O Método do Lugar das Raízes - Exemplos

Newton Maruyama

Departamento de Engenharia Mecatrônica - EPUSP

29 de setembro de 2008

Sistemas de segunda ordem

- Suponha o seguinte sistema de 2a. ordem:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}.$$

- Um sistema de controle em malha fechada com $G(s)$ (veja Figura 1) pode ser descrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 s + \omega_n^2}.$$

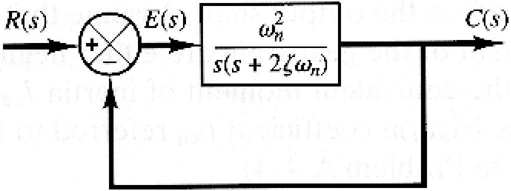


Figura: Sistema de 2a. ordem em malha fechada.

- Os pólos em malha fechada (veja Figura 2) são dados por:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d,$$

onde σ é a atenuação do sistema e ω_d é a freqüência natural amortecida.

- As seguintes relações podem ser definidas:

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \\ \sigma &= \zeta\omega_n, \\ \cos\beta &= \frac{\sigma}{\omega_n} = \zeta. \end{aligned}$$

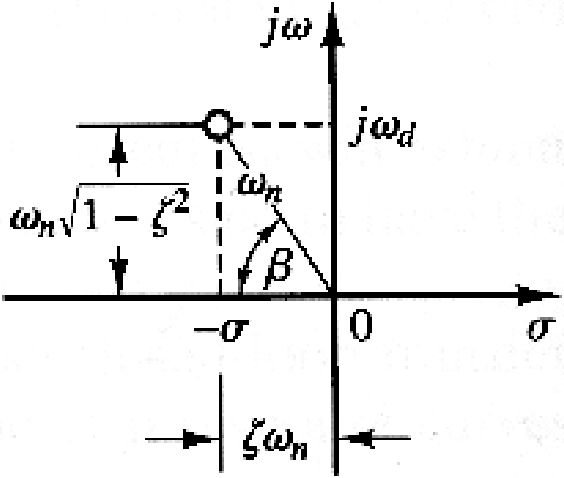
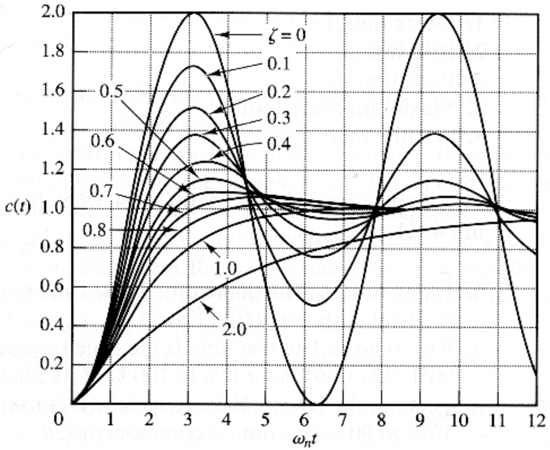


Figura: Pólos complexos e grandezas associadas.

- A resposta transitória deste sistema assume diferentes comportamentos de acordo com o valor do coeficiente de amortecimento ζ (veja Figura 3):



Resposta a degrau

- **Sistema sub-amortecido** $(0 < \zeta < 1)$:

$$y(t) = 1 - \frac{\exp^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), t \geq 0.$$

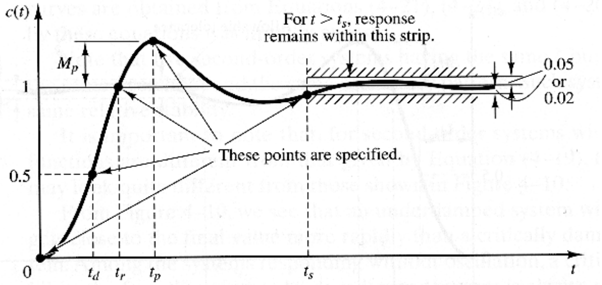
- **Sistema com amortecimento crítico** $(\zeta = 1)$::

$$y(t) = 1 - \exp^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), t \geq 0.$$

- **Sistema superamortecido** $(\zeta > 1)$**:**

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} \exp^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})} \exp^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}, t \geq 0.$$

- Para este sistema de 2a. ordem é possível estabelecer uma relação entre as grandezas que especificam a resposta transitória a degrau e os pólos do sistema.
- A resposta transitória a degrau para este sistema (veja Figura 4) pode ser caracterizado pelas seguintes grandezas:



- O tempo de subida t_r é aqui definido como o tempo que o sistema demora para subir de 0 e 100% do valor final:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}.$$

- O instante do pico t_p se refere ao instante da ocorrência do primeiro pico do sobresinal:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

- O máximo sobresinal é definido da seguinte forma:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%,$$

- e pode ser calculado da seguinte forma:

$$M_p = \exp^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}.$$

- O tempo de acomodação t_s é definido como o instante de tempo tal que o sinal de erro passa a ser menor que um determinado valor percentual, em geral, definido como 2% ou 5%.
- O tempo de acomodação t_s é em geral aproximado através das seguintes equações:
  - Critério de 2%:

$$\boxed{t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}}. \tag{1}$$

  - Critério de 5%:

$$\boxed{t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}}.$$

- Estas aproximações podem fornecer erros significativos como pode ser observado na Figura 5 que ilustra a variação de t_s em função de ζ.

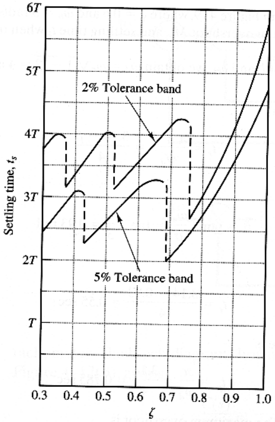


Figura: Tempo de acomodação t_s em função de ζ.

- Podemos observar que o tempo de acomodação t_s varia de forma discontínua. Para o critério de 2%, por exemplo, t_s varia aproximadamente da seguinte forma:
  - $3T < t_s < 4T$ para $0.3 < \zeta < 0.7$,
  - $3T < t_s < 6T$ para $0.7 < \zeta < 1.0$.

Lugares geométricos

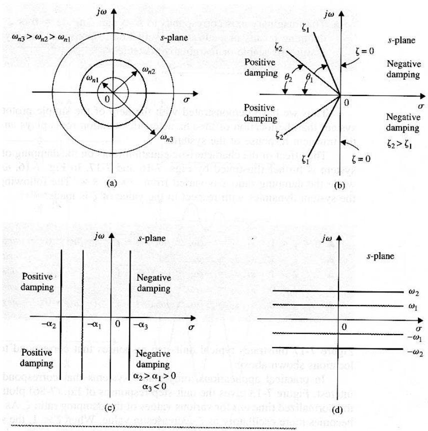


Figura: (a) Lugar geométrico para $\omega_n = cte$ - (b) Lugar geométrico para $\zeta = cte$ - (c) Lugar geométrico para $\sigma = cte$ - (d) Lugar geométrico para $\omega_d = cte$

Tempo de Subida t_r

O tempo de subida t_r não possui um lugar geométrico trivial, mas é usualmente aproximado por:

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}. \tag{2}$$

Ou seja, o tempo de subida t_r é inversamente proporcional a freqüência natural não amortecida ω_n. Entretanto esta equação é bastante aproximada mesmo para sistemas de 2a. ordem sem zeros.

Exemplo 5.1

- Deseja-se projetar um controlador $H(s)$ para o sistema ilustrado na Figura **??** onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{0.5}{s(s+3)}.$$

O controlador $H(s)$ deve ser tal que garanta as seguintes especificações:

1. Erro estacionário $e_{ss} = 0$ para entrada a degrau;
2. Tempo de assentamento $t_s < 4seg$ (critério de 2%);
3. Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

Qual controlador ?

O primeiro passo para o projeto é a escolha da estrutura do controlador (P, PI, PD, PID, etc.). Sabemos que para satisfazer a condição do erro estacionário e_{ss} basta utilizar um controlador proporcional $H(s) = K_p$ já que o sistema $G(s)$ já possui um integrador $1/s$.

Podemos calcular o erro estacionário através da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s), \\
&= \lim s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s), \\
&= \lim s\frac{s(s+3)}{s(s+3)+0.5K_p}\frac{1}{s}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)}{s(s+3)+0.5K_p}, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Concluímos então que o erro estacionário e_{ss} é nulo para uma entrada degrau caso seja adotado um controlador proporcional.

Agora devemos escolher K_p de tal forma que satisfaça as condições do tempo de assentamento t_s e do máximo sobresinal M_p. Para um controlador $H(s) = K_p$, a função de transferência do sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.5K_p}{s^2 + 3s + 0.5K_p},$$

o que é equivalente ao sistema de 2a. ordem padrão:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Para um sistema de 2a. ordem padrão as especificações transitórias de máximo sobresinal M_p e do tempo de assentamento t_s estabelecem um lugar geométrico no plano s.
O tempo de assentamento t_s (critério de 2%) é dado aproximadamente por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n},$$

Como deseja-se que $t_s < 4seg$ então:

$$
\begin{aligned}
t_s < 4seg \Rightarrow \\
\frac{4}{\zeta\omega_n} < 4 \Rightarrow \\
\zeta\omega_n > 1.
\end{aligned}
$$

como $\sigma = \zeta\omega_n$ então:

$$\sigma > 1.$$

Para o máximo sobresinal devemos ter:

$$M_p < 5\%$$

$$M_p = \exp^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} < 0.05 \Rightarrow$$

$$\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < -2.99 \quad (\times -1) \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 2.99 \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 0.95 \Rightarrow$$

$$\zeta^2 > 0.48 \Rightarrow$$

$$\zeta^2 - 0.48 > 0.$$

o que resulta em $\zeta < -0.69$ e $\zeta > 0.69$. Entretanto, sabemos que necessariamente $\zeta > 0$ então ficamos somente com $\zeta > 0.69$.

Sabemos que:

$$\cos\beta = \zeta,$$

onde β é o ângulo descrito por uma reta que cruza o pólo complexo e a origem do sistema de coordenadas e o eixo real (contado a partir do sentido anti-horário) Veja Figura 2. Para $\boxed{\zeta = 0.69 \Rightarrow \beta = 0.8092 rad = 46.37^o}$. Então, como:

$$\zeta > 0.69 \Rightarrow$$
$$\beta < 46.37^o.$$

O lugar geométrico no plano s onde estão as raízes do sistema em malha fechada que satisfazem as especificações de $t_s < 4seg$ e $M_p < 0.05$ é dado pela intersecção das seguintes regiões:

$$\begin{cases} \sigma > 1 \\ \text{e} \\ \beta < 46.37^o. \end{cases}$$

A Figura 7 ilustra o lugar geométrico definido por estas condições.

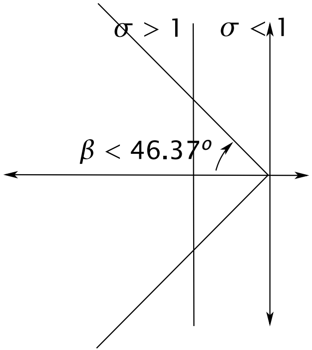


Figura: Lugar geométrico resultante de $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$.

O lugar geométrico definido acima, define uma região no plano s, tal que a ocorrência dos pólos do sistema de 2a. ordem padrão nesta região, define um sistema que satisfaz as especificações de tempo de assentamento t_s e máximo sobresinal M_p. Se pudermos simultaneamente definir o valor do coeficiente de amortecimento ζ e da freqüência natural não amortecida ω_n, podemos alocar os pólos em qualquer local.

Entretanto, para o nosso sistema, só podemos variar o ganho K_p, o que limita a região possível para se alocar os pólos. Desta forma, os possíveis valores para os pólos que satisfazem as especificações compreeendem a intersecção entre o lugar geométrico definido acima e o lugar das raízes do sistema.

A Figura 8 ilustra o lugar geométrico e o lugar das raízes do sistema em função de K_p.

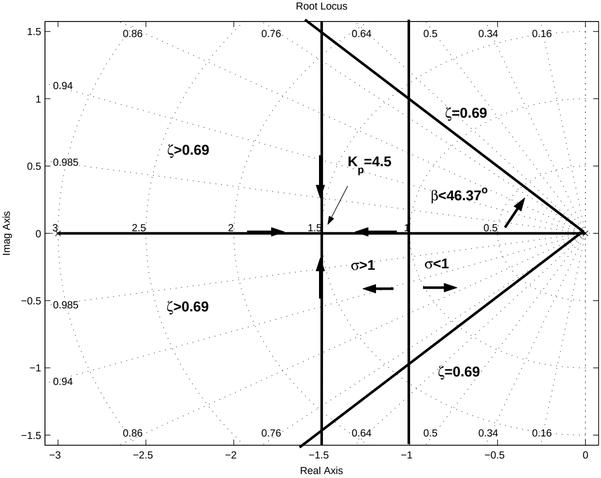


Figura: Lugar das raízes e lugar geométrico para t_s e M_p.

Através do grafico ilustrado na Figura 8 podemos escolher um pólo do sistema e consequentemente calcular o valor de K_p associado.

Qualquer pólo ?

Lembre-se que podemos escolher qualquer pólo, desde que o pólo associado também pertença a região que permitida. Desta forma, o trecho do lugar das raízes $[-3, 2]$ não pode ser escolhido já que a escolha do pólo neste trecho implica em escolher o outro pólo associado no trecho $[-1, 0]$ que não pertence à região permitida.

Por exemplo, podemos escolher o pólo duplo $s = -1.5$. Utilizando a condição de módulo, obtemos:

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow$$
$$\left|\frac{K_p 0.5}{s(s+3)}\right| = 1 \Rightarrow$$
$$K_p = \left.\frac{|s||s+3|}{0.5}\right|_{s=-1.5} \Rightarrow$$
$$K_p = \frac{|-1.5||-1.5+3|}{0.5} \Rightarrow$$
$$K_p = 4.5$$

Com esta escolha de $K_p = 4.5$ o sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2.25}{s^2 + 3s + 2.25}.$$

onde $\zeta = 1$ e $\omega_n = 1.5$.

A resposta a degrau do sistema em malha fechada é ilustrado na Figura 9. Podemos observar que o tempo de assentamento $t_s = 3.87 seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.
Se calcularmos o tempo de assentamento t_s pela Equação 1 obtemos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2.67 seg.$$

A Equação 1 fornece portanto valores muito diferentes para $\zeta = 1.0$.

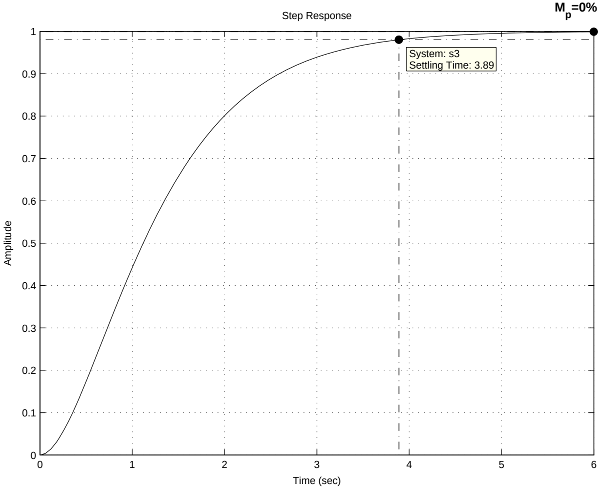


Figura: Resposta a degrau do sistema

Exemplo 5.2

Deseja-se projetar um controlador $H(s)$ para um sistema onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{0.5}{(s+3)}.$$

O controlador $H(s)$ deve ser tal que garanta as seguintes especificações:

1. Erro estacionário $e_{ss} = 0$ para entrada a degrau;
2. Tempo de assentamento $t_s < 4seg$ (critério de 2%);
3. Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

O primeiro passo para o projeto é a escolha da estrutura do controlador (P, PI, PD, PID, etc.). Sabemos que para satisfazer a condição do erro estacionário e_{ss} é necessário a inserção de um integrador $1/s$ em malha aberta já que o sistema $G(s)$ é um sistema de 1a. ordem. Desta forma, vamos escolher um controlador proporcional-integral PI:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right).$$

Podemos calcular o erro estacionário através da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s), \\
&= \lim s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s), \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{T_i s(s+3)}{T_i s(s+3) + 0.5K_p(T_i s + 1)}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{0}{0 + 0.5K_p} = 0.
\end{aligned}
$$

Concluímos então que o erro estacionário e_{ss} é nulo para uma entrada degrau caso seja adotado um controlador proporcional-integral.

Para este caso, a função de transferência em malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = K_p \frac{0.5(T_i s + 1)}{T_i s(s + 3)},$$

Os pólos e o zero em malha aberta são dados por:

- pólos em malha aberta: $s = 0$, $s = -3$;
- zero em malha aberta: $s = -1/T_i$.

A função de transferência do sistema de controle em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{0.5K_p(T_i s + 1)}{T_i s(s + 3) + 0.5K_p(T_i s + 1)}$$

$$= \frac{0.5K_p T_i(s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + (3 + 0.5K_p)s + \frac{0.5K_p}{T_i}}.$$

- A adição de um zero em malha aberta pode provocar uma mudança significativa de comportamento do sistema em relação ao sistema de 2a. ordem.
- Desta forma, não podemos utilizar as equações para o tempo de subida t_r, tempo de assentamento t_s, instante do pico t_p e o máximo sobresinal M_p de maneira precisa.
- Muitas vezes, para efeito de projeto utilizamos as equações do sistema padrão, mas devemos nos lembrar que o efeito do zero adicional pode ser significativo.

O controlador PI possui dois parâmetros, o ganho proporcional K_p e o tempo integral T_i. O lugar das raízes é obviamente construído em função de um único parâmetro. Desta forma, vamos escolher um valor para T_i e construir o lugar das raízes em função de K_p.

Qual o valor de T_i que devemos escolher ?

Para mostrar como a escolha de T_i influencia a solução para este problema vamos escolher dois valores para T_i e construir o lugar das raízes para estes valores.

Escolha 1

Vamos escolher inicialmente fazer $T_i = 0.5$. Com esta escolha o zero $s = -1/T_i$ estará entre os dois pólos de malha aberta. Para este caso, a malha aberta pode ser escrita como:

$$G(s)H(s) = \frac{0.25s + 0.5}{0.5s^2 + 1.5s}$$

O lugar das raízes para este sistema é ilustrado na Figura 10

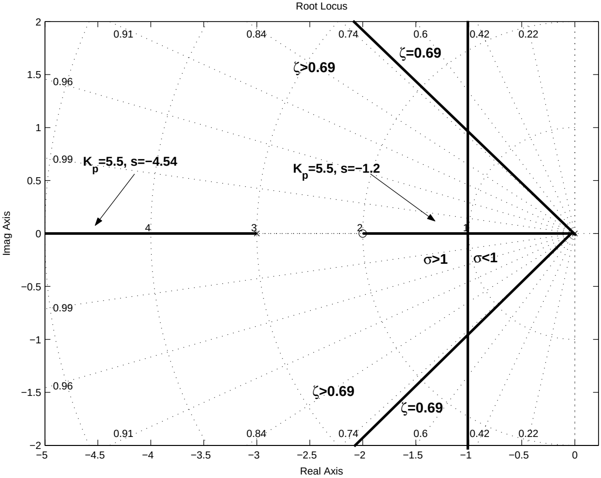
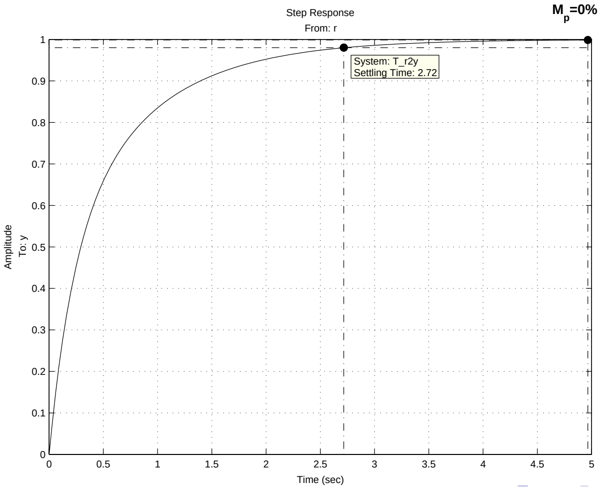


Figura: Lugar das raízes para $T_i = 0.5$.

Vamos escolher no lugar das raízes o ponto $s = -1.2$ que resulta no valor de $K_p = 5.5$. A outra raiz correspondente a $K_p = 5.5$ é $s = -4.54$.
O sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1.375s + 2.75}{s^2 + 5.75s + 5.5}.$$

A resposta a degrau para este sistema é ilustrada na Figura 11. Note que o tempo de acomodação $t_s = 2.72 seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.



Para efeito de comparação, vamos analisar o comportamento do sistema de 2a. ordem padrão equivalente. O sistema de 2a. ordem padrão equivalente é aquele que tem o mesmo denominador, ou seja,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5.5}{s^2 + 5.75s + 5.5}.$$

Para este sistema, o coeficiente de amortecimento $\zeta = 1.22$ e a freqüência natural não amortecida $\omega_n = 2.35$. Utilizando a fórmula para o tempo de acomodação temos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1.22 \times 2.35} = 1.4 seg.$$

A resposta a degrau para este sistema está ilustrada na Figura 12. Note que o valor do tempo de assentamento t_s é igual a $3.48seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$. Desta forma, concluímos que a equação para o cálculo do tempo de assentamento t_s não vale neste caso, e que o sistema padrão possui o tempo de assentamento para resposta a degrau bastante diferente do sistema em malha fechada projetado.

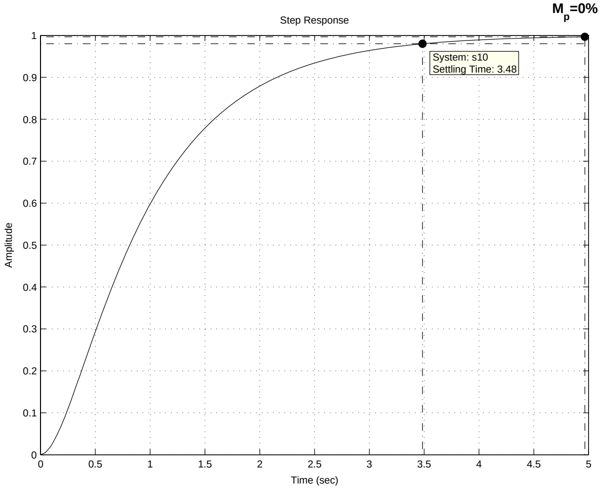


Figura: Resposta a degrau do sistema padrão.

Escolha 2

Vamos escolher agora $T_i = 0.2$, logo $1/T_i = 5$. Desta forma, o zero $s = -1/T_i$ está à esquerda dos pólos em malha aberta $s = 0$, $s = -3$. A malha aberta para esta escolha de T_i é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{0.1s + 0.5}{0.2s^2 + 0.6s}$$

O lugar das raízes em conjunto com o lugar geométrico para $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$ está ilustrado na Figura 13. Note que agora, o lugar das raízes descreve um círculo aonde estão contidos os pólos conjugados complexos. Podemos por exemplo, escolher os pólos $s = -1.94 \pm j0.79$ que correspondem ao ganho $K_p = 1.75$.

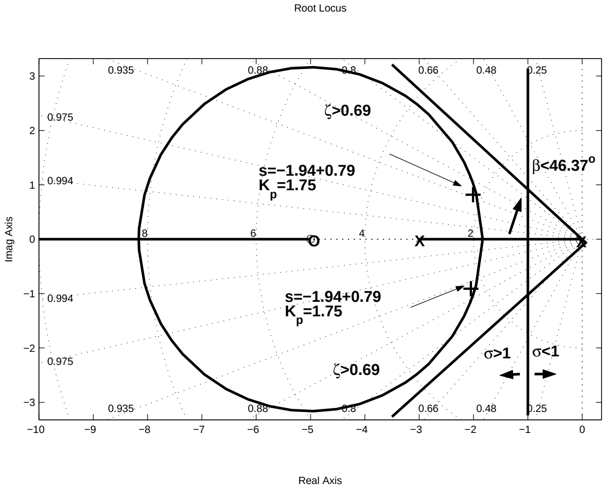
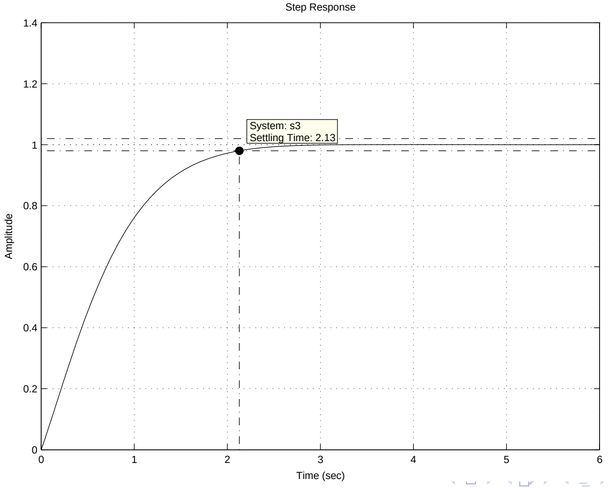


Figura: Lugar das raízes e o lugar geométrico para $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$.

A função de transferência em malha fechada resultante pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.175s + 0.875}{s^2 + 3.875s + 4.375}.$$

A resposta a degrau para este sistema é ilustrada na Figura 14. Note que o tempo de acomodação $t_s = 2.13 seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.



Para efeito de comparação, vamos analisar o comportamento do sistema de 2a. ordem padrão equivalente. O sistema de 2a. ordem padrão equivalente é dado por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{4.375}{s^2 + 3.875s + 4.375}.$$

Para este sistema, o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.93$ e a freqüência natural não amortecida $\omega_n = 2.1$. Utilizando a fórmula para o tempo de acomodação t_s temos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.93 \times 2.1} = 2.05 seg.$$

A resposta a degrau para este sistema está ilustrada na Figura 62. Note que o valor do tempo de assentamento t_s é igual a $2.4seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0.05\%$. Neste caso, a equação para o calculo do tempo de assentamento t_s também não fornece um valor preciso. Entretanto, o sistema projetado e o sistema padrão possuem tempo de assentamento t_s relativamente próximos.

Resposta a degrau do sistema padrão.