Fisica I - IO

Energia Potencial e Conservação de Energia

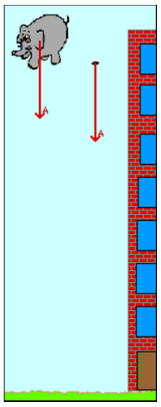
Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Energia Potencial Gravitacional

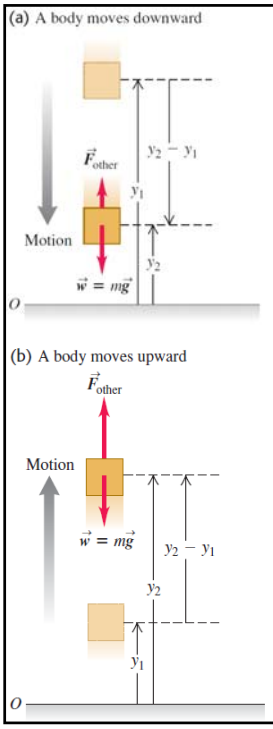
Energia Potencial : Energia associada com a posição. Este tipo de energia fica ***armazenada*** no sistema e pode ser transformada em trabalho.

A energia associada ao peso do corpo e sua altura com relação ao solo é chamada de ***energia potencial gravitacional.***



Essa energia potencial faz com que o corpo possa acelerar, adquirindo então energia cinética.

Como veremos, não se cria energia, apenas podemos a transformar de uma forma para outra.
Energia Potencial Gravitacional -> Energia Cinética
Energia Potencial Elastica -> Energia Cinética
Energia Potencial Gravitacional -> Energia Potencial Gravitacional
Etc.



Trabalho da Força peso, quando um corpo cai ($F_{other} < w$)de uma altura y_1 para outra y_2. O peso e o deslocamento estão na mesma direção , de modo que o trabalho feito no corpo pelo seu peso é positivo:

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Esta formula também está correta quando o corpo se move para cima ($F_{other} > w$), uma vez que neste caso (y_1 - y_2) é negativo.

Esta expressão para o trabalho indica que podemos descrever W_{grav} em termos dos valores da quantidade *mgy* no inicio e no final do deslocamento. Esta quantidade, o produto do pelo *mg* por uma altura *y* acima do eixo de coordenadas é denominada ***energia potencial gravitacional***:

$$U_{grav} = mgy \quad \text{(gravitational potential energy)}$$

O valor inicial de $U_{grav,1} = mgy_1$ e valor final é $U_{grav,2} = mgy_2$. ***A mudança na energia gravitacional é o valor final menos o valor inicial***, ou seja, $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$

Podemos expressar o trabalho W_{grav} feito pela força gravitacional durante o deslocamento de y_1 para y_2 como,

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav}$$

Note que o sinal negativo é ***essencial***.

Quando o corpo sobe, y aumenta, o trabalho feito pela força gravitacional é negativo, e o potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$).

Quando o corpo cai, y decresce, a força gravitacional faz trabalho positivo e a energia potencial gravitacional diminui ($\Delta U_{grav} < 0$).

É como se você estivesse tirando dinheiro de um banco (diminuindo U_{grav}) e gastando (fazendo trabalho positivo.)

A unidade de energia potencial é o **Joule** (J), a mesma unidade do trabalho.

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Conservação da Energia Mecânica

(forças gravitacionais)

Vamos assumir que a única força agindo sobre um corpo seja a força peso (***F_{other}***=*0*). O corpo então se move no ar (sem resistência) e pode estar se movendo para cima ou para baixo.

Quando o corpo está no ponto y_1 sua velocidade é v_1 e no ponto y_2 sua velocidade é v_2.

O teorema do trabalho-energia diz que o trabalho feito em um corpo é igual à variação de sua energia cinética:

$$W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$$

Se somente a gravidade está agindo no sistema, :

$$W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

Logo, $\Delta K = -\Delta U_{grav}$ or $K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$

Podemos escrever como,

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$

(if only gravity does work)

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

A soma $K + U_{grav}$ (energia cinética e energia potencial) é denominada *E*, a energia mecânica total do sistema

Por sistema consideramos a massa *m* e a Terra, uma vez que a energia potencial gravitacional *U* é uma propriedade de ambos os corpos.

Assim, no ponto 1: $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$

Assim, no ponto 2: $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$

$$E_1 = E_2$$

Como os pontos 1 e 2 são arbitrários, a energia mecânica do sistema *E* é a ***mesma*** para ***todos*** os pontos durante o movimento.

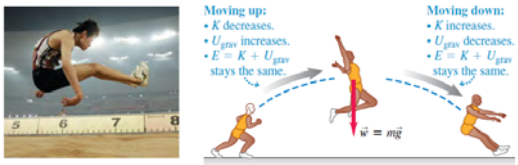
$$E = K + U_{grav} = \text{constant}$$

(if only gravity does work)

Quando uma quantidade é sempre a mesma, é chamada de quantidade conservada.

Quando somente a força peso age, a energia mecânica é conservada no sistema.

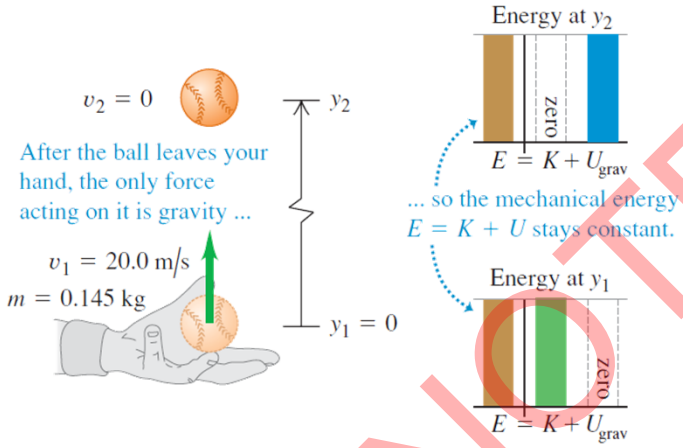
7.3 While this athlete is in midair, only gravity does work on him (if we neglect the minor effects of air resistance). Mechanical energy *E*—the sum of kinetic and gravitational potential energy—is conserved.



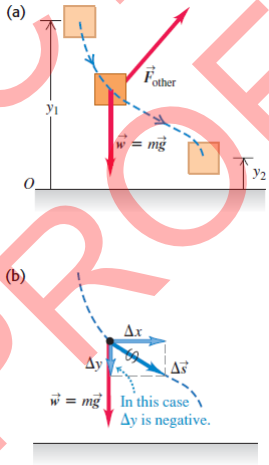
LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Example 7.1 **Height of a baseball from energy conservation**

You throw a 0.145-kg baseball straight up, giving it an initial velocity of magnitude 20.0 m/s. Find how high it goes, ignoring air resistance.



Energia Potencial Gravitacional para movimento em curva



$$\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j} \qquad \Delta\vec{s} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}$$

$$\vec{w}\cdot\Delta\vec{s} = -mg\hat{j}\cdot(\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}) = -mg\Delta y$$

$$W_{grav} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2$$

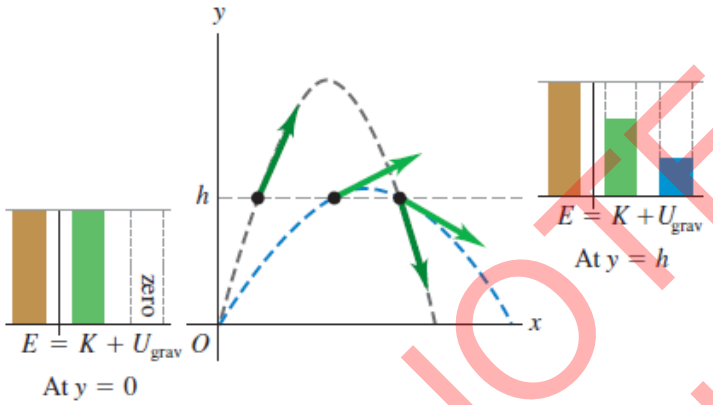
$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

"Mesmo que o caminho de um corpo entre dois pontos seja em curva, o trabalho total feito pela força gravitacional depende apenas da diferença de altura entre os pois pontos do caminho"

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

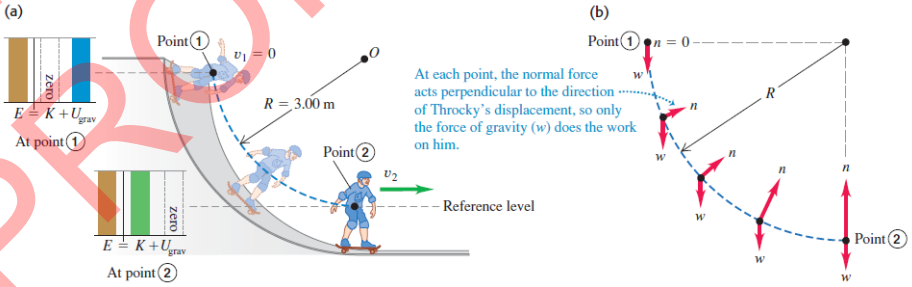
Conceptual Example 7.3 **Energy in projectile motion**

A batter hits two identical baseballs with the same initial speed and from the same initial height but at different initial angles. Prove that both balls have the same speed at any height h if air resistance can be neglected.



Example 7.4 **Speed at the bottom of a vertical circle**

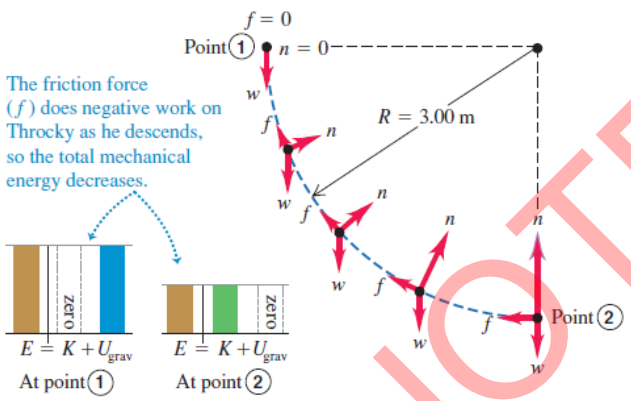
Your cousin Throckmorton skateboards from rest down a curved, frictionless ramp. If we treat Throcky and his skateboard as a particle, he moves through a quarter-circle with radius $R = 3.00$ m (Fig. 7.9). Throcky and his skateboard have a total mass of 25.0 kg. (a) Find his speed at the bottom of the ramp. (b) Find the normal force that acts on him at the bottom of the curve.



LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Example 7.5 **A vertical circle with friction**

Suppose that the ramp of Example 7.4 is not frictionless, and that Throcky's speed at the bottom is only 6.00 m/s, not the 7.67 m/s we found there. What work was done on him by the friction force?



Energia Potencial Elástica

Energia armazenada em um material por sua deformação (elástica).

Trabalho feito para comprimir (ou distender) uma mola de uma posição x_1 para uma posição x_2:

$$W = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(work done } on \text{ a spring)}$$

Pela terceira lei de Newton, o trabalho feito pela mola é o negativo do trabalho feito nela:

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(work done } by \text{ a spring)}$$

De modo similar ao caso gravitacional, podemos expressar o trabalho feito pela mola em termos de uma dada quantidade no inicio e no fim do deslocamento. Esta quantidade será $\frac{1}{2}kx^2$, e podemos definir a energia potencial elástica:

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(elastic potential energy)}$$

Dada em Joule (J)

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Desta forma, o trabalho feito pela energia potencial elástica será dado por:

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el}$$

Do teorema trabalho-energia cinética $W_{tot} = K_2 - K_1$ independentemente do tipo de forças envolvidas.

Se a força elástica for a única realizando trabalho no corpo,

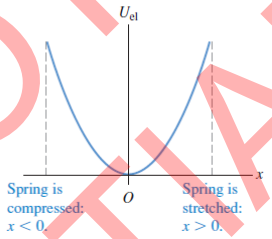
$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

E assim, obtemos do teorema trabalho-energia cinética:

$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \quad \text{(if only the elastic force does work)}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{(if only the elastic force does work)}$$

7.14 The graph of elastic potential energy for an ideal spring is a parabola: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, where x is the extension or compression of the spring. Elastic potential energy U_{el} is never negative.



Situações com energia potencial elástica e gravitacional

O que acontece quando tanto a força gravitacional quanto a elástica estão agindo no sistema?

E se o trabalho total também é feito por forças que não podem ser descritas em termos de uma energia potencial, como por exemplo a força de atrito ou resistência do ar?

Bem, o trabalho total será a soma do trabalho feito pela força gravitacional (W_{grav}), o trabalho feito pela força elástica (W_{el}), e o trabalho feito por outras forças (W_{other})

$$W_{tot} = W_{grav} + W_{el} + W_{other}$$

Podemos reescrever o teorema trabalho-energia cinética para este caso geral, usando as expressões da energia potencial gravitacional e elástica:

$$K_1 + U_{grav,1} + U_{el,1} + W_{other} = K_2 + U_{grav,2} + U_{el,2} \quad \text{(valid in general)}$$

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2 \quad \text{(valid in general)}$$

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Assim, para um caso geral,

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2$$

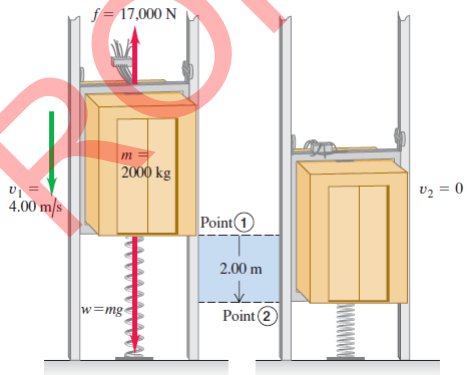
$$U = U_{grav} + U_{el} = mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

"O trabalho feito por todas as forças além da força gravitacional e força elástica é igual à mudança na energia mecânica E = K + U do sistema, sendo U = U_{grav} + U_{el}, a soma da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica"

Example 7.9 **Motion with gravitational, elastic, and friction forces**

A 2000-kg (19,600-N) elevator with broken cables in a test rig is falling at 4.00 m/s when it contacts a cushioning spring at the bottom of the shaft. The spring is intended to stop the elevator, compressing 2.00 m as it does so (Fig. 7.17). During the motion a safety clamp applies a constant 17,000-N frictional force to the elevator. What is the necessary force constant k for the spring?

7.17 The fall of an elevator is stopped by a spring and by a constant friction force.

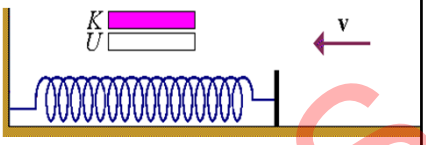


LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Forças conservativas e não conservativas

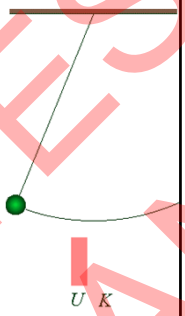
Forças conservativas

Quando a força aplicada permite a conversão e energia cinética em algum tipo de energia potencial, esta força é chamada ***conservativa***. Ex: força gravitacional, força de mola, força elétrica.



O trabalho feito por ***forças conservativas*** possui *sempre* estas 4 propriedades:

1. Pode ser expresso como a diferença entre os valores iniciais e finais de uma função energia potencial
2. O trabalho é sempre *reversível.*
3. Não depende do caminho percorrido pelo corpo, mas apenas dos pontos iniciais e finais
4. Quando o ponto inicial e final são os mesmos, o trabalho é ***zero***.



Quando somente forças conservativas fazem trabalho no sistema, a energia mecânica total E=K+U é constante!

Forças NÃO conservativas

Um exemplo de forças não conservativas são forças de atrito e arraste. Independente do sentido do movimento estas forças sempre fazem trabalho negativo.

O trabalho feito por ***forças NÃO conservativas*** não pode ser expresso em termos de uma função potencial.

Alguns tipos de força não conservativa como atrito e arraste causam a perda ou dissipação da energia mecânica do sistema. Forças deste tipo são denominadas ***forças dissipativas.***

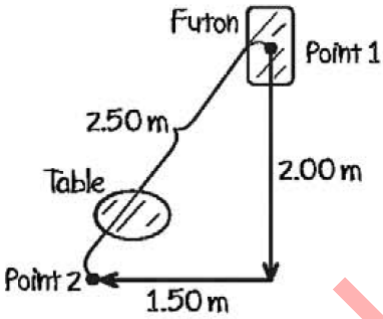
Existem alguns tipos de forças que aumentam a energia mecânica do sistema.

Quando temos a explosão de uma bomba, os fragmentos desta se deslocam com energia cinética muito grande devido às reações químicas da pólvora com o oxigênio. As forças envolvidas no processo são não conservativas pois o processo não é reversível (os fragmentos nunca voltarão espontaneamente a formas a bomba inicial)

LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO

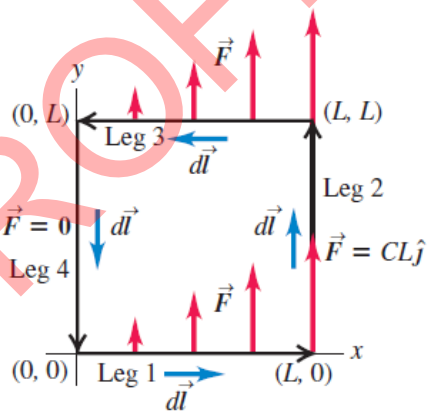
Example 7.10 **Frictional work depends on the path**

You are rearranging your furniture and wish to move a 40.0-kg futon 2.50 m across the room. However, the straight-line path is blocked by a heavy coffee table that you don't want to move. Instead, you slide the futon in a dogleg path over the floor; the doglegs are 2.00 m and 1.50 m long. Compared to the straight-line path, how much more work must you do to push the futon in the dogleg path? The coefficient of kinetic friction is 0.200.



Example 7.11 **Conservative or nonconservative?**

In a region of space the force on an electron is $\vec{F} = Cx\hat{j}$, where C is a positive constant. The electron moves around a square loop in the xy-plane (Fig. 7.20). Calculate the work done on the electron by the force $\vec{F}$ during a counterclockwise trip around the square. Is this force conservative or nonconservative?



LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

Energia Interna e Lei da Conservação de Energia

Forças NÃO conservativas **não** podem ser representadas em termos de uma ***energia potencial***, mas nada impede que as descrevamos em termos de outras formas de energia ao invés de cinética e potencial

Por exemplo, ao acionarmos os freios de um carro até sua parada, tanto as rodas quanto a superfície da estrada ficam ***mais quentes***.

A energia associada com a mudança no estado dos materiais é denominada ***energia Interna.***

É possível demonstrar experimentalmente que a mudança na energia interna no sistema possui o mesmo valor absoluto do trabalho feito pela força de atrito, por exemplo:

$$\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{other}}$$

Sendo ΔU_{int} a mudança na energia interna. Deste modo,

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{\text{int}} = K_2 + U_2$$

Agora: $\Delta K = K_2 - K_1$ e $\Delta U = U_2 - U_1$

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \qquad \text{(law of conservation of energy)}$$

Energia nunca é criada ou destruída, apenas muda de forma!

Lei geral da natureza : até hoje não se encontrou exceção para esta lei.

Força e Energia Potencial

1D

$$W = -\Delta U$$

$$F_x(x)\,\Delta x = -\Delta U \qquad \text{and} \qquad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

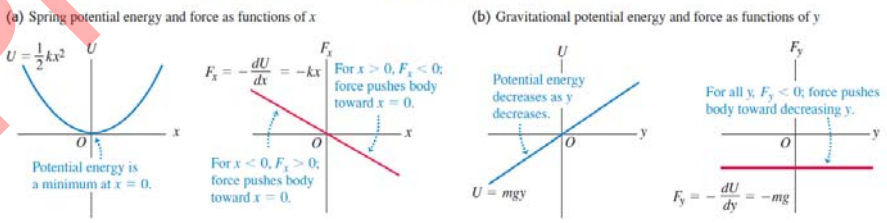
$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad \text{(force from potential energy, one dimension)}$$

"Uma força conservativa sempre tenta levar o sistema a um estado que diminua sua energia potencial "

Ex: Mola – $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$

Gravidade – $U(y) = mgy \quad F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$

A conservative force is the negative derivative of the corresponding potential energy.



LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

3D

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(force from potential energy)}$$

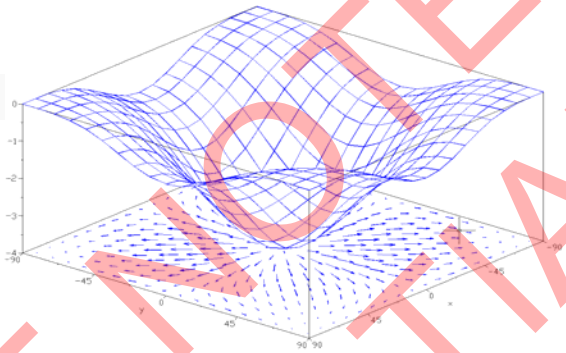
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Gradiente de uma função: $\vec{\nabla}U$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

The gradient of the function $f(x,y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$ depicted as a projected vector field on the bottom plane.



Example 7.13 An electric force and its potential energy

An electrically charged particle is held at rest at the point $x = 0$; a second particle with equal charge is free to move along the positive x-axis. The potential energy of the system is $U(x) = C/x$, where C is a positive constant that depends on the magnitude of the charges. Derive an expression for the x-component of force acting on the movable particle as a function of its position.

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

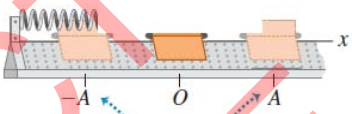
Example 7.14 **Force and potential energy in two dimensions**

A puck with coordinates x and y slides on a level, frictionless air-hockey table. It is acted on by a conservative force described by the potential-energy function

$$U(x, y) = \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

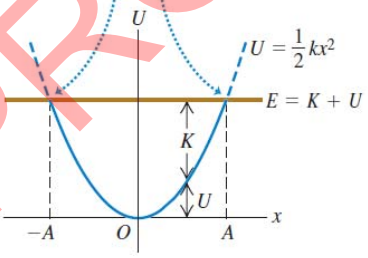
Find a vector expression for the force acting on the puck, and find an expression for the magnitude of the force.

Diagramas de Energia



The limits of the glider's motion are at $x = A$ and $x = -A$.

On the graph, the limits of motion are the points where the U curve intersects the horizontal line representing total mechanical energy E.



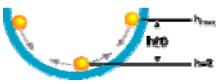
$$F_x = -dU/dx$$

Para x=0, a inclinação e a força são zero, então a partícula está em uma posição de ***equilibrio***.

Quando se desloca desta posição, surge uma força sempre direcionada à origem.

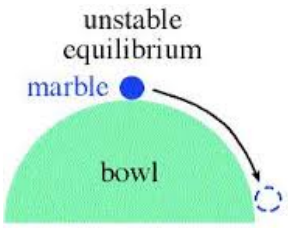
Este tipo de força é denominado ***força restauradora***

Um caso similar é uma bolinha deslizando em uma tigela côncava.

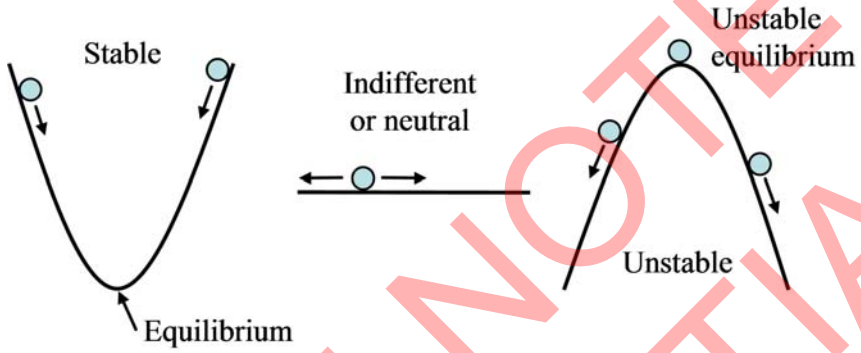


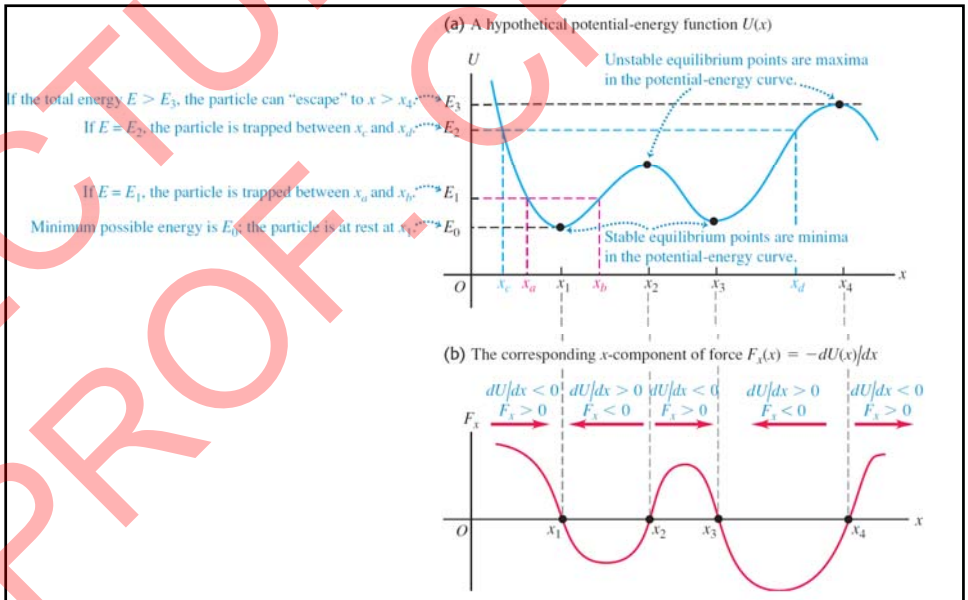
"Qualquer **mínimo** em uma curva de energia potencial indica uma posição de **equilíbrio estável**"

LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO



"Qualquer ***máximo*** em uma curva de energia potencial indica uma posição de ***equilibrio instável***"



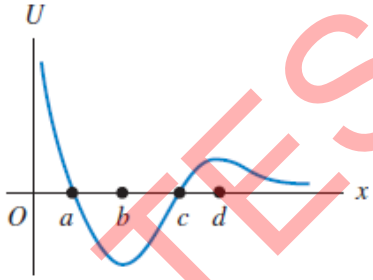


LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO

Section 7.5 Energy Diagrams

7.38 • A marble moves along the x-axis. The potential-energy function is shown in Fig. E7.38. (a) At which of the labeled x-coordinates is the force on the marble zero? (b) Which of the labeled x-coordinates is a position of stable equilibrium? (c) Which of the labeled x-coordinates is a position of unstable equilibrium?

Figure **E7.38**



7.2 • BIO **How High Can We Jump?** The maximum height a typical human can jump from a crouched start is about 60 cm. By how much does the gravitational potential energy increase for a 72-kg person in such a jump? Where does this energy come from?

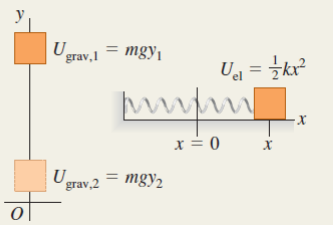
LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO

7.14 •• An ideal spring of negligible mass is 12.00 cm long when nothing is attached to it. When you hang a 3.15-kg weight from it, you measure its length to be 13.40 cm. If you wanted to store 10.0 J of potential energy in this spring, what would be its *total* length? Assume that it continues to obey Hooke's law.

Energia Potencial Gravitacional e Elástica :

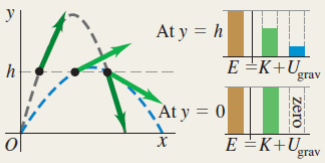
$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav} \qquad (7.1), (7.3)$$

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \qquad (7.10)$$



Conservação da Energia Mecânica

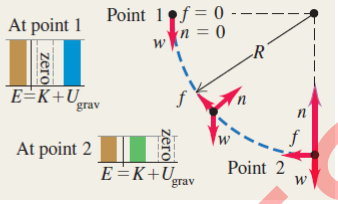
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad (7.4), (7.11)$$



LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO

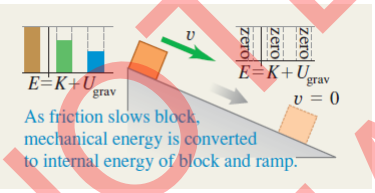
Forças externas alteram a energia mecânica:

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2 \quad (7.14)$$



Podemos descrever a ação de forças externas como energia interna:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \quad (7.15)$$



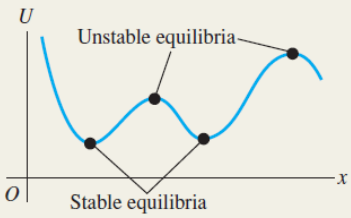
Forças a partir da energia Potencial e Diagramas de Energia

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (7.16)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.17)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (7.18)$$

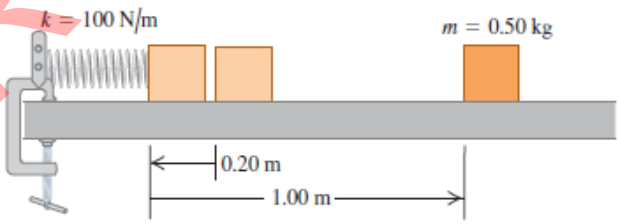


LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO

7.34 •• **CALC** The potential energy of a pair of hydrogen atoms separated by a large distance x is given by $U(x) = -C_6/x^6$, where C_6 is a positive constant. What is the force that one atom exerts on the other? Is this force attractive or repulsive?

7.43 • A block with mass 0.50 kg is forced against a horizontal spring of negligible mass, compressing the spring a distance of 0.20 m (Fig. P7.43). When released, the block moves on a horizontal tabletop for 1.00 m before coming to rest. The spring constant k is 100 N/m. What is the coefficient of kinetic friction μ_k between the block and the tabletop?

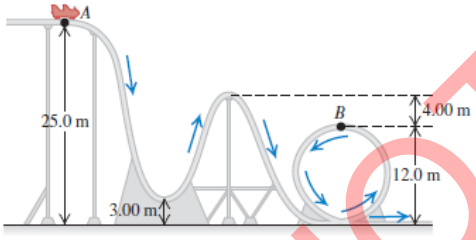
Figure **P7.43**



LECTURE NOTES PROF. CRISTIANO

7.45 •• A 350-kg roller coaster starts from rest at point A and slides down the frictionless loop-the-loop shown in Fig. P7.45. (a) How fast is this roller coaster moving at point B? (b) How hard does it press against the track at point B?

Figure **P7.45**



LECTURE NOTES
PROF. CRISTIANO