

Capítulo 5

CONDUÇÃO EM REGIME TRANSIENTE

PME2360 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR
PROF. DR. GUENTHER CARLOS KRIEGER FILHO

guenther@usp.br

Site LETE

<http://www.lete.poli.usp.br/PME2360.html>

Introdução

- Variações nas condições de contorno - regime transiente
- Exemplos:
 - Resfriamento/aquecimento de peças;
 - Tratamento térmico;
 - Processos térmicos em geral

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada

- Imersão de uma peça de metal quente em um líquido a uma temperatura mais baixa.
- Hipótese: temperatura uniforme no espaço em qualquer instante de tempo $\rightarrow \nabla T = 0$.

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

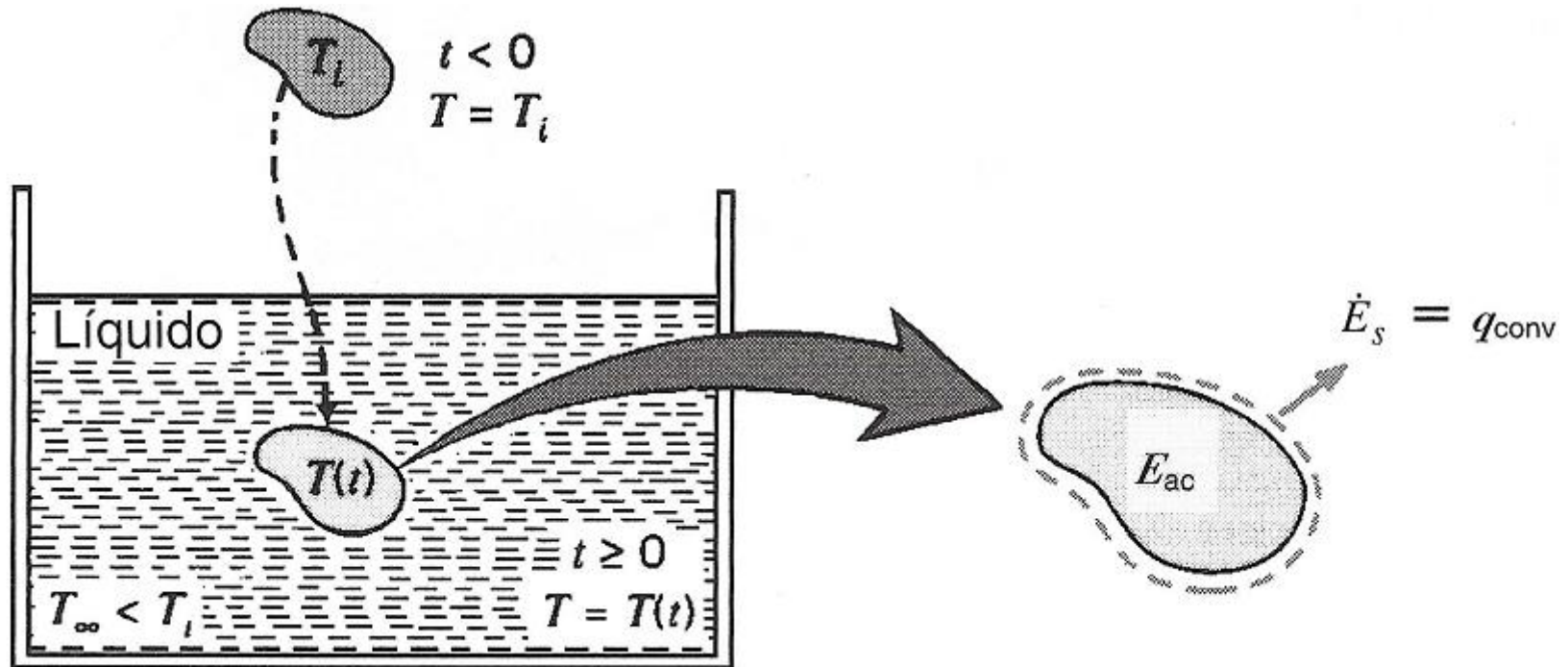


Figura 5.1: Resfriamento de um metal quente

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

- 1a. Lei para o V.C. mostrado na figura:

$$\begin{aligned} -\dot{E}_s &= \dot{E}_{ac} \\ \text{ou} \\ -hA_{sup}(T - T_\infty) &= \rho cV \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Definindo

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad (5.2)$$

Substituindo na 1a Lei, eq.(5.1):

$$\frac{\rho cV}{hA_{sup}} \frac{d\theta}{dt} = -\theta \quad (5.3)$$

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

Separando as variáveis e integrando:

$$\frac{\rho c V}{h A_{sup}} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt \quad (5.4)$$

onde

$$\theta_i \equiv T_i - T_{\infty} \quad (5.5)$$

Então a temperatura em qualquer instante t é obtida por:

$$\frac{\rho c V}{h A_{sup}} \ln \frac{\theta_i}{\theta} = t$$
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp \left[- \left(\frac{h A_{sup}}{\rho c V} \right) t \right]$$

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

- *Constante de Tempo Térmica*

$$\tau_t = \left(\frac{1}{hA_{sup}} \right) (\rho cV) = R_t C_t \quad (5.7)$$

onde R_t é a *Resistência de Convecção* e C_t é a *Capacitância Térmica Global*

- A evolução da temperatura num sólido em função da constante de tempo é então:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left(-\frac{t}{\tau_t} \right) \quad (5.8)$$

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

- Energia transferida (Q) do instante inicial até instante t qualquer:

$$Q = \int_0^t q dt = hA_{sup} \int_0^t \theta dt \quad (5.9)$$

então

$$\begin{aligned} Q &= hA_{sup} \int_0^t \theta_i \exp\left(-\frac{hA_{sup}}{\rho c V} t\right) dt \\ Q &= -\rho c V \theta_i \left[\exp\left(-\frac{hA_{sup}}{\rho c V} t\right) - \exp(0) \right] \\ Q &= \rho c V \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.1 Método da Capacitância Global ou Análise Concentrada (*continuação*)

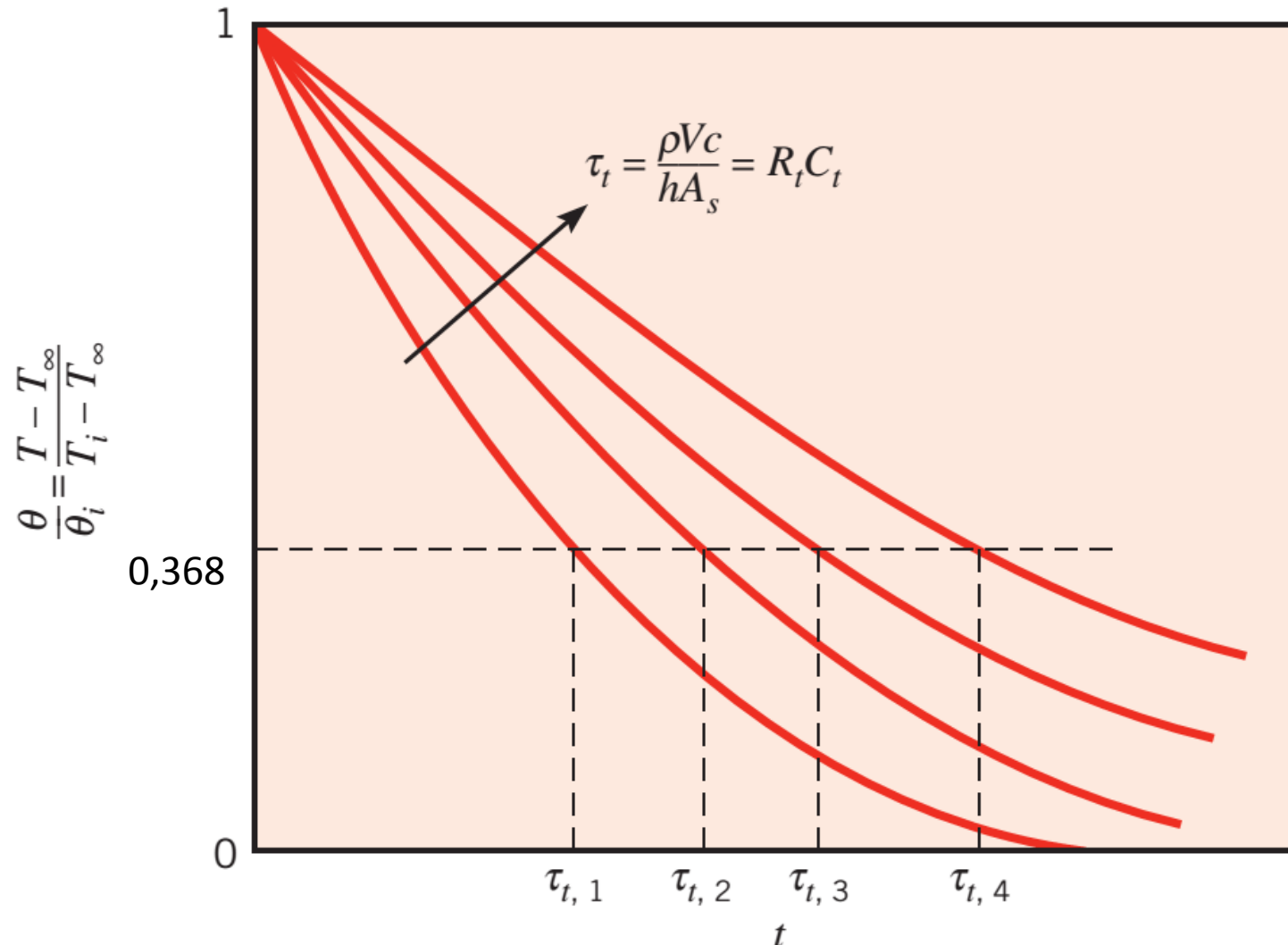


Figura 5.2: Respostas transientes da temperatura de sólidos para diferentes constantes de tempo τ_t

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

- Método simples para análise de regime transiente. Quando é válido ?
- Hipótese feita: não há gradientes de temperatura na peça.
 - Sem gradiente de temperatura não há fluxo de calor ou a condutividade térmica deveria ser infinita.
 - Fisicamente razoável é uma situação onde a resistência de condução seja desprezível em relação à de convecção.
- Considere a parede plana, regime estacionário, sem geração interna:

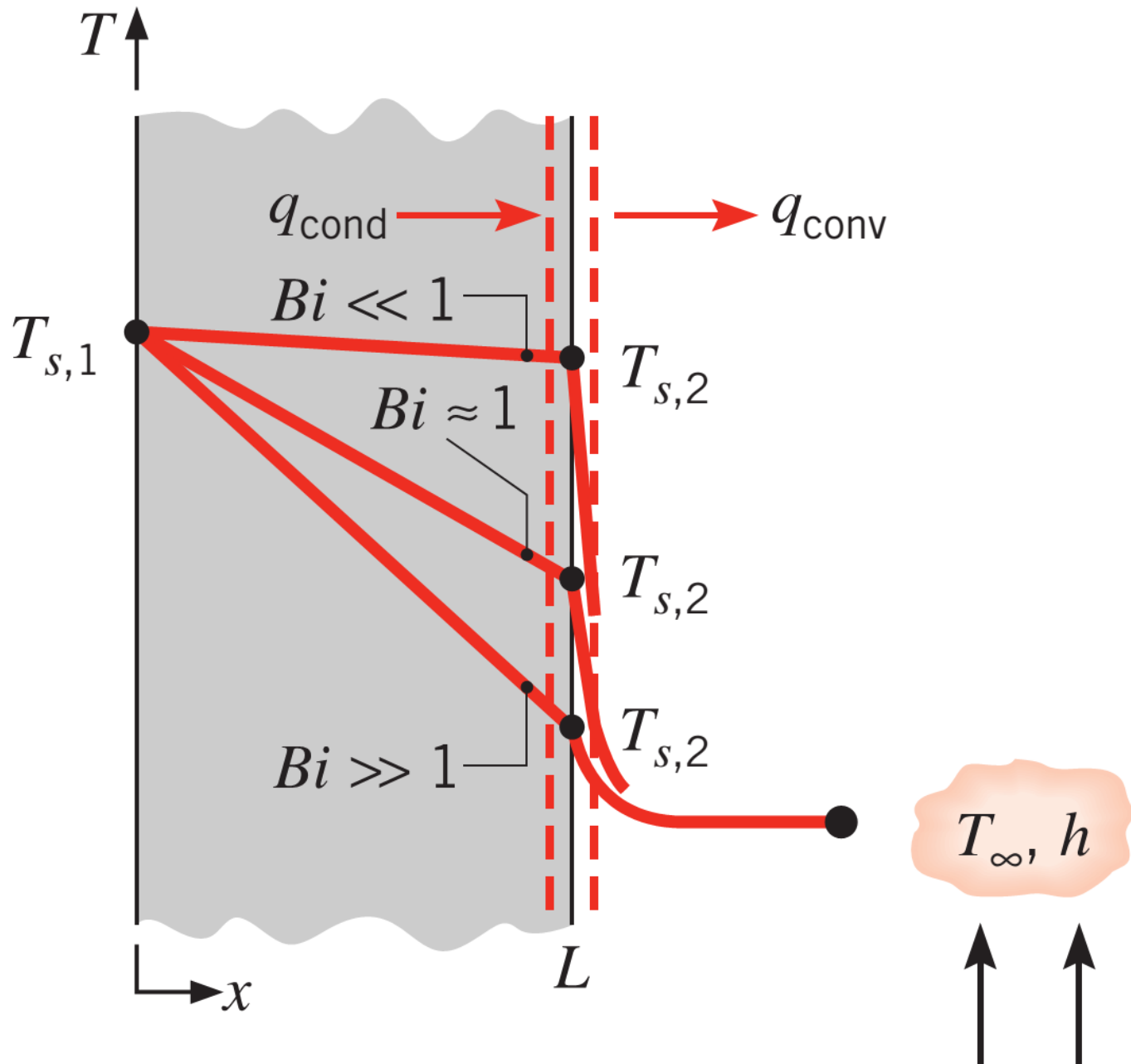


Figura 5.3: Efeito do número de Biot na distribuição de temperatura de uma parede plana

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

- Admita $T_{sup,1} > T_{sup,2} > T_{\infty}$
- Balanço de energia na fronteira $x = L$:

$$\frac{kA}{L}(T_{sup,1} - T_{sup,2}) = hA(T_{sup,2} - T_{\infty}) \quad (5.11)$$

rearranjando-se:

$$\frac{T_{sup,1} - T_{sup,2}}{T_{sup,2} - T_{\infty}} = \frac{(L/kA)}{(1/hA)} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi$$

onde Bi é o *Número de Biot*

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

- $Bi \ll 1$:

1. $\rightarrow R_{cond} \ll R_{conv}$

2. $\rightarrow (T_{sup,1} - T_{sup,2}) \ll (T_{sup,2} - T_{\infty}) \rightarrow$ Temperatura aproximadamente uniforme na peça.

- Para $Bi < 0,1$ o erro é aceitável.

- Para generalização para geometrias complexas, o adimensional Bi é calculado com um comprimento característico L_c :

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad (5.13)$$

onde

$$L_c \equiv \frac{V}{A_{sup}} \quad (5.14)$$

1. Parede de espessura $2L \rightarrow L_c = L$
2. Cilindro de raio externo $r_o \rightarrow L_c = r_o/2$
3. Esfera de raio externo $r_o \rightarrow L_c = r_o/3$

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

- Re-escrevendo-se o expoente da expressão da evolução da temperatura (eq.(5.6)) com o L_c :

$$\frac{hA_{sup}t}{\rho cV} = \frac{ht}{\rho cL_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (5.15)$$

onde $\alpha = k/\rho c$

- O adimensional *Número de Fourier* é:

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (5.16)$$

- Fo representa o tempo decorrido.
- $Fo = 0$ é o instante inicial.

5.1.1 Validade do Método da Capacitância Global

A expressão para a evolução da temperatura (eq.(5.6)) é escrita então como:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-BiFo) \quad (5.17)$$

5.2 Efeitos Espaciais

- Se $Bi > 0.1 \rightarrow \nabla T$ significativos
- Parede Plana - 1D, sem geração interna, $k = cte$

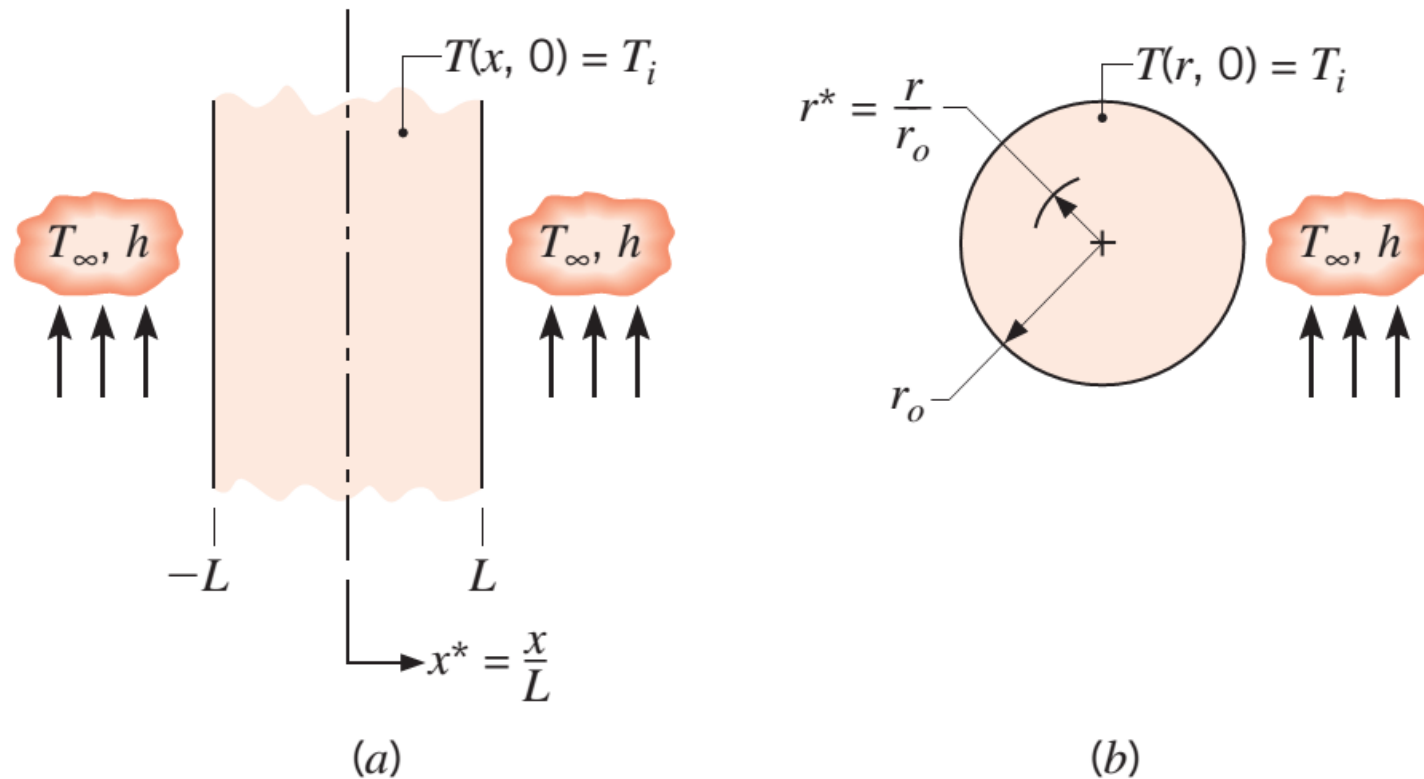


Figura 5.4: Sistema unidimensional com uma temperatura inicial uniforme submetido subitamente a condições convectivas. (a) Parede plana. (b) Cilindro infinito ou esfera.

5.2 Efeitos Espaciais

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.18)$$

- Necessário: 2 condições de contorno e 1 condição inicial

- Condição inicial:

$$T(x, 0) = T_i \quad (5.19)$$

- Condições de contorno:

1. Simetria

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (5.20)$$

5.2 Efeitos Espaciais

2. Balanço de energia na fronteira

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h (T(L, t) - T_{\infty}) \quad (5.21)$$

então: $T = T(x, t, T_i, T_{\infty}, L, k, \alpha, h)$ - 8 variáveis

- Define-se as variáveis adimensionalizadas:

– Temperatura

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad (5.22)$$

$$0 \leq \theta^* \leq 1$$

5.2 Efeitos Espaciais

– Espaço (comprimento)

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \quad (5.23)$$

– Tempo

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} \equiv Fo \quad (5.24)$$

- Subst. (5.22), (5.23) (5.24) na eq. da condução (5.18) e nas condições inicial (5.19) e de contorno (5.20) e (5.21) tem-se:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (5.25)$$

com a condição inicial:

$$\theta^*(x^*, 0) = 1 \quad (5.26)$$

5.2 Efeitos Espaciais

e condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (5.27)$$

e

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi\theta^*(1, t^*) \quad (5.28)$$

então agora $\theta^* = \theta^*(x^*, Fo, Bi)$

5.3 A Parede Plana com Convecção

- Parede Plana - 1D
- Inicialmente $T(x, 0) = T_i$ e subitamente imersa em um fluido com $T_\infty \neq T_i$
- Simetria em relação ao plano intermediário
- Solução exata:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\xi_n^2 Fo) \cos(\xi_n x^*) \quad (5.29)$$

onde o coeficiente C_n é dado por

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sen} \xi_n}{2 \xi_n + \operatorname{sen}(2 \xi_n)} \quad (5.30)$$

5.3 A Parede Plana com Convecção

sendo ξ_n raízes positivas da equação transcendental

$$\xi_n \tan \xi_n = Bi \quad (5.31)$$

- Solução aproximada

- Para $Fo > 0.2$, a série pode ser interrompida após o 1o. termo.

$$\theta^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \cos(\xi_1 x^*)$$

ou

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x^*) \quad (5.32)$$

onde para $x^* = 0$,

$$\theta_0^* \equiv \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \quad (5.33)$$

- ξ_1 e C_1 são tabelados (Tab. 5.1) em função do Bi

Tabela 5.1 Coeficiente usados na aproximação pelo primeiro termo das soluções em séries da condução unidimensional transiente

Bi^a	Parede Plana		Cilindro Infinito		Esfera	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,03	0,1732	1,0049	0,2439	1,0075	0,2989	1,0090
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,05	0,2217	1,0082	0,3142	1,0124	0,3852	1,0149
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,07	0,2615	1,0114	0,3708	1,0173	0,4550	1,0209
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,09	0,2956	1,0145	0,4195	1,0222	0,5150	1,0268
0,10	0,3111	1,0160	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,15	0,3779	1,0237	0,5376	1,0365	0,6608	1,0445
0,20	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,25	0,4801	1,0382	0,6856	1,0598	0,8448	1,0737
0,30	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0932	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0185	1,1346	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0919	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1725	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732

(continua)

Tabela 5.1 Coeficiente usados na aproximação pelo primeiro termo das soluções em séries da condução unidimensional transiente (**continuação**)

Bi^a	Parede Plana		Cilindro Infinito		Esfera	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
2,0	1,0769	1,1795	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7201
5,0	1,3138	1,2402	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8674
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8921
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2881	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990
∞	1,5707	1,2733	2,4050	1,6018	3,1415	2,0000

^a $Bi = hL/k$ para a parede plana e hr_o/k para o cilindro infinito e a esfera. Veja Fig. 5.4

5.3.1 Transferência Total de Energia

- Energia transferida entre o instante inicial e um instante $t > 0$ - Balanço de energia:

$$E_e - E_s = \Delta E_{ac} \quad (5.34)$$

a energia que sai E_s é igual a Q e estabelecendo $E_e = 0$ tem-se para o intervalo de tempo:

$$Q = -[E(t) - E(0)]$$

ou

$$Q = - \int \rho c [T(r, t) - T_i] dV \quad (5.35)$$

5.3.1 Transferência Total de Energia

adimensionaliza-se com quantidade

$$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty) \quad (5.36)$$

que é a energia interna do sólido em relação à temperatura do fluido ou a máxima energia que seria transferida se $t = \infty$.

$$\frac{Q}{Q_0} = \int \frac{-[T(x, t) - T_i] dV}{T_i - T_\infty} \frac{1}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV \quad (5.37)$$

Com a expressão para a temperatura adimensionalizada (eq.(5.32)) tem-se:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \xi_1}{\xi_1} \theta_0^* \quad (5.38)$$

onde θ_0^* é dada pela eq. (5.33).

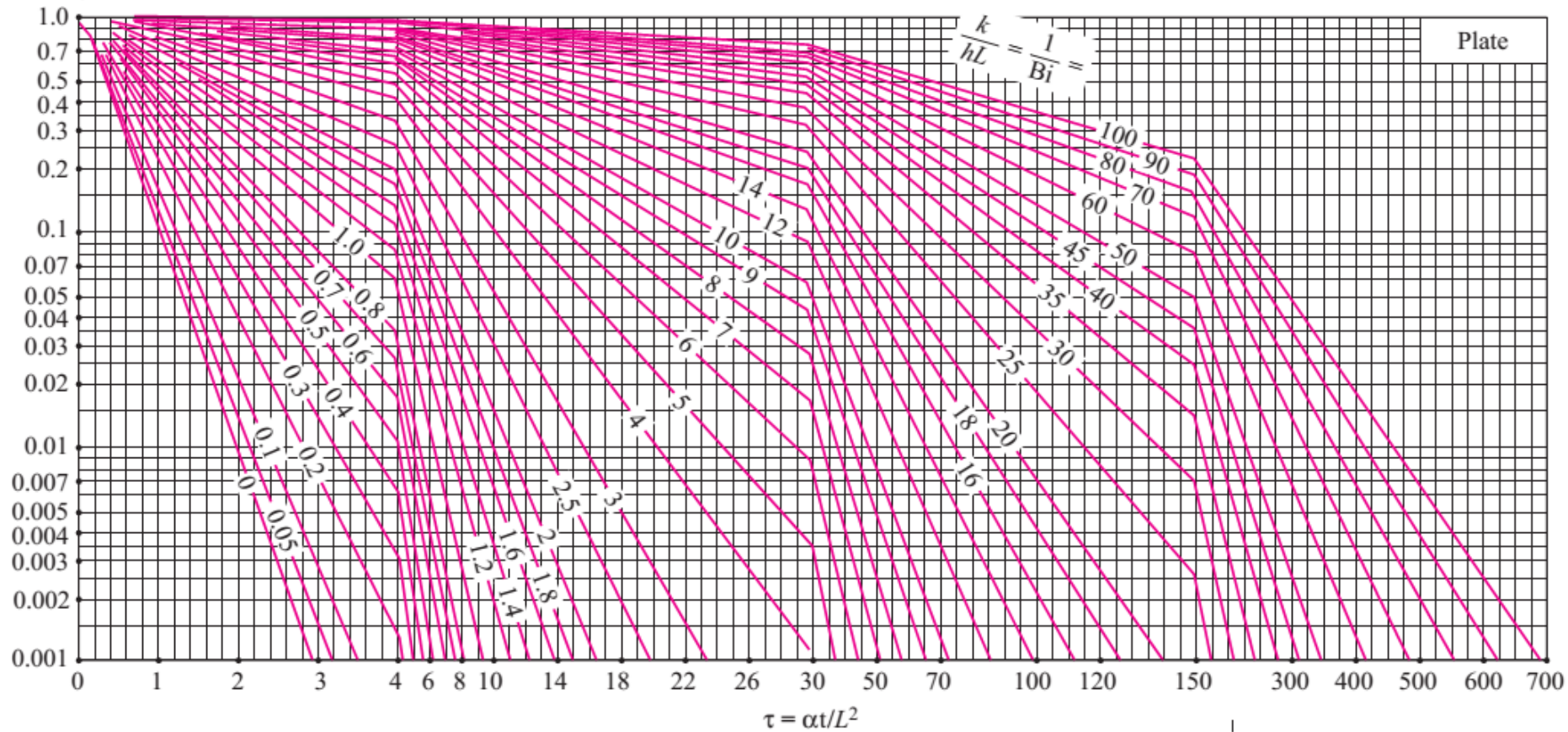
5.3.2 Considerações Adicionais

- Parede com uma superfície adiabática - Solução de simetria
- Mudança súbita da temperatura superficial equivale a $h = \infty$ e então $Bi = \infty$, com $T_{\infty} = T_{sup}$
- Representação gráfica - Cartas de Heisler

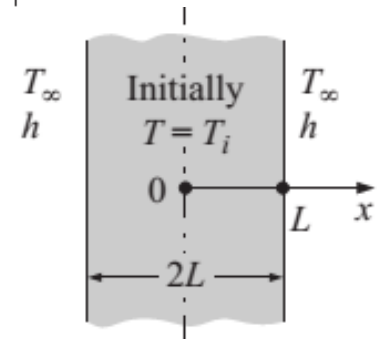
5.3.2 Considerações Adicionais

$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Cartas de Heisler

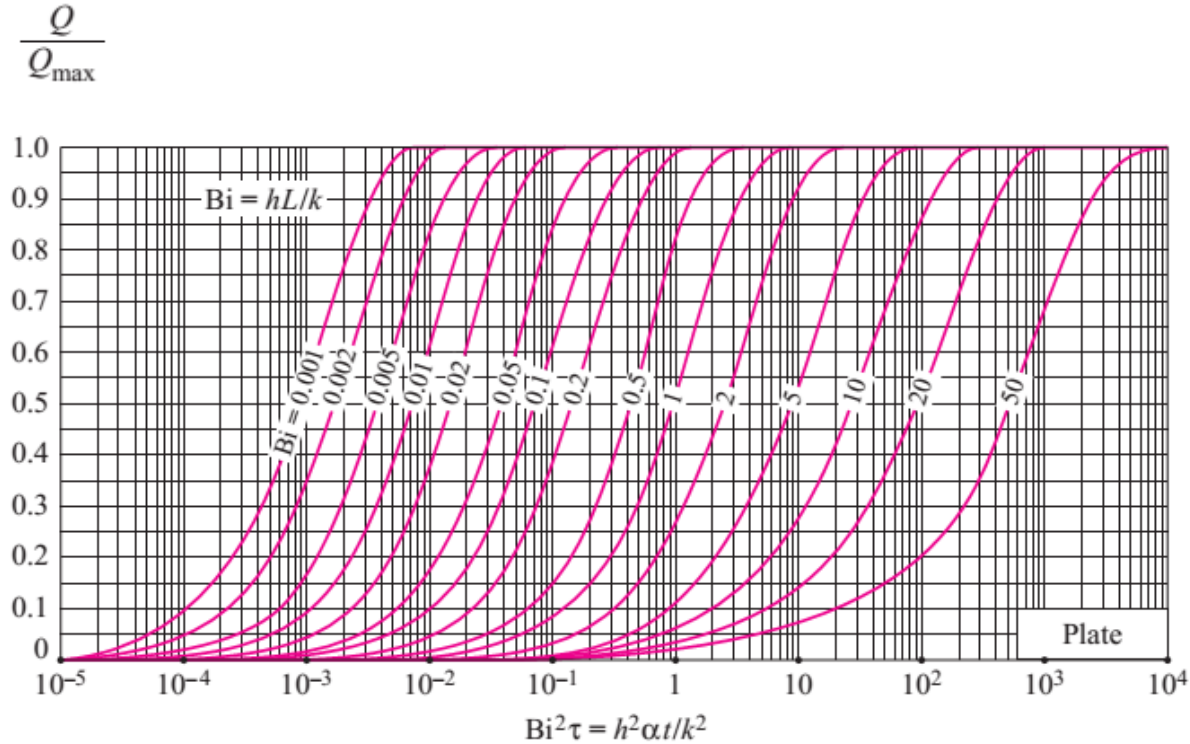
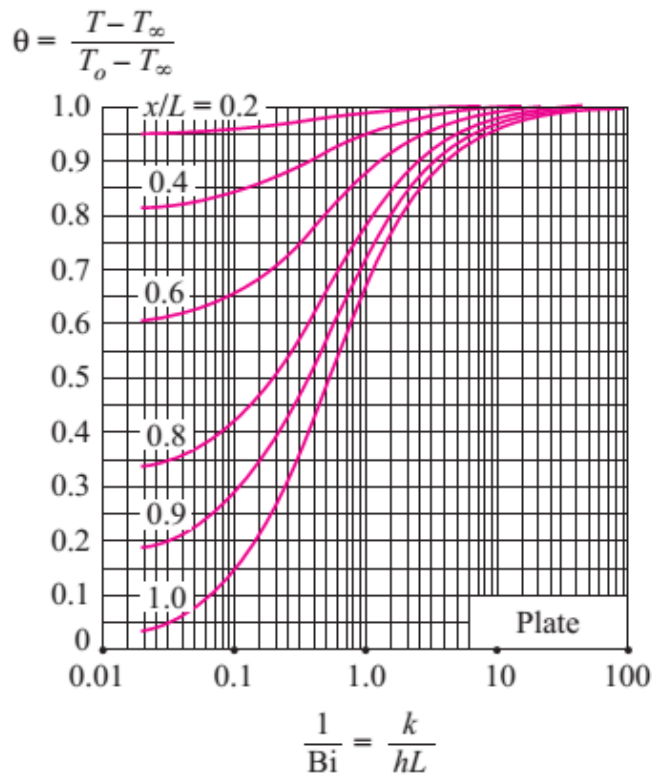


(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler)



5.3.2 Considerações Adicionais

Cartas de Heisler



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)

(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

Figura 5.5:

Transient temperature and heat transfer charts for a plane wall of thickness $2L$ initially at a uniform temperature T_i subjected to convection from both sides to an environment at temperature T_∞ with a convection coefficient of h .

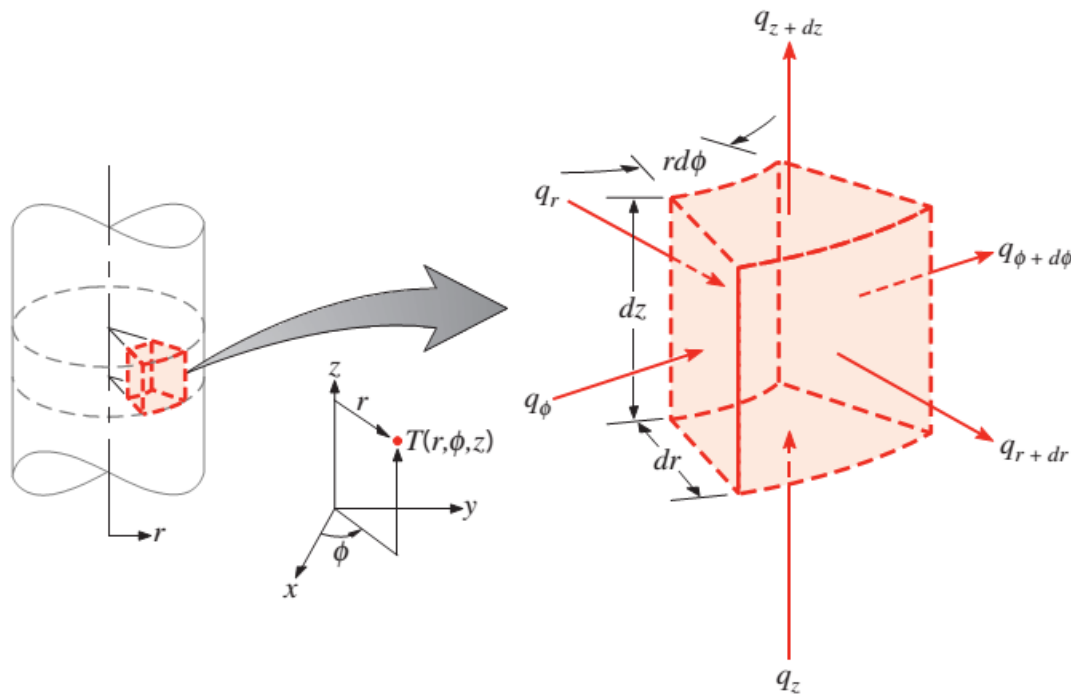
5.4 Sistemas Radiais com Convecção

- T. C. unidimensional em cilindros e esferas
- Solução exata por séries infinitas
- Solução aproximada por séries com um único termo

5.4.1 Soluções Exatas

- Cilindro*

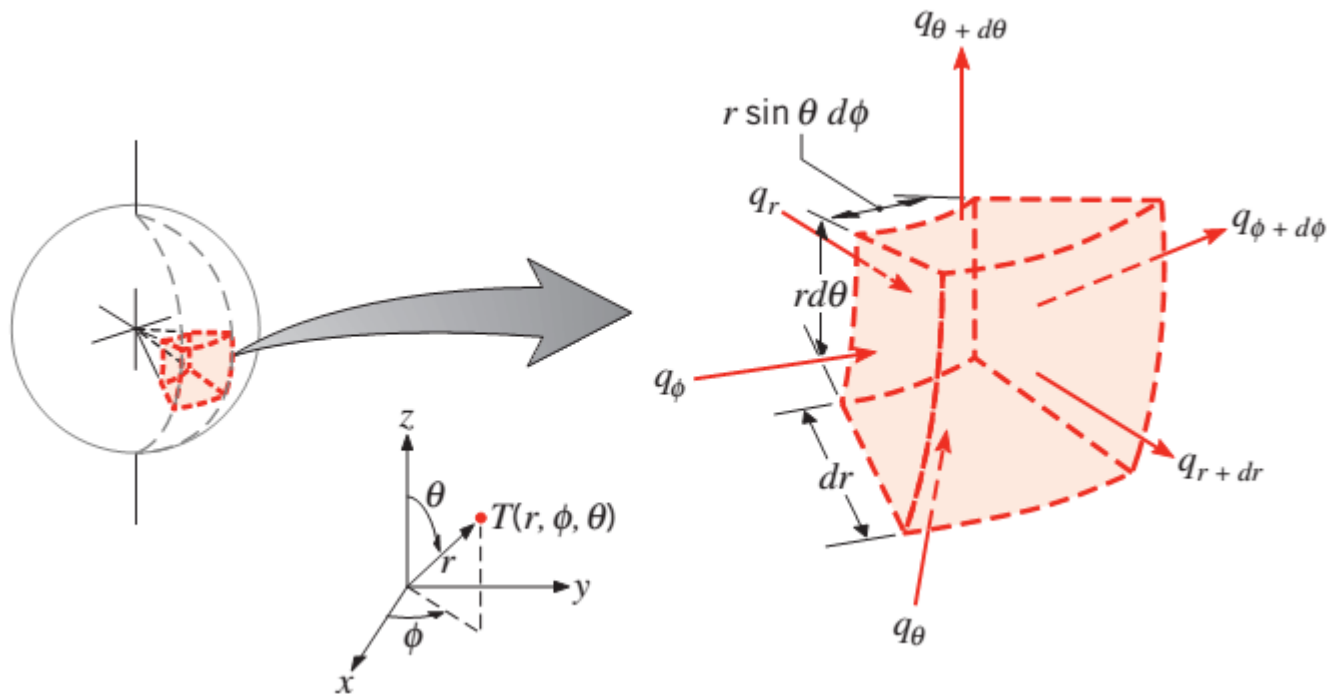
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$



5.4.1 Soluções Exatas

- *Esfera*

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$



5.4.1 Soluções Exatas

- *Cilindro Infinito*

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\xi_n^2 Fo) J_0(\xi_n r^*) \quad (5.39)$$

onde $Fo = \alpha t / r_o^2$

$$C_n = \frac{2 J_1(\xi_n)}{\xi_n J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \quad (5.40)$$

$$\xi_n \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi \quad (5.41)$$

5.4.1 Soluções Exatas

J_0, J_1 funções de Bessel de primeira espécie.

- *Esfera*

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\xi_n^2 Fo) \frac{1}{\xi_n r^*} \sin(\xi_n r^*) \quad (5.42)$$

onde $Fo = \alpha t / r_o^2$

$$C_n = \frac{4[\sin(\xi_n) - \xi_n \cos(\xi_n)]}{2\xi_n - \sin(2\xi_n)} \quad (5.43)$$

$$1 - \xi_n \cot \xi_n = Bi \quad (5.44)$$

Tabela 5.2 J_0, J_1 funções de Bessel de primeira espécie.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202

5.4.2 Soluções Aproximadas

- Para $Fo > 0,2$ - aproximação por um único termo
- Como para parede plana, dependência do tempo (Fo) em qualquer ponto é a mesma do centro ($r^* = 0$).

5.4.2 Soluções Aproximadas

- *Cilindro Infinito*

$$\theta^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) J_0(\xi_1 r^*) \quad (5.45)$$

ou

$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\xi_1 r^*) \quad (5.46)$$

onde na linha de centro

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \quad (5.47)$$

5.4.2 Soluções Aproximadas

- *Esfera*

$$\theta^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \frac{1}{\xi_1 r^*} \sin(\xi_1 r^*) \quad (5.48)$$

ou

$$\theta^* = \theta_0^* \frac{1}{\xi_1 r^*} \sin(\xi_1 r^*) \quad (5.49)$$

onde no centro da esfera

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \quad (5.50)$$

5.4.3 Transferência Total de Energia

- *Cilindro Infinito*

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\xi_1} J_1(\xi_1) \quad (5.51)$$

- *Esfera*

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\xi_1^3} [\sin(\xi_1) - \xi_1 \cos(\xi_1)] \quad (5.52)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Sólido infinito em todas as direções, exceto uma.
- Mudança súbita na superfície identificável - T. C.
1D
- Exemplos: superfície do solo, placa muito espessa etc.

5.5 O Sólido Semi-infinito

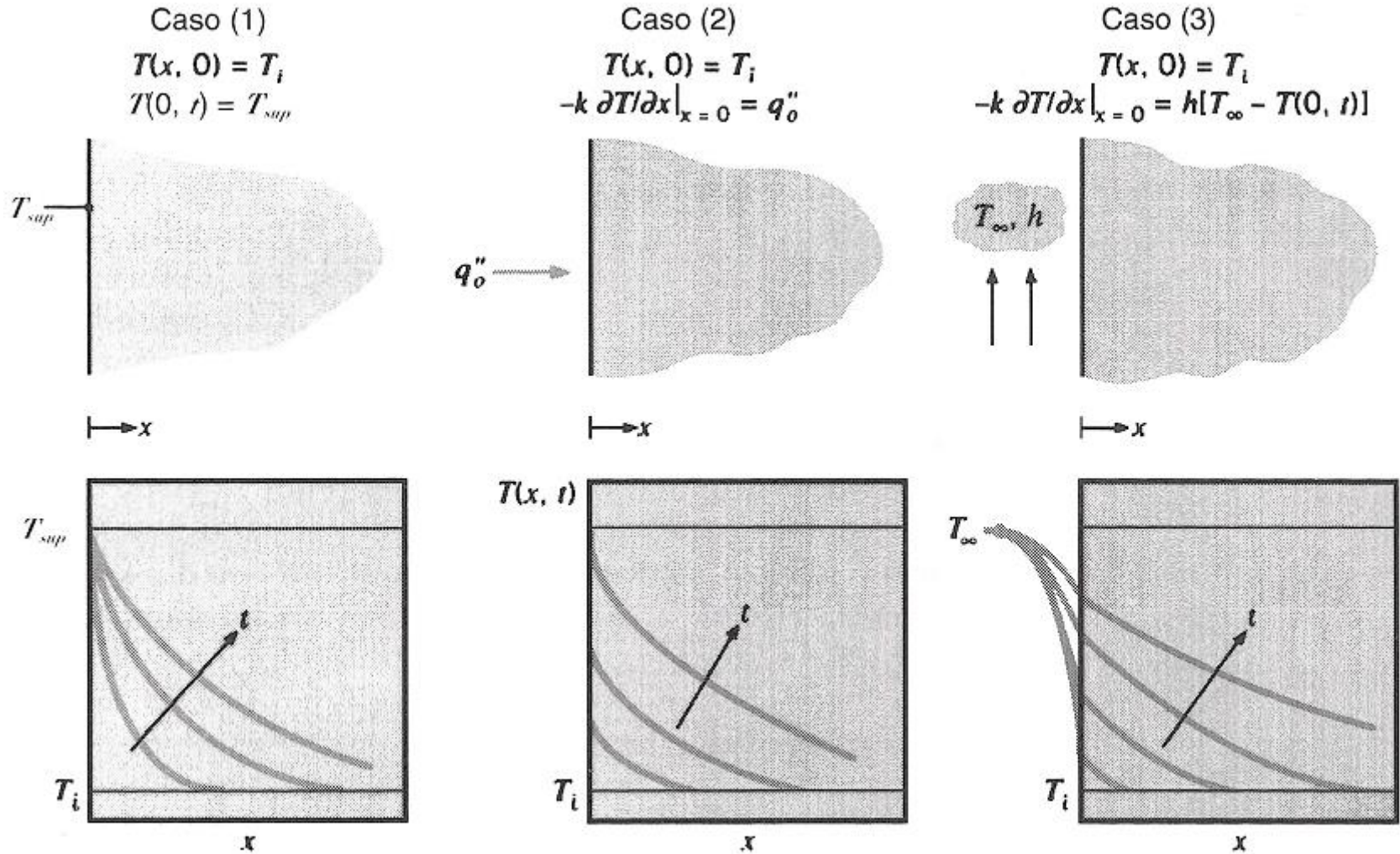


Figura 5.6: Distribuições de temperatura para sólido semi-infinito

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Equação de condução 1D:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.53)$$

- Condição inicial:

$$T(x, 0) = T_i \quad (5.54)$$

- Condição de contorno no interior do sólido:

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_i \quad (5.55)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Condições de contorno na superfície:
 1. em $t = 0$ a temperatura $T_{sup} \neq T_i$
 2. em $t = 0$ é imposto um fluxo de calor q_o''
 3. em $t = 0$ convecção com $T_\infty \neq T_i, h$
- Variável similar (η) transforma
 - Duas variáveis independentes (x, t) em uma (η) ,
 - A equação do problema passa de uma EDP para EDO.

5.5 O Sólido Semi-infinito

Define-se a variável similar como:

$$\eta = \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \quad (5.56)$$

Para mostrar que (η) é uma variável similar, re-escreve-se a equação do problema (5.53) e as condições de contorno/inicial (5.55 e 5.54):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (5.58)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \left(\frac{x}{(4\alpha)^{1/2}} \frac{-1}{2} t^{-3/2} \right) \\ &= -\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{dT}{d\eta}\end{aligned}\quad (5.59)$$

Substituindo (5.57), (5.58) e (5.59) na eq. do problema (5.53) tem-se:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta}\quad (5.60)$$

Condições de contorno e inicial:

- Na superfície vale $x = 0 \rightarrow \eta = 0$ e

$$T(\eta = 0) = T_{sup}\quad (5.61)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

- No interior do sólido $x \rightarrow \infty$ ou também em $t = 0$ significa $\eta \rightarrow \infty$:

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \quad (5.62)$$

- Então, a eq. de condução e as condições de contorno/inicial são independentes de x e t . O problema pode ser formulado em termos da variável similar η .

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Forma específica de $T(\eta)$ Fazendo-se a separação de variáveis da eq. transformada (5.60):

$$\begin{aligned}\frac{d^2T}{d\eta^2} &= -2\eta \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{d}{d\eta} \left[\frac{dT}{d\eta} \right] &= -2\eta \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{d \left[\frac{dT}{d\eta} \right]}{dT/d\eta} &= -2\eta d\eta\end{aligned}\tag{5.63}$$

Integrando uma vez:

$$\ln(dT/d\eta) = -\eta^2 + C'_1$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

ou

$$\frac{dT}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2)$$

integrando mais uma vez:

$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta + C_2$$

Determinação das constantes C_1 e C_2 :

- em $\eta = 0 \rightarrow T(\eta = 0) = T_{sup}$ e então:

$$T = T_{sup} = C_2$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

assim,

$$T = C_1 \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta + T_{sup}$$

- em $\eta \rightarrow \infty$, $T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$ e então:

$$T = T_i = C_1 \underbrace{\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta}_{=\sqrt{\pi}/2} + T_{sup}$$

de onde sai C_1 :

$$C_1 = \frac{2(T_i - T_{sup})}{\sqrt{\pi}} \quad (5.64)$$

a distribuição de temperatura no sólido semi-infinito é então:

5.5 O Sólido Semi-infinito

a distribuição de temperatura no sólido semi-infinito é então:

$$T = (T_i - T_{sup}) \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta}_{\equiv \text{erf}(\eta)} + T_{sup}$$

ou

$$\frac{T - T_{sup}}{T_i - T_{sup}} = \text{erf}(\eta) \quad (5.65)$$

onde $\text{erf}(\eta)$ é a *função erro de Gauss*

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Fluxo Térmico na superfície:

$$\begin{aligned} q_{sup}'' &= -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k \left. \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= -k(T_i - T_{sup}) \left. \frac{d(\operatorname{erf}(\eta))}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=\eta=0} \\ &= k \frac{(T_{sup} - T_i)}{(\pi \alpha t)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

- Soluções analíticas podem ser também obtidas para os dois outros casos de condição de contorno na superfície.
- Resumo dos casos:

Caso 1 Temperatura constante: $T(0, t) = T_{sup}$

$$\frac{T(x, t) - T_{sup}}{T_i - T_{sup}} = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (5.67)$$

$$q''_{sup}(t) = k \frac{(T_{sup} - T_i)}{(\pi \alpha t)^{1/2}} \quad (5.68)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

Caso 2 Fluxo térmico constante: $q''_{sup} = q''_o$

$$q''_{sup} = q''_o \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} T(x, t) - T_i &= \frac{2q''_o(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k} \exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right) \\ &\quad - \frac{q''_o x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

5.5 O Sólido Semi-infinito

Caso 3 Convecção na superfície

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h[T_{\infty} - T(0, t)]$$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_{\infty} - T_i} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \left[\exp \left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \right) \right] \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \quad (5.71)$$

onde *erfc* é a *função erro complementar* definida por $\operatorname{erfc} \equiv 1 - \operatorname{erf}$

5.6 Efeitos Multidimensionais

- Problemas transientes bi ou tridimensionais. Domínio tem dimensões próximas nas duas ou três direções.
- Exemplo: Cilindro curto ($T(0, 0, 0, 0) = T_i$) imerso em fluido (T_∞, h)
- Equação da condução para o cilindro 2D, sem geração

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.72)$$

- Solução pelo método de separação de variáveis e aproximação pelo primeiro termo das séries para problemas 1D:

5.6 Efeitos Multidimensionais

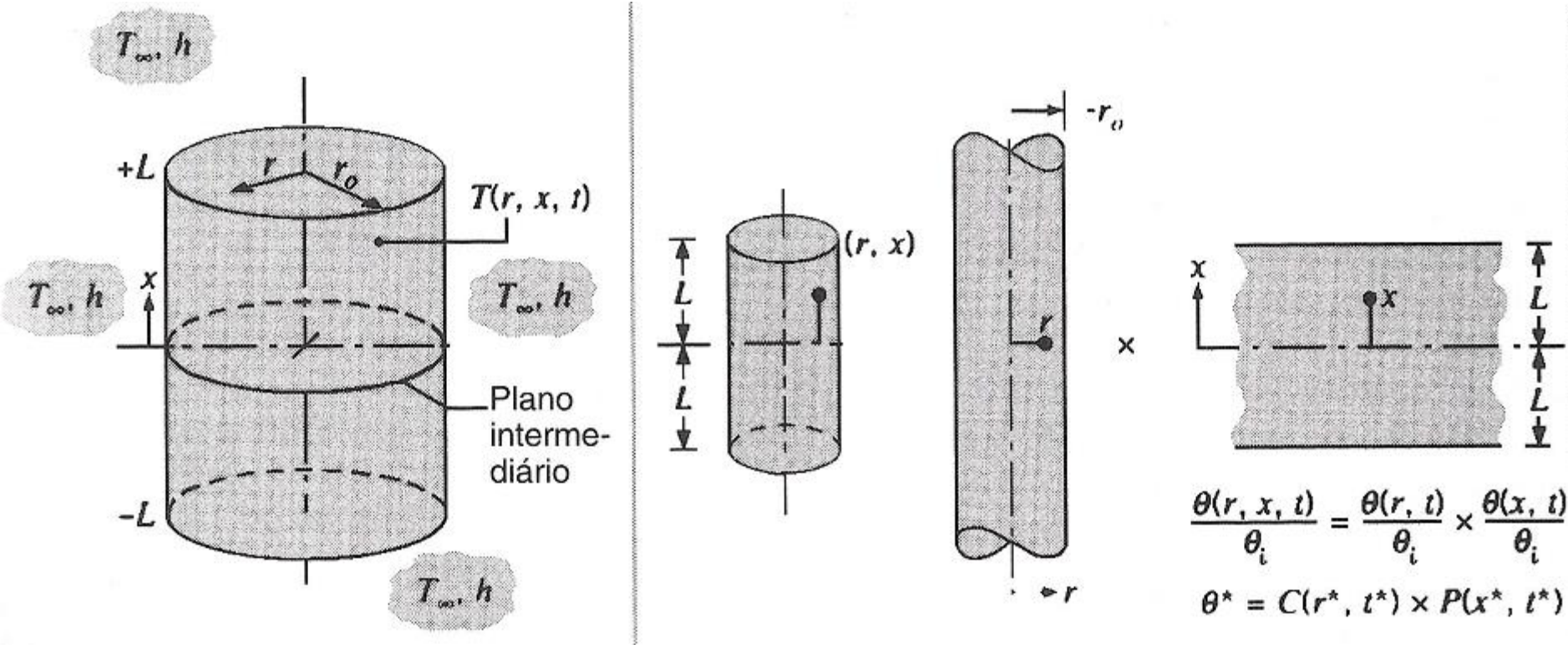


Figura 5.7: Condução transitória em cilindro curto

5.6 Efeitos Multidimensionais

$$\frac{T(r, x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \Big|_{parede} \times \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \Big|_{cilindro} \quad (5.73)$$

- Generalizando:

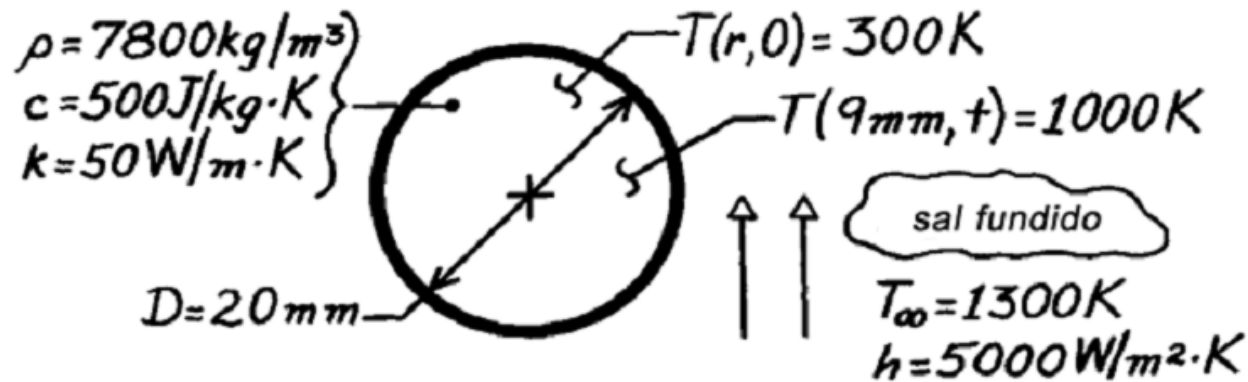
$$\frac{T(x_1, x_2, x_3, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = P(x_1, t)P(x_2, t)P(x_3, t), \quad (5.74)$$

onde P é a solução da placa plana infinita, cilindro infinito ou sólido semi-infinito.

Exercícios

EX. 5.57 >> Condução de calor unidimensional A esfera (Incropera 6ª Edição)

No tratamento térmico para endurecer bilhas de rolamento feitas em aço ($c=500 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$, $k= 50 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), é desejável aumentar a temperatura superficial por um curto período de tempo, sem no entanto provocar um aquecimento significativo no interior da bilha. Esse tipo de aquecimento pode ser obtido por meio de uma rápida imersão da esfera em um banho de sal fundido a uma temperatura $T_\infty= 1300 \text{ K}$ e $h= 5000 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$. Considere que qualquer ponto no interior da esfera cuja temperatura seja superior a 1000 K tenha sido atingido pelo tratamento. Calcule o tempo necessário para tratar o milímetro mais externo de uma esfera com 20 mm de diâmetro, se a sua temperatura inicial é de 300 K .



SOLUÇÃO 1

Hipótese:(1) Condução de calor unidimensional, na direção radial, (2) Propriedades constantes, (3) $Fo \geq 0.2$.

Análise: Uma vez que qualquer localização dentro da bola, cuja temperatura excede 1000K vai ser endurecida, o problema é determinar o tempo em que a localização $r = 9 \text{ mm}$ atinge 1000K. Em seguida, uma camada exterior de 1 mm vai ser endurecido. No cálculo do número de Biot, tem-se:

$$Bi = \frac{h r_o}{k} = \frac{5000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} (0.020\text{m}/2)}{50 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 1.00$$

Usando a solução para um termo aproximado de uma esfera:

$$Fo = -\frac{1}{\zeta_1^2} \ln \left[\theta^* / C_1 \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*) \right]$$

Da Tab.5.1 para $Bi = 1$, para uma esfera, tem-se:

$$\zeta_1 = 1,5708 \text{ rad e } C_1 = 1,2732$$

Com $r^* = r/r_o = (9\text{mm}/10\text{mm}) = 0.9$, substituindo,

$$Fo = \frac{-1}{(1.5708)^2} \ln \left[\frac{(1000-1300)\text{K}}{(300-1300)\text{K}} / 1.2732 \frac{1}{1.5708 \times 0.9} \sin(1.5708 \times 0.9 \text{ rad}) \right] = 0.441$$

De número de Fourier

$$\alpha = k/\rho c,$$

$$t = Fo \frac{r_0^2}{\alpha} = Fo \cdot r_0^2 \frac{\rho c}{k} = 0.441 \times \left[\frac{0.020\text{m}}{2} \right]^2 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 500 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} / 50 \text{ W/m} \cdot \text{K} = 3.4\text{s}$$

SOLUÇÃO 2

$$c = 500 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$
$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$
$$k = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{50}{7800 \times 500} = 1.28 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_{\infty} = 1300 \text{ K}$$

$$h = 5000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$T > 1000 \text{ K}$ temperado

$$\Delta t = ? \quad r / r_0 = 9 \text{ mm}$$

$$T_i = 300 \text{ K}$$

Método da solução exata – gráficos

$$Bi = \frac{h r_o}{k} = \frac{5000 \times 0.010}{50} = 1.0$$
$$r/r_o = 9/10 = 0.9$$

FIG. 5.15

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0.7$$

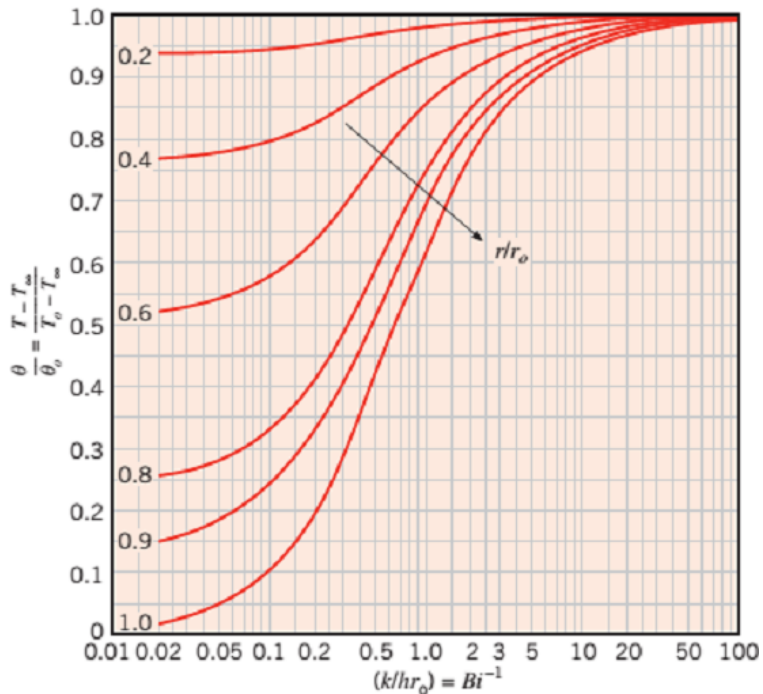


Fig. 5.15

Distribuição de temperatura em uma esfera de raio r_o

Método da solução exata – gráficos

mas $T = 1000 \text{ K} \rightarrow (T_0 - 1300) 0.7 = 1000 - 1300$

$T_0 = 871 \text{ K}$
no centro

FIG. 5.14 : $\theta_0^* = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{871 - 1300}{300 - 1300} = 0.429$

$Bi = 1.0$

$t^* = \frac{\alpha t}{r_0^2} \approx 0.5 = \frac{1.28 \times 10^5 t}{(0.01)^2} \Rightarrow t = 3.90 \text{ s}$

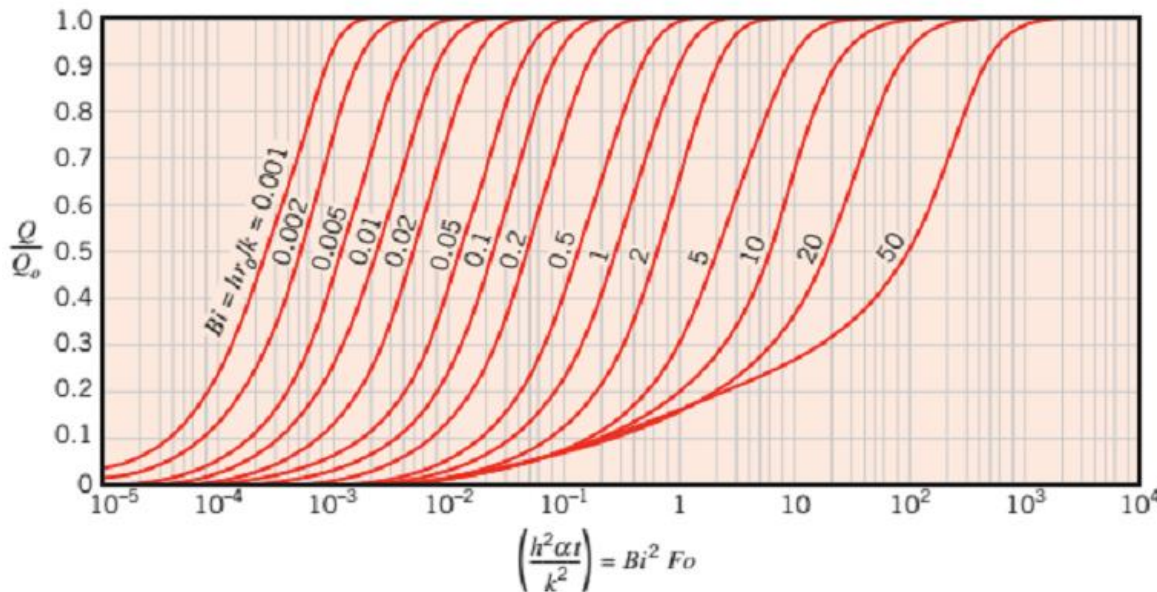


Fig. 5.14

Temperatura no centro de uma esfera de raio r_0 em função do tempo

EX. 5.52 (Incropera 3ª Edição)

As paredes de um forno são feitas em tijolo de argila refratária ($\alpha = 7,1 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) e as suas faces internas são mantidas a 1.100 K, durante a operação do forno. As paredes são projetadas de modo que, a partir de uma temperatura inicial uniforme de 300 K, a temperatura no plano mediano de cada uma não seja mais elevada que 325 K, depois de 4 h de operação do forno. Qual será a espessura mínima da parede?

Solução para sólido semi-infinito

$$\frac{T - T_{\text{sup}}}{T_i - T_{\text{sup}}} = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

$$2\sqrt{\alpha t} = 2\sqrt{(7,1 \cdot 10^{-7}) \cdot 14400} = 0,202$$

EX. 5.52 (Incropera 3ª Edição)

para linha de centro $T(e/2, 14400) = T_o = 325 \text{ k}$

$$\frac{325 - 1100}{300 - 1100} = 0,968 = \text{erf}\left(\frac{x}{0,202}\right)$$

De Tab. B.2, tem-se $w \cong 1,55$

$$X = 0,313 \text{ m}$$

$$w \cong 1,55 = \frac{x}{0,202}$$

$$e = 2 * X = 0,626 \text{ m}$$

Verificação da validade da solução

$$\frac{T - T_{\text{sup},1}}{T_i - T_{\text{sup},1}} = 1.0 = \text{erf}(w) = 1.0$$

Sendo $w \cong 3 = \frac{e_{\text{min}}}{0,202}$

$$e_{\text{min}} = 0,606 \text{ m}$$

Tab.B.2 >> Função Erro de Gauss¹

w	erf w	w	erf w	w	erf w
0.00	0.00000	0.36	0.38933	1.04	0.85865
0.02	0.02256	0.38	0.40901	1.08	0.87333
0.04	0.04511	0.40	0.42839	1.12	0.88679
0.06	0.06762	0.44	0.46622	1.16	0.89910
0.08	0.09008	0.48	0.50275	1.20	0.91031
0.10	0.11246	0.52	0.53790	1.30	0.93401
0.12	0.13476	0.56	0.57162	1.40	0.95228
0.14	0.15695	0.60	0.60386	1.50	0.96611
0.16	0.17901	0.64	0.63459	1.60	0.97635
0.18	0.20094	0.68	0.66378	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.72	0.69143	1.80	0.98909
0.22	0.24430	0.76	0.71754	1.90	0.99279
0.24	0.26570	0.80	0.74210	2.00	0.99532
0.26	0.28690	0.84	0.76514	2.20	0.99814
0.28	0.30788	0.88	0.78669	2.40	0.99931
0.30	0.32863	0.92	0.80677	2.60	0.99976
0.32	0.34913	0.96	0.82542	2.80	0.99992
0.34	0.36936	1.00	0.84270	3.00	0.99998

¹A função erro de Gauss é definida pela relação

$$\operatorname{erf} w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$$

A função erro complementar é definida pela relação

$$\operatorname{erfc} w \equiv 1 - \operatorname{erf} w$$