Nome: ______________________________

NUSP: ______________________________

PMR-2360 - Controle e Automação I
Provinha 1 - 26 de Agosto de 2016
Duração da prova - 60 minutos

[Q. 1] (2.0pt) Considere um sistema linear invariante no tempo descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t). \tag{1}$$

- (1.0pt) Calcule a função de transferência $Y(s)/U(s)$.
- (1.0pt) Calcule a resposta a *Estado-Zero* para $u(t) = 1$ para $t \geq 0$.

[Q. 2] (4.0pt) Seja o seguinte sistema de controle em malha fechada:

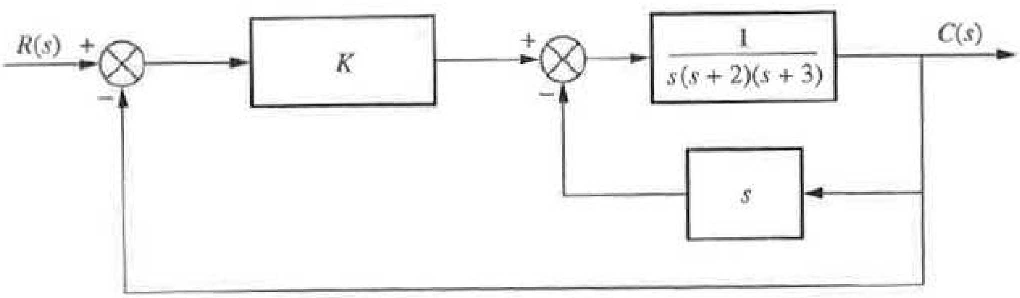
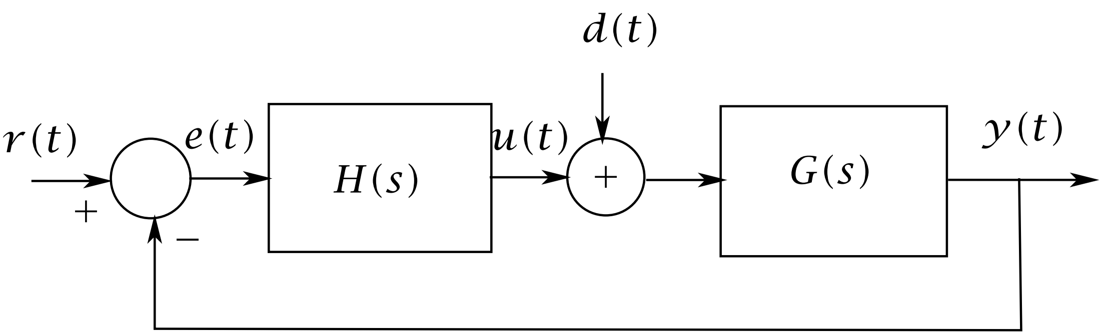


Figura 1: Sistema de controle em malha fechada.

- (2.0pt) Calcule o intervalo para os valores de K que tornam o sistema de controle em malha fechada estável.
- (2.0pt) Calcule os pólos que tornam o sistema marginalmente estável.

[Q. 3] (4.0pt) Um sistema de controle em malha fechada está ilustrado na Figura abaixo.



Na Figura,

- $r(t)$ é o sinal de referência,
- $d(t)$ é o sinal de distúrbio,
- $e(t)$ é o sinal de erro,
- $u(t)$ é o esforço de controle,
- $y(t)$ é a sinal de saída do sistema ou variável de controle,
- $H(s)$ é o controlador a ser projetado e

- $G(s)$ é a função de transferência do sistema dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \tag{2}$$

onde $\tau_1, \tau_2 > 0$.

Para as questões abaixo, argumente matematicamente.

(a) (1.0pt) Considerando um controlador proporcional $H(s) = K_p$ ($K_p = cte$) calcule a constante de erro de posição estático C_P e o erro estático e_{SS}.

(b) (1.0pt) Considerando o mesmo controlador proporcional acima, calcule a constante de erro de velocidade estático C_V e o erro estático e_{SS}.

(c) (2.0pt) Qual um tipo de controlador (dentre estes: P,PI,PD ou PID) que poderia ser utilizado para se obter erro estacionário nulo para entrada degrau $R(s) = A/s$ ($A = cte$) e também possa anular o efeito estacionário de um distúrbio degrau $D(s) = B/s$ ($B = cte$) ?

[Q.1] $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = \dfrac{du(t)}{dt} - u(t)$
(2,0pt)

a-)
(1,0pt)

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) - 3Y(s) = sU(s) - U(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + 2s - 3\right] = U(s)(s-1)$$

$$Y(s)\left[(s-1)(s+3)\right] = U(s)(s-1)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

A definição de função de transferência não permite fatores comuns

b-)
(1,0pt)

$u(t) = 1 \quad U(s) = 1/s$

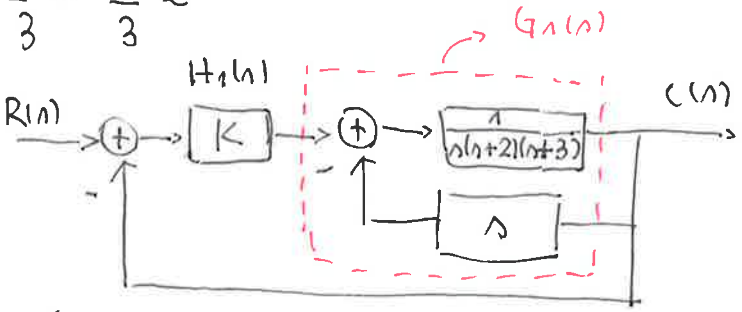
$$Y(s) = \frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} =$$

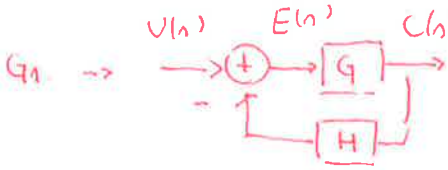
$$A = \frac{1}{(s+3)}\cdot\frac{1}{s}\cdot s\Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \qquad Y(s) = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3(s+3)} \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s}(s+3)\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

[Q.2]
(4,0pt)





$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = U(s) - H(s).C(s)$$

$$\Rightarrow C(s) = G(s)\left[U(s) - H(s)C(s)\right]$$

$$\Rightarrow C(s) = G(s)U(s) - G(s)H(s)C(s)$$

$$C(s)\left[1 + G(s)H(s)\right] = G(s)U(s)$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G_1(s) = \frac{\cancel{\frac{1}{s(s+2)(s+3)}}}{1 + s\cdot\cancel{\frac{1}{s(s+2)(s+3)}}} = \frac{1}{s(s+2)(s+3) + s}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 7s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s)} = \frac{\frac{K}{s^3+5s^2+7s}}{1 + \frac{K}{s^3+5s^2+7s}} =$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + 5s^2 + 7s + K}$$

$$F(s) = s^3 + 5s^2 + 7s + K$$

Routh-Hurwitz

s^3	1	7
s^2	5	K
s^1	$\frac{35-K}{5}$	
s^0	K	

$K > 0$

$\frac{35-K}{5} > 0 \Rightarrow K < 35$

a-) (2.0pt) Faixa de valores de K para estabilidade

$$0 < K < 35$$

b-) (2.0pt) Sistema marginalmente estável $\Rightarrow K = 35$

utilizando a equação auxiliar correspondente a 2ª linha da tabulação de Routh

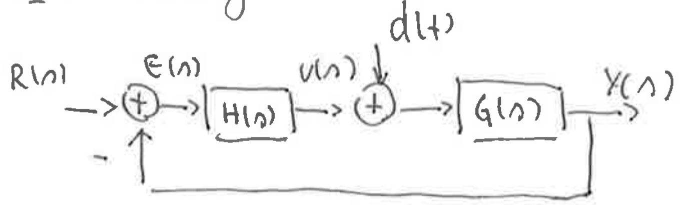
$$5s^2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad 5s^2 + 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 = -7$$

$s = \pm\sqrt{7}\,j \rightarrow$ pólos marginalmente estáveis

ou

$s = \pm 2.6458\,j$

[Q.3]



$G(s) = \frac{1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

$\tau_1, \tau_2 > 0$

(a) (1.0pt) $H(s) = K_p = cte$

Constante de erro de posição estático C_p

$$C_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+C_p} = 0$$

(b) (1.0pt) Constante de erro de velocidade estático C_v

$$C_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{C_v} = \frac{1}{K}$$

(c) $D(s) = B/s$ $R(s) = A/s$

(20pt) Um controlador proporcional é suficiente para se obter erro nulo p/ entrada $R(s) = A/s$ mas não consegue eliminar o efeito de um distúrbio degrau $D(s) = B/s$

É necessário acionar mais um integrador na malha aberta

Pode-se escolher por exemplo um controlador PI $H(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

Podemos verificar essa hipótese:

Efeito de $R(s) = A/s$, $D(s) = 0$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)H(s)} \cdot R(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}} \cdot \frac{A}{s} \Rightarrow$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{T_i s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{T_i s^2(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) + K_p(T_i s+1)} \cdot \frac{A}{s}$$

$$= 0$$

Efeito de $D(s) = B/s$, $R(s) = 0 \Rightarrow E(s) = -Y(s)$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot D(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}}{1 + \frac{1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \cdot K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)} \cdot \frac{B}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{T_i s}{T_i s^2(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) + K_p(T_i s+1)} \cdot \frac{B}{s}$$

$$= 0$$