Eletromagnetismo - Prova 1

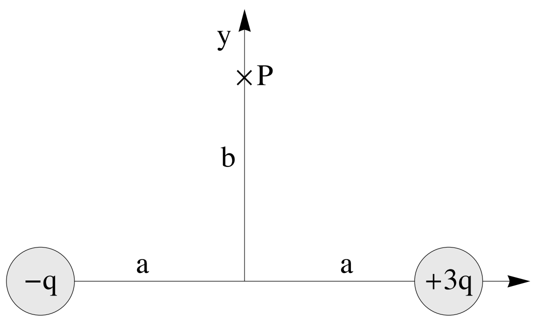
23 de abril de 2012

SOLUÇÃO

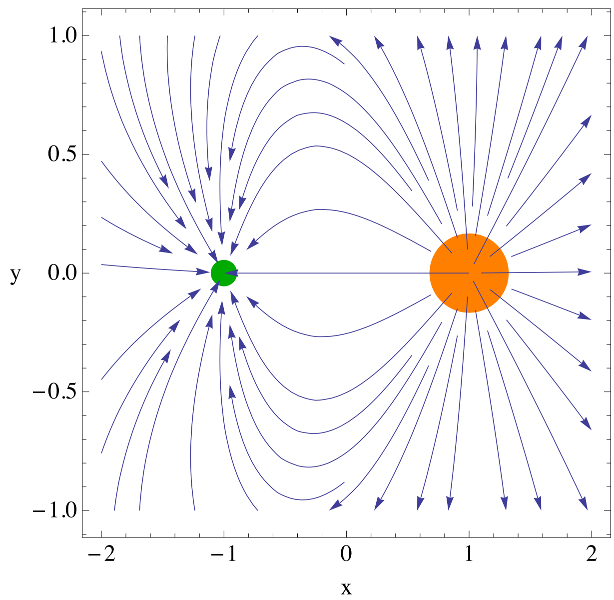
Exercício	Nota
1	
2	
3	
4	
5	

- A prova tem duração de 1h:40min.
- Resolva os problemas nos locais propriamente designados. Há espaço mais do que suficiente.
- Esta é uma prova de física: o foco é na física, não na matemática. Se os seus cálculos estiverem muito complicados, há uma grande probabilidade que você esteja fazendo algo errado.
- As questões somam um total 100 pontos.
- É possível obter 5 pontos extras no último item do último exercício (a nota máxima é 100 pontos).
- O gabarito estará disponível no mesmo dia.

(1) (20 pontos) Considere o sistema da figura abaixo.

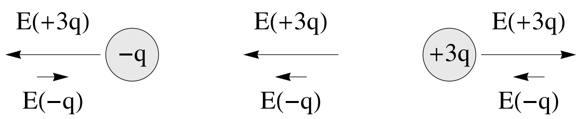


(a) (5 pontos) Esboce, na própria figura, as linhas de campo.



(b) (5 pontos) Além de infinitamente longe, onde mais o campo elétrico pode ser nulo? Explique claramente o seu raciocínio (você não precisa realizar nenhum cálculo).

☐ Entre as duas cargas.
☐ À direita da carga $3q$.
☒ À esquerda da carga $-q$.
☐ O campo elétrico será nulo somente no infinito.



Entre as cargas os campos são na mesma direção e, portanto, $E \neq 0$. À direita da carga $+3q$ o campo gerado por ela é muito maior que o campo gerado pela carga $-q$. Por outro lado, à esquerda da carga $-q$ o campo gerado pela carga $+3q$ já foi substancialmente reduzido devido à distância. Portanto, nesta região haverá um ponto onde $E = 0$.

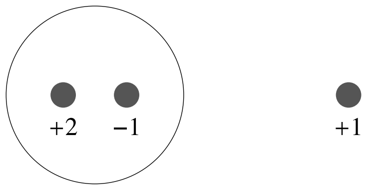
(c) (5 pontos) Calcule a energia cinética adquirida por um elétron ao ser trazido do infinito até o ponto P na figura.

A energia cinética será

$$T = -\Delta U = -e\Delta V = -e[V(P) - V(\infty)] = |e|V(P) = |e| \left[\frac{k(-q)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{k(3q)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

$$\therefore T = \frac{2k|e|q}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(d) (5 pontos) Considere agora o sistema da figura abaixo, onde o círculo representa uma superfície esférica que engloba duas das três cargas.



O fluxo através desta superfície será (explique):

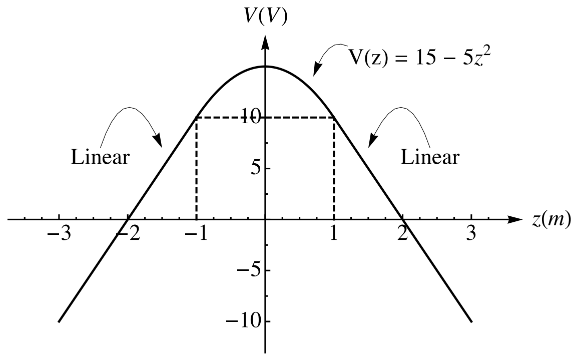
☒ Positivo.
☐ Negativo.
☐ Zero.
☐ Impossível de determinar com as informações fornecidas.

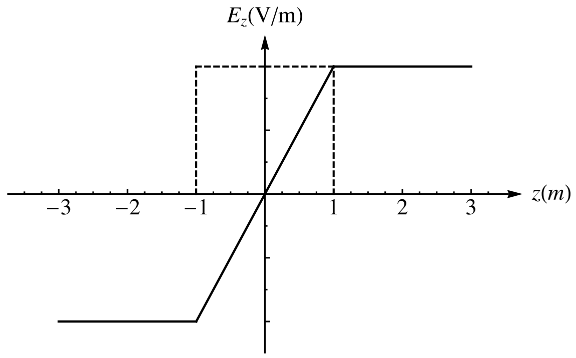
A superfície em questão é fechada e, portanto, podemos aplicar a lei de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{(+2)+(-1)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} > 0$$

O fluxo será positivo.

(2) **(20 pontos)** A figura abaixo mostra um gráfico do potencial elétrico em função de z. Esboce na figura ao lado a componente z do campo elétrico. Não esqueça de incluir a escala vertical no seu desenho.



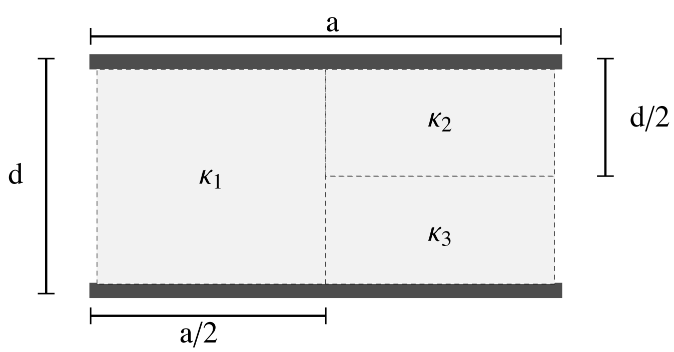


$$-3 \leq z \leq -1: \qquad E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z} = -\left[\frac{(10)-(-10)}{(-1)-(-3)}\right] = -10 \text{ V/m}$$

$$1 \leq z \leq 3: \qquad E_z = 10 \text{ V/m por simetria}$$

$$-1 \leq z \leq 1: \qquad E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[15 - 5z^2\right] = 10z$$

(3) **(20 pontos)** Um capacitor formado por duas placas quadradas de aresta a é preenchido com três materiais dielétricos distintos, dispostos na forma denotada na figura abaixo. Calcule a capacitância do sistema em termos de a, d, κ_1,κ_2 e κ_3 (assuma $a \gg d$).



κ_2 e κ_3 podem ser associados como capacitores em série:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{(d/2)}{\epsilon_0 (A/2)\kappa_2} + \frac{(d/2)}{\epsilon_0 (A/2)\kappa_3} = \frac{d}{\epsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}\right)$$

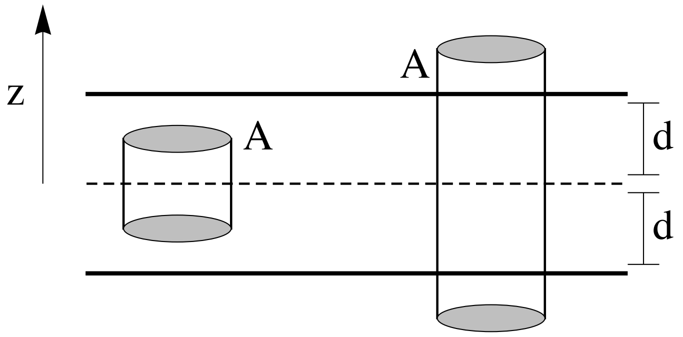
$$\therefore C_{23} = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}$$

O resultado pode então ser associado em paralelo com κ_1:

$$C = C_1 + C_{23} = \frac{\epsilon_0 (A/2)\kappa_1}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}$$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}\right]$$

(4) (20 pontos) Considere uma placa maciça, infinita, de espessura $2d$, feita de um material não condutor e carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ uniforme (vide figura). Calcule o campo elétrico em todo o espaço, inclusive para $-d \leq z \leq d$ (z é a distância até o centro da placa). Sua resposta deve conter apenas as grandezas mencionadas no enunciado, constantes fundamentais e números. O campo é um vetor e, portanto, não se esqueça de explicitar sua direção e sentido.



Por simetria é possível inferir que o campo será na direção z: $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{k}}$. Para $|z| \leq d$ escolho como superfície de Gauss o cilindro esquerdo da figura. O fluxo será não-nulo somente nas "tampas" e, portanto:

$$\Phi = 2EA = \frac{\rho(2Az)}{\epsilon_0}$$

onde $Q_{\text{int}} = \rho(2Az)$ e $2Az$ é o volume do cilindro no qual a carga interna está contida. Assim

$$E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

Para $|z| \geq d$ escolho o cilindro da direita. Neste caso a carga interna será $\rho(2Ad)$ uma vez que só a parcela do cilindro que se encontra dentro da placa possui carga. Portanto, como $\Phi = 2EA$,

$$E = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

O campo é exatamente o mesmo do problema (2), sendo constante para $|z| > d$ e linear caso contrário.

(5) **(20 pontos)** Considere um capacitor de placas paralelas com capacitância C. Ele é carregado através de uma bateria, que em seguida é desconectada. Então, as placas são afastadas por uma distância *adicional* d. Durante o processo medimos experimentalmente que a diferença de potencial entre as placas mudou por um fator 4. Abaixo estão uma série de perguntas sobre como mudam diferentes grandezas do sistema; apesar de estarem relacionadas, você não precisa das respostas anteriores para responder a próxima. Em todos os casos explique detalhadamente o seu raciocínio.

(a) (5 pontos) A diferença de potencial mudou por um fator 4. Mas ela aumentou ou diminuiu?

Como a distância aumentou, C diminuiu. Como $\Delta V = Q/C$ e Q permanece constante (pois a bateria foi desconectada), o potencial deve ter **aumentado**.

(b) (5 pontos) Qual foi a variação do campo elétrico? Não se esqueça de explicitar se esta mudança foi positiva ou negativa.

$E = \sigma/\epsilon_0$. Como a carga permanece a mesma (pois a bateria foi desconectada), o campo **não pode ter sofrido nenhuma alteração**.

(c) (5 pontos) Qual foi a mudança na energia armazenada no sistema? Não se esqueça de explicitar se esta mudança foi positiva ou negativa.

Usando que $U = \frac{1}{2}Q\Delta V$, a mudança em U foi a mesma que em ΔV; ou seja, **aumentou por um fator 4**.

(d) (5 pontos) Um dielétrico de constante dielétrica κ é inserido entre as placas, preenchendo completamente o volume entre elas. Qual será, agora, a mudança na energia armazenada no sistema? Ela aumentou ou diminuiu?

$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. A inclusão do material aumenta C por um fator κ e, portanto U **diminuirá por um fator κ**.

(e) (**Bônus:** 5 pontos extras) Qual deve ser o volume deste dielétrico para que ele preencha completamente o espaço entre as placas? (Sua resposta pode contar apenas variáveis definidas no enunciado, constantes fundamentais ou números).

Precisamos expressar o volume em termos das grandezas que conhecemos. Se x era a separação original das placas, então

$$\text{Volume} = A(x + d)$$

Como originalmente tínhamos $C = \epsilon_0 A/x$, então $A = Cx/\epsilon_0$. Agora precisamos expressar x em função de d. O potencial aumentou por um fator 4, o que significa que a capacitância deve ter diminuído pelo mesmo fator. Assim

$$\frac{C_{\text{antes}}}{C_{\text{depois}}} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{x}}{\frac{\epsilon_0 A}{x+d}} = 4$$

Ou seja,

$$\frac{x+d}{x} = 4 \Longrightarrow x = \frac{d}{3}$$

Com isso

$$\text{Volume} = \frac{Cx}{\epsilon_0}(x + d) = \frac{4}{9}\frac{Cd^2}{\epsilon_0}$$