor inteiro maior que ou igual a x é denotado por $\lceil x \rceil$.

➤ $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$.

➤ As duas funções são monotonicamente crescentes.

Conceitos

➤ Aritmética modular

➤ Se a e b são inteiros e n é um inteiro positivo, então a é congruente com b modulo n se n divide $a-b$.

➤ $a \equiv b \pmod{m}$

➤ $b \pmod{n} = b - b \lfloor b/n \rfloor$.

➤ $0 \leq b \pmod{n} < n$

➤ **Exemplo 7:** $17 \equiv 5 \pmod{6}$?? $24 \equiv 14 \pmod{6}$??

➤ Teorema: Sejam a e b dois inteiros e n um inteiro positivo, então

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \pmod{m} = b \pmod{m}$$

Conceitos

➤ **Exponencial**

- $\forall n$ e $a \geq 1$, $f(n) = a^n$.
- $f(n) = a^n$ é monotonicamente crescente.
- Para todas as constantes reais a e b tal que $a > 1$,
$$n^b = o(a^n)$$
- Qualquer função exponencial com base a estritamente maior que 1 cresce mais rápido que qualquer função polinomial.

Conceitos

- Para $e=2.71828\dots$ temos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

- Para todo real x temos $e^x \geq 1+x$
- Para $|x| \leq 1$ temos $1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$
- Para $x \rightarrow 0$ temos $e^x = 1+x+\Theta(x^2)$
- Para todo x , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Conceitos

➤ **Logaritmo**

- $\lg n = \log_2 n$
- $\ln n = \log_e n$
- $\lg^k n = (\lg n)^k$
- $\lg \lg n = \lg(\lg n)$
- $\lg n + k = (\lg n) + k.$
- Para qualquer constantes reais a e b tal que $a > 0$,
 $\lg^b n = o(n^a)$
- Qualquer função polinomial positiva cresce mais rápido que qualquer função polinomial logaritmica.

Conceitos

- *Para todos os reais $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e n , temos*
 - $a = b^{\log_b(a)}$
 - $\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)$
 - $\log_b a^n = n \log_b a$
 - $\log_b a = \log_c a / \log_c b$
 - $\log_b(1/a) = -\log_b a$
 - $\log_b a = 1 / \log_a b$
 - $a^{\log_b(c)} = c^{\log_b(a)}$
- As bases dos logaritmos acima são diferentes de 1.

Conceitos

➤ Para $|x| < 1$ temos:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

➤ Para $x > -1$ temos

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

Conceitos

➤ **Factorial**

➤ Para todo n , a função $n!$ é dada por

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

➤ Temos que:

➤ $n! = o(n^n)$

➤ $n! = \omega(2^n)$

➤ $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

Conceitos

➤ *Função Iterativa*

- A notação $f^{(i)}(n)$ representa a função $f(n)$ iterativamente aplicada i vezes a partir de um valor inicial n , ou, recursivamente:

$$f^{(i)}(n) = n \text{ if } n=0$$

$$f^{(i)}(n) = f(f^{(i-1)}(n)) \text{ if } n>0$$

- **Exemplo:** Para $f(n) = 2n$, temos

$$f^{(2)}(n) = f(2n) = 2(2n) = 2^2n$$

$$f^{(3)}(n) = f(f^{(2)}(n)) = 2(2^2n) = 2^3n$$

$$\dots f^{(i)}(n) = 2^i n$$