Les 201
Matemática Aplicada à Economia

Aulas 13-14

Derivadas – Aplicação em Economia

Derivadas de Ordem Superiores
Derivadas Parciais
Determinante Jacobiano

19 e 20/09/2016

Aplicações da 1a. Derivada em Economia

Dada a função primitiva:

y = f(x), que representa a função total

y´= f´(x) = a função derivada é sua função marginal

$$CT = C(x)$$

$$CMg = \frac{dCT}{dx}$$

$$CMe = \frac{CT}{x}$$

$$CMeMg = \frac{dCMe}{dx}$$

Relações entre CMg e CMe

Seja: *C = f(Q) então* $CMe = \frac{C(Q)}{Q}$

Qual a taxa de variação do CMe quando a Q varia?

$$\frac{dCme}{dQ} = ? \quad Regra\ do\ Quociente$$

$$\frac{dCMe}{dQ} = \frac{C'(Q).Q - C(Q).Q'}{Q^2} \qquad = \frac{C'(Q).Q}{Q^2} - \frac{C(Q).1}{Q^2} =$$

$$\frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{1}{Q}[CMg - CMe]$$

Portanto:

$$\frac{dCMe}{dQ} = \frac{1}{Q}[CMg - CMe]$$

Relações entre CMg e CMe

$$\boxed{\frac{dCMe}{dQ} = \frac{1}{Q}(CMg - CMe)}$$

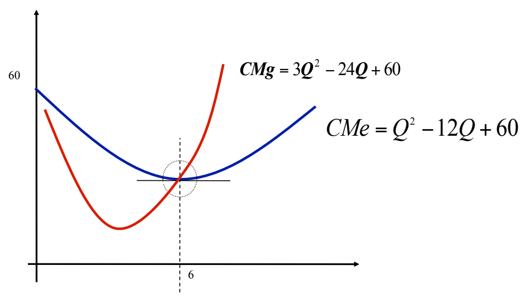
Considere Q>0

$$CMg > CMe \Rightarrow \frac{dCMe}{dQ} > 0 \Rightarrow \text{CMe é } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$CMg < CMe \Rightarrow \frac{dCMe}{dQ} < 0 \Rightarrow \text{CMe é } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$CMg = CMe \Rightarrow \frac{dCMe}{dQ} = 0 \Rightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$C_T = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$



Relações entre Receita Média e Receita Marginal

R (x) = px

x = número de unidades vendidas

p = preço unitário

Caso 1: **MERCADOS NÃO CONCORRENCIAIS (oligopólios, monopólios)**: preço está relacionado com a quantidade *x* vendida

p = f(x) (função demanda)

A função receita é dada por:

R(x) = px = f(x)x

→ OBS: a função Receita é sempre POSITIVA

Receita Média

Dada a função receita total R(x), a função receita média (receita por unidade) é definida como:

$$RMe = \frac{R(x)}{x} = \frac{x.f(x)}{x} = f(x) = p$$

→ A curva da Receita Média e da Demanda são idênticas

→ RT: sempre positiva

Ela pode aumentar ou diminuir à medida que x aumenta

→ Portanto, a RMg pode ser positiva ou negativa

Ex: Considere a função demanda:

$$p(q) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}q$$

Receita total

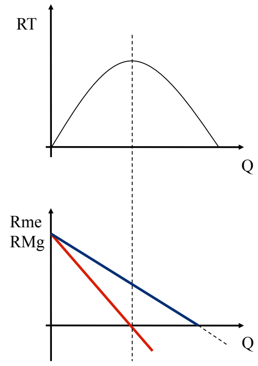
$$R_T = p(q).q = (\frac{5}{2} - \frac{3}{4}q)q = \frac{5}{2}q - \frac{3}{4}q^2$$

RMg

$$RMg = \frac{d(R_T)}{dq} = d(\frac{5}{2}q - \frac{3}{4}q^2)$$

$$RMg = \frac{5}{2} - \frac{6}{4}q = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}q$$

$$R(q) = \frac{5}{2}q - \frac{3}{4}q^2$$



Receita Marginal e Receita Média

Dada a Receita Média: RMe = 15 – Q, determine a Receita Marginal (RMg)

Genericamente

$$RMe = f(Q)$$

$$R_T = f(Q).Q$$

$$RMg = \frac{dR_T}{dQ} = f'(Q).Q + \overbrace{f(Q)}^{RMe}.1$$

$$RMg = f'(Q).Q + RMe$$

$$RMg - RMe = \underbrace{f'(Q)}_{\substack{inclinação \\ Curva\ RME}} . \underbrace{Q}_{\substack{\text{Nível} \\ \text{Produção}}}$$

Relações entre P,Rme,RMg

Caso 2: Concorrência Perfeita

- Preço é constante: dado no mercado
- O produtor enxerga sua curva de demanda uma reta horizontal

Receita Total

$$R_T = P.Q$$

$$RMe = \frac{R_T}{Q} = \frac{PQ}{Q} = P$$

Receita Marginal

$$RMg = \frac{dR_T}{dQ} = d(P.Q)$$

$$RMg = \frac{dP}{dQ}Q + P.\frac{dQ}{dQ} = 0 + P = P$$

Relações entre P,Rme,RMg

Sob concorrência imperfeita

- Preço é função da quantidade: *P=f(Q)*
- RMe é função decrescente da quantidade

$$RMg - RMe = \underbrace{f'(Q)}_{\substack{inclinação \\ RMe}}.Q < 0$$

$$RMg < RMe = P$$

Função Lucro

$\pi\ (x) = R(x) - C(x)$

Função Lucro Marginal: mede a taxa de variação de π quando x varia de uma unidade

Ex: Suponha que:

$C(x) = 100x + 20.000$

$R(x) = -0{,}002x^2 + 400x$

a)Qual a função lucro?

b) Qual a função lucro marginal?

c) Qual o Lucro Mg para x = 2000?

Função Lucro

a) $\pi\ (x) = R(x) - C(x)$

$=(-0{,}002x^2+400x)-(100x+20000)$

$\pi(x)=-0{,}002x^2 +300x-20000$

b) Qual a função lucro marginal?

$\pi'(x)=-0{,}004x +300$

c) Qual o Lucro Mg para x = 2000?

$\pi'(2000)=-0{,}004(2000) +300= 292$

Interpretação: Lucro adicional com a venda da 2001 unidade

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

A derivada *f´* de uma função *f* também é uma função. Portanto, sua derivada pode também ser considerada

Continuando o processo, podemos calcular a 2a. derivada, a 3a. derivada e demais derivadas de ordem superior (sempre que as mesmas existirem)

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

Notações:

$f'(x);\ f''(x);\ f'''(x),\ \ldots,\ f^{n}(x)$

ou

$D^1 f(x);\ D^2 f(x);\ D^3 f(x);\ \ldots,\ D^n f(x)$

ou

$$\frac{dy}{dx};\frac{d^2y}{dx^2};\frac{d^3y}{dx^3}\ \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

y = f(x) = Função primitiva

1a. Derivada $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Taxa de variação da FUNÇÃO PRIMITIVA quando x varia

2a. Derivada $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

Taxa de variação da 1a. DERIVADA quando x varia

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

y = f(x) = Função primitiva

3a. Derivada y´ ´ ´ = f´ ´ ´(x) = $\frac{d^3y}{dx^3}$

Taxa de variação da 2a. DERIVADA quando x varia

Enésima Derivada = *fⁿ(x)* = $\frac{d^ny}{dx^n}$

Taxa de variação da (n-1) DERIVADA quando x varia

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

Ex: Determine a derivada de ordem 3 da função definida por y = $x^{2/3}$

Derivadas Sucessivas (de ordem superior)

Ex: O IPC de uma economia é dado pela função:

IPC(t) = -0,2 t^3 + 3t^2 + 100 ($0 \le t \le 9$), onde t corresponde ao início de 1998.

Calcule IPC´(6) e IPC´´(6). Interprete os resultados

Regra da Cadeia – Aplicação em Economia

- Dada uma função *z = f(y)*
- Por sua vez, *y* é função de outra variável x:

y = g(x)

→ então a derivada de *z* com respeito a *x* é igual a derivada de z com respeito a y multiplicada pela derivada de y com respeito a x.

$z = f(y)$

$y = g(x)$

$z = f(g(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y).g'(x)$$

Regra da Cadeia: intuição

z=f(y) e y=g(x)

Δx → vai haver *Δ y* dado pela função *g(x)*

Δy → irá provocar *Δ z* através da função *f(y)*

Reação em cadeia:

$\Delta x \xrightarrow{\text{Via } g(x)} \Delta y \xrightarrow{\text{Via } f(y)} \Delta z$

Extensão da regra da cadeia para três ou mais funções:

z = f(y)

y = g(x)

x = h(w)

dz/dw = ?

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dw} = f'(y).g'(x).h'(w)$$

Regra da Cadeia - Exemplos

Dada a função Receita Total de uma firma *R = f(Q),* onde o nível de produção Q é função do insumo trabalho L, ou seja, *Q = g(L)*

Achar a variação da Receita por variação da unidade de trabalho, ou seja, $\frac{dR}{dL}$

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dR}{dQ}\frac{dQ}{dL} = f'(Q)g'(L)$$

$$\underbrace{\frac{dR}{dL}}_{\text{Receita Mg do Trabalho}} = \underbrace{\frac{dR}{dQ}}_{\text{Receita Mg}} \underbrace{\frac{dQ}{dL}}_{\text{Produto do Trabalho}}$$

Diferenciação Parcial

- Até agora: derivadas de funções de uma única variável independente
- Análise estática comparativa: funções com mais de uma variável
- Dada uma função $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde todas as variáveis x são independentes (podem variar sem afetar as demais).
- Se a variável x_1 sofre a variação Δx_1, enquanto as demais permanecem inalteradas, ocorre variação em y → Δ y

Derivadas Parciais

O quociente diferencial será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

∴ A *derivada parcial* de y com respeito a x_1

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = f_1 \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \qquad f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \qquad f_3 = \frac{\partial y}{\partial x_3}$$

Exemplos

Achar as derivadas parciais

a) $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_2^2$

b) $y = f(u,v) = (u + 4)(3u + v)$

Achar as derivadas parciais

c) $y = \frac{(3u - 2v)}{u^2 + 3v}$

Derivadas parciais: Aplicação e Economia

Dada uma função de produção:

$Q = f(K, L)$, onde:

Q = quantidade produzida; K = capital; L = trabalho

Derivadas parciais:

$\frac{\partial Q}{\partial K} =$ *Taxa de variação da quantidade produzida com respeito à variações infinitesimais no capital, quando o outro insumo (trabalho) é mantido constante = Produto Marginal da Quantidade*

$\frac{\partial Q}{\partial L} =$ *Taxa de variação da quantidade produzida com respeito à variações infinitesimais no trabalho, quando o outro insumo (capital) é mantido constante = Produto Marginal do Trabalho*

Derivadas Parciais - Interpretação Geométrica

Derivada Parcial: é a medida da taxa de variação infinitesimal (instantânea) de alguma curva específica

⟹ Inclinação de alguma curva específica

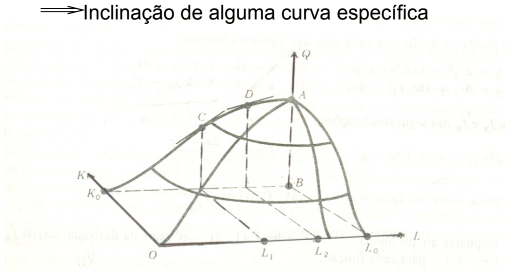


Figura 7.4

Derivadas parciais: Aplicação e Economia

$$\text{Derivadas Parciais}\begin{cases}\textit{Análise} \\ \textit{Estática Comparativa} \\ \\ \textit{Testar Dependência Linear} \\ \textit{ou não linear em sistemas de} \\ \textit{n equações e n incógnitas}\end{cases}$$

Determinante Jacobiano

Determinante Jacobiano

- É utilizado para verificar a existência de dependência funcional em conjunto de *n* equações com *n* variáveis (não necessariamente lineares)
- Possui como elementos derivadas parciais de 1a. Ordem

Dado o sistema:

$$y_1 = f^1 (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$$
$$y_2 = f^2 (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = f^n (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n),$$

Onde f^n denota a enésima equação, podemos derivar um total de n^2 derivadas parciais, formando o *Determinante Jacobiano*

Determinante Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Se |J| = 0, as equações tem dependência funcional

Determinante Jacobiano

Ex:

$y_1 = 2x_1 + 3x_2$

$y_2 = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Exercicios – Chiang 7.4

Dada a função de produção abaixo, calcule as funções *Produto Marginal do Capital* e *Produto Marginal do Trabalho*

$$Q = 96K^{0,3}L^{0,7}$$

Exercicios – Chiang 7.4

A função utilidade de um indivíduo assume a seguinte forma:

$$U = U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 (x_2 + 3)^3$$

Onde U = Utilidade Total e x_1 e x_2 são as quantidades das duas mercadorias consumidas.

a) Encontre a função utilidade marginal de cada mercadoria

b) Calcule o valor da utilidade marginal de x_1 quando são consumidas 3 unidades de cada mercadoria.