Mecânica Estatística Lista de Exercícios. Data de entrega 1 de outubro.

Nestor Caticha

16 de setembro de 2016

Façam os exercícios propostos no capítulo 1 das Notas (começando na página 24)

Façam os exercícios abaixo

Exercício N+1

Sejam $\{x_i\} = (X_1, X_2 ... X_N)$ variáveis aleatórias com médias μ_i e variâncias σ_i^2 conhecidas e finitas.

- (A) Obtenha a variância de $z = Ax_1 + B$
- (B) Suponha que sejam independentes, encontre uma expressão para o valor esperado do produto $I\!E(y)$, $y = \prod_i^N x_i$, e
- (C) a variância da sua soma $\mathrm{Var}(w)$ onde $w = \sum_i x_i$

Agora suponha que não sejam independentes, por exemplo $x_1 = \cos\theta$ e $x_2 = \sin\theta$, onde θ esta uniformemente distribuida entre 0 e 2π.

- Mostre que $I\!E(x_1 x_2) = I\!E(x_1) I\!E(x_2)$ e $\mathrm{Var}(x_1 + x_2)$ =$\mathrm{Var}(x_1)$+$\mathrm{Var}(x_2)$

mas esta propriedade não vale para todas as variáveis dependentes.

A covariância de x_1 e x_2 é definida por $\mathrm{Cov}(x_1, x_2) = I\!E((x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2))$.

- Mostre que se x_1 e x_2 forem independentes sua covariância é zero.
- Construa ao menos um exemplo de variáveis dependentes de covariância nula, o que mostra que covariância nula não equivale a independência

Exercício N+2 Seja $Y + X_1 + X_2$. Discuta a diferença entre $P(Y = y)$ a distribuição da soma e $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$, para o produto lógico, que denotaremos por $P(x_1, x_2)$ a chamamos de distribuição conjunta de X_1 e X_2 . Considere também a variável Z que toma valores iguais ao produto dos valores de X_1 e X_2 : obtenha uma expressão para $P(Z = z)$ quando $z = x_1 x_2$.

Exercício N+3 Encontre uma expressão geral para os momentos centrais de uma distribuição normal, isto é, o valor esperado $I\!E\left((x-\mu)^k\right)$ para qualquer $k > 0$ inteiro.

Calcule os cumulantes para a distribuição normal , ou seja

$$P(x|\mu\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Calcule a função característica. Mostre que os cumulantes $C_s = 0$ para $s \geq 3$. Segue que as quantidades adimensionais u_s são nulas para $s \geq 3$. O que significa, frente a este resultado para a gaussiana, o decaimento de $u_s^Y(n) = n^{1-s/2} u_s^x$?

Exercício N+4 Seja a função característica de uma variável aleatória $\hat{P}(k)$, dada por uma função $f(k;\theta)$ onde θ representa os parâmetros da família. Definição: Uma distribuição é dita estável se for satisfeita a seguinte condição

$$(f(k;\theta))^n = f(k;\tilde{\theta})$$

Mostre que a distribuição de Cauchy $P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{x^2+b^2}$ é estável. Mostre portanto a soma de variáveis de Cauchy não é gaussiana. Discuta primeiro a variância de x para ver onde os argumentos acima falham.

Exercício N+5: Mudança de variáveis Suponha que as variáveis y_1 e y_2 tenham distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$ e sejam independentes.

- 5 a) Encontre a distribuição da variável $z = -\ln y_1$.

Dados y_1 e y_2 obtemos x_1e x_2 a partir da transformação:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln y_1}\cos 2\pi y_2 \quad (1)$$

$$x_2 = \sqrt{-2\ln y_1}\sin 2\pi y_2 \quad (2)$$

- 5 b) Encontre a distribuição conjunta $P_X(x_1, x_2)$

- 5 c) Suponha que tenhamos informação que nos permite atribuir probabilidades a $P(a|I)$ e $P(m|I)$ as probabilidades de altura e massa respectivamente em membros de uma população. Suponha que a e m sejam independentes e encontre uma expressão para a probabilidade $P(b|I)$ da variável $b = a/m^{1/3}$, que representa uma característica geométrica do corpo. Suponha que a e m não sejam independentes, o que faltaria para encontrar $P(b|I)$?

ExercícioN+6: frequência e probabilidade Considere a seguinte informação I= "Uma moeda é jogada para cima, bate no teto, no ventilador do teto, e cai no chão plano". Há vários motivos para atribuir $p = 1/2$ à probabilidade que caia a *cara* para cima, isto é $p = P(s = 1|I) = 1/2$ e $q = P(s = -1|I) = 1/2$. Poderiamos considerar outra experiência I' onde p, q tem outro valores (entre zero e um). Consideremos as jogadas independentes, para duas jogadas i e j quaisquer $P(s_i|s_j I') = P(s_i|I')$. Chame m o número de caras para cima, quando a moeda é jogada n vezes. A frequência de caras é definida por $f = m/n$

- **(A)** Mostre que a distribuição de m, é a distribuição binomial:

$$P(m|N = nI') = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} \quad (3)$$

- **(B)** Calcule $< m >$, $< m^2 >$. [Dica: Use a expansão binomial de (i) $(p+q)^n$, (ii) $p\frac{\partial}{\partial p}p^m = mp^m$ e (iii) a normalização $p + q = 1$; resposta: $< m >= np$, $< m^2 >= n^2p^2 + np(1-p)$]

- **(C)** Refaça a dedução da desigualdade de Chebyshev para distribuições de variáveis que tomam valores discretos e mostre que para ϵ fixo, a probabilidade que a frequência f se afaste do *valor esperado* $< f >= p$ por mais que ϵ, cai com $1/n$.

- **(D)** Discuta e pense: Então de que forma a frequência está ligada à probabilidade? A frequência *converge*, quando n cresce, para a probabilidade p. Toda convergência precisa ser definida em termos de uma distância, que vai para zero quando se toma algum limite. É fundamental entender que a distância aqui não é ϵ, mas é a **probabilidade** que f se afaste de p por mais de ϵ. Assim, a frequência f converge **em probabilidade** à probabilidade p.

A conclusão do exercício acima é fundamental. Como poderiamos definir probabilidades em termos de frequência, se para mostrar que a frequência está associada à probabilidade usamos o conceito de convergência em probabilidade? Discuta se é errado ou não definir um conceito usando esse conceito na definição.

Mas o exercício acima mostra porque pode parecer sedutor usar a frequência em lugar da probabilidade. Se tivermos informação I' sobre uma experiência e dados sobre uma sequência de experimentos nas condições I' podemos atribuir valor à probabilidade de forma mais segura. A frequência é informação que pode ser usado para atribuir um número à probabilidade, mas não é o único tipo de informação para fazer isso.

Excercicio N+8: Divirtam-se com o seguinte exercício. Uma sociedade de N agentes tem que escolher um entre dois candidatos A e B.

- (A) Um pesquisa de opiniões feita com n eleitores tem como resultado n_A e n_B a favor de cada um dos candidatos. Supondo que $N >> n$, qual é confiança que se pode ter sobre o uso do resultado da pesquisa como indicador do resultado da eleição caso não hajam mudanças de opiniões. Discuta se é razoável modelar a eleição como uma urna de Bernoulli.

Agora vamos fazer algo mais interessante, mas que só requer o uso das regras de soma e produto, que são bem estabelecidas e algumas suposições sobre o comportamento humano que podem ser muito discutíveis. O objetivo é mostrar ao aluno que tem as ferramentas para modelar situações muito mais interessantes. Mas as pessoas conversam e mudam de opiniões. Suponha que no dia t as probabilidades de voto sejam $p_A(t)$ e $p_B(t)$ respectivamente. A dinâmica de mudanças de opiniões é bem complicada mas podemos fazer um modelo simples: Foquemos a atenção em um eleitor, este se reune com mais dois e passa a ter a opinião da maioria. Ou seja do grupo de três, se dois ou três apoiam A em t, o eleitor em foco passa a apoiar A no dia $t+1$ e a apoiar B se somente 0 ou 1 dos membros do grupo de três apoiavam A. Suponha que as probabilidades de cada um dos membros sejam independentes das dos outros membros do grupo. Para o grupo de três escreva como função de $p_A(t)$ a probabilidade da asserção

- (B1) $A_{01} =$ "0 ou 1 apoiam A"

- (B2) $A_{23} =$ "2 ou 3 apoiam A"

que são respectivamente $p_B(t+1) = f(p_B(t))$ e $p_A(t+1) = f(p_A(t))$ (note que por simetria são a mesma função com argumentos diferentes.) Faça o gráfico de

$p_A(t+1) = f(p_A(t))$ contra $p_A(t)$. Inclua no gráfico a identidade (diagonal). O cruzamento de $f(p_A(t))$ com a diagonal indica $p_A(t+1) = p_A(t)$, chamado de ponto fixo.

- (C1) Identifique os pontos fixos
- (C2) Discuta a estabilidade dos pontos fixos. Isto é, se ao perturbar um pouco o ponto fixo este se afasta e se move na direção de outro ponto fixo (instável) ou se aproxima (estável) do ponto fixo.

(Mais interessante ainda) Existem pessoas que ao interagir com o grupo decidem ser do contra. Suponha que a probabilidade de alguém ser do contra seja c. Suponha que a probabilidade de um eleitor ser do contra é independente de qualquer outra coisa. Então com a notação anterior, e usando as regras da soma e do produto mostre que

- (D1) $p_A(t+1) = (1-c)f(p_A(t)) + cf(p_B(t))$
- (D2) Mostre que para $c > 1/6$ o valor $p_A = .5$ é o único ponto fixo estável. Portanto podemos esperar um resultado da eleição em que a sociedade está dividida em frações aproximadamente iguais.