

Álgebra Matricial – Lista 1 (Resolução)

1- A: Primeira coluna = $\{2; -3; -2\}$

Última linha = $\{-2; -1; 2\}$

Diagonal principal = $\{2; 2; 2\}$

B: Primeira coluna = $\{1; -4; -4; 0\}$

Última linha = $\{0; 3; 3; 5\}$

Diagonal principal = $\{1; 2; 5; 5\}$

C: Primeira coluna = $\{3; 5\}$

Última linha = $\{5; 4\}$

Diagonal principal = $\{3; 4\}$

2- a) Não é possível, pois as duas matrizes são de dimensões diferentes.

b) Não é possível, pois as dimensões são: $A_{2 \times 1}$ e $C_{2 \times 2}$ como 1, o número de colunas de A, é diferente de 2, o número de linhas de C, não é possível realizar a multiplicação dessas duas matrizes.

$$c) C^2 + 2B = \begin{bmatrix} 25 & 13 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 27 \\ 8 & 68 \end{bmatrix}$$

$$d) (B - C) - (C - B) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3- R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} r_1 l_1 & r_1 l_2 & r_1 l_3 \\ r_2 l_1 & r_2 l_2 & r_2 l_3 \\ r_3 l_1 & r_3 l_2 & r_3 l_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} l_1 r_1 & l_1 r_2 & l_1 r_3 \\ l_2 r_1 & l_2 r_2 & l_2 r_3 \\ l_3 r_1 & l_3 r_2 & l_3 r_3 \end{bmatrix}$$

Como $r_i l_j = l_j r_i$ podemos ver que para quaisquer valores as duas diagonais principais serão iguais.

4- a) $AC_{2 \times 3}$

b) $DA_{3 \times 3}$

c) $BC_{4 \times 3}$

c) $DAC_{3 \times 3}$

d) $BCDA_{4 \times 3}$

5- $Matriz\ de\ Médias = \frac{1^{a}Sala = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 8 & 6 & 8 \end{bmatrix} + 2^{a}Sala = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 7,5 & 8 & 9 \\ 8,5 & 6,5 & 7 \end{bmatrix}$

A partir dos elementos da matriz é possível encontrar as informações pedidas. O elemento da matriz é $mm_{1 \times j}$ ou $mm_{2 \times j}$ tal que: $mm_{1 \times j}$ é a média das meninas na prova “j” e $mm_{2 \times j}$ é a média dos meninos na prova “j”.

6- a) Matriz idempotente ($A * A = A$)

b) Matriz triangular

c) Matriz simétrica ($a_{ixj} = a_{jx1}$)

d) Matriz diagonal

e) Matriz vetor coluna

f) Matriz nula

g) Matriz vetor linha

7- $\det(A) = 2; \det(B) = 33; \det(C) = 0; \det(D) = 125$

a) $\det(A) = 2$

b) $\det(B) = 33$

c) $\det(D) = 125$

d) $\det(B^3 4DC) = \det(B)^3 * 4 \det(D) * \det(C) = 0$

8-
$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -1^{1+1} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & -1^{1+2} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & -1^{1+3} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ -1^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & -1^{2+2} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & -1^{2+3} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ -1^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & -1^{3+2} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} & -1^{3+3} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 6 \\ 17 & -11 & 18 \\ -18 & 34 & -28 \end{bmatrix}$$

$Traço(A) = -4 + 4 + (-1) = -1$

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} -1^{1+1} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} & -1^{1+2} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} & -1^{1+3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \\ -1^{2+1} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} & -1^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} & -1^{2+3} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \\ -1^{3+1} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & -1^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} & -1^{3+3} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} 29 & 22 & -23 \\ -37 & 19 & 67 \\ 56 & -14 & -35 \end{bmatrix}$$

$Traço(B) = 1 + 1 + 5 = 7$

$Adj(C) =$

$$\begin{bmatrix} -1^{1+1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{1+2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{1+3} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 10 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} & -1^{1+4} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 10 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \\ -1^{2+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{2+2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{2+3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} & -1^{2+4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \\ -1^{3+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{3+2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} & -1^{3+3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} & -1^{3+4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \\ -1^{4+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \end{bmatrix} & -1^{4+2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} & -1^{4+3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 10 & 0 \end{bmatrix} & -1^{4+4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 10 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -62 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$Traço(C) = -1 + 4 + 6 + 0 = 9$$

A parte do exercício 8 que pedia o posto de Matriz foi cancelada

9.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Para realizar a “Expansão de Laplace”, foi escolhida a primeira coluna:

$$\det(A) = (a_{11} * A_{11}) + (a_{21} * A_{21}) + (a_{31} * A_{31})$$

$$\text{Sendo: } A_{ij} = (-1)^{i+j} * D_{ij}$$

$$\det(A) = (0 * A_{11}) + (5 * A_{21}) + [(-2) * A_{31}]$$

Como $a_{11} = 0$, não há a necessidade de calcularmos o cofator da matriz A_{11}

$$A_{21} = (-1)^{2+1} * \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 24$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} * \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -8$$

Portanto:

$$\det(A) = (5 * 24) + [(-2) * (-8)] = 136$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Para realizar a “expansão de Laplace”, foi escolhida a primeira linha:

$$\det(B) = (a_{11} * A_{11}) + (a_{12} * A_{12}) + (a_{13} * A_{13}) + (a_{14} * A_{14})$$

$$\text{Sendo: } A_{ij} = (-1)^{i+j} * D_{ij}$$

$$\det(B) = (0 * A_{11}) + [(-1) * A_{12}] + (0 * A_{13}) + (5 * A_{14})$$

Como $a_{11} = 0$ e $a_{13} = 0$, não há a necessidade de calcularmos seus respectivos cofatores

$$A_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = -176$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} * \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} = -10$$

Portanto:

$$\det(B) = [(-1) * (-176)] + (5 * 10) = 226$$

$$c) C = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Para realizar a “expansão de Laplace”, foi escolhida a segunda coluna:

$$\det(C) = (a_{12} * A_{12}) + (a_{22} * A_{22}) + (a_{32} * A_{32}) + (a_{42} * A_{42})$$

$$\text{Sendo: } A_{ij} = (-1)^{i+j} * D_{ij}$$

$$\det(C) = (-4 * A_{12}) + (-2 * A_{22}) + (0 * A_{32}) + (0 * A_{42})$$

Como $a_{32} = 0$ e $a_{42} = 0$, não há a necessidade de calcularmos seus respectivos cofatores

$$A_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 92$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} * \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 22$$

Portanto:

$$\det(C) = (-4 * 92) + (-2 * 22) = -324$$

10. Para que a matriz seja classificada como “não singular”, a sua determinante deve ser diferente de zero. Assim, para a matriz: $A = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 16 & a \end{bmatrix}$

$$\det(A) \neq 0$$

$$(20 * a) - (5 * 16) \neq 0$$

$$20 * a \neq 80$$

$$a \neq 4$$

A resposta do problema, portanto, é representada por:

$$S: \{a \in R \mid a \neq 4\}$$

11.

$$a) A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * adj(A)$$

$$\det(A) = [(7 * 3 * 13) + (5 * 4 * 9) + (9 * 2 * 8)] - [(9 * 3 * 9) + (7 * 4 * 8) + (5 * 2 * 13)]$$

$$\det(A) = 597 - 597 = 0$$

Portanto, como $\det(A) = 0$, a matriz não tem inversa, sendo classificada como uma “Matriz Singular”.

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} * adj(B)$$

$$\det(B) = (4 * 6) - (5 * 7) = -11$$

Calculando a matriz de cofatores de B:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} * 6 = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} * 5 = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} * 7 = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} * 4 = 4$$

Dessa forma, a matriz de cofatores é representada por:

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$adj(B) = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$B^{-1} = \frac{1}{-11} * \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -6/11 & 7/11 \\ 5/11 & -4/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por definição, a matriz inversa de uma matriz identidade é a própria matriz identidade. Assim:

$$I^{-1} = I$$

$$C^{-1} = C$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} * adj(D)$$

$$\det(D) = (0 + 24 - 10) - (0 + 2 + 8)$$

$$\det(D) = 14 - 10$$

$$\det(D) = 4$$

Calculando os cofatores da matriz D:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Portanto, a matriz dos cofatores da matriz D é representada por:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -9 & 16 & -11 \\ -8 & 12 & -8 \end{bmatrix}$$

$$adj(D) = \begin{bmatrix} -2 & -9 & -8 \\ 4 & 16 & 12 \\ 2 & -11 & -8 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} -2 & -9 & -8 \\ 4 & 16 & 12 \\ 2 & -11 & -8 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -9/4 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1/2 & -11/4 & -2 \end{bmatrix}$$

12.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -7 = D$$

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(Ax_1) = -56 = Dx_1$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & 24 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(Ax_2) = -56 = Dx_2$$

Assim, os valores de x_1 e x_2 , pela regra de Cramer, são:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D} = 8$$

$$x_2 = \frac{Dx_2}{D} = 8$$

$$\text{b)} \begin{cases} x - 5y + 6z = 7 \\ 3x + 3y - z = 8 \\ 2x + 8y - 7z = 1 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0$$

Como o determinante da matriz “B” é igual a “zero”, o sistema é indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções, ou impossível.

$$\text{c)} \begin{cases} a + 4b = 7 \\ 3a + b + 2c = 10 \\ 4a + 5b + 2c = 17 \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = 0$$

Como o determinante da matriz “C” é igual a “zero”, o sistema é indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções, ou impossível.