Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I
AULA 10

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 114
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2014
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=2905

26/03/2014

Modelo de Rutherford

De acordo com o modelo de Rutherford o número de partículas espalhadas α por núcleo observadas na tela de um cintilômetro de área A será a uma distância r da folha espalhadora:

$$\Delta N = Int\left(\frac{A}{r^2}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{1}{4}\frac{1}{sen^4 \theta/2}$$

Intensidade do feixe α

Próxima folha

partículas α

Partículas espalhadoras

Fator devido a área do cintilômetro e a distância deste da folha espalhadora

Energia cinética das partículas α antes do espalhamento

Espalhamento em uma Folha fina de material

Chamaremos de n o número de núcleos por unidade de volume

$$n = \frac{\rho(g/cm^3).N_A(\acute{a}tomos/mol)}{M(g/mol)}$$

$$n = \frac{\rho N_A}{M}\frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$$

Se a folha tem uma espessura **t** (cm) temos que ***nt*** é o número de núcleos por unidade de área (átomos/cm^2)

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com E_k = 6,0MeV incide em uma folha de prata com 1,0μm de espessura. A corrente do feixe é de 1,0nA. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm² de área situado a 2,0cm da folha com um ângulo de 75º? (dados: Ag: Z=47, ρ=10,5g/cm³, M=108g/mol)

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{Int}{sen^4 \theta/2} \left(\frac{A}{r^2}\right)$$

1) Intensidade do feixe de α

$$I = \frac{i}{q} = \frac{1nA}{2e} = \frac{1x10^{-9}(C/s)}{2x1.6x10^{-19}C}$$

$$I = 0{,}312x10^{10} = 3{,}12x10^{9}\,\frac{alfas}{s}$$

2) Número de núcleos (átomos por unidade de volume)

$$n = \frac{10{,}5(g/cm^3).6{,}02x10^{23}(\acute{a}tomos/mol)}{108(g/mol)}$$

$$n = 5{,}85x10^{22}\,\frac{\acute{a}tomos}{cm^3} = 5{,}85x10^{28}\,\frac{\acute{a}tomos}{m^3}$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com E_k = 6,0MeV incide em uma folha de prata com 1,0μm de espessura. A corrente do feixe é de 1,0nA. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm² de área situado a 2,0cm da folha com um ângulo de 75º? (dados: Ag: Z=47, ρ=10,5g/cm³, M=108g/mol)

$$\Delta N = \frac{Int}{sen^4 \theta/2} * \left(\frac{A}{r^2}\right) * \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha}\right)^2$$

3) Correção área do cintilômetro

$$\frac{A}{r^2} = \frac{5mm^2}{(2cm)^2} = \frac{5x10^{-6} m^2}{(2x10^{-2})^2 m^2}$$

$$\Delta N = \frac{3{,}12x10^9 x5{,}85x10^{28} x10^{-6} x5x10^{-6}}{0{,}137x\left(2x10^{-2}\right)^2} x\left(\frac{9x10^9 x47x(1{,}6x10^{-19})^2}{2x6x10^6 x1{,}6x10^{-19}}\right)^2$$

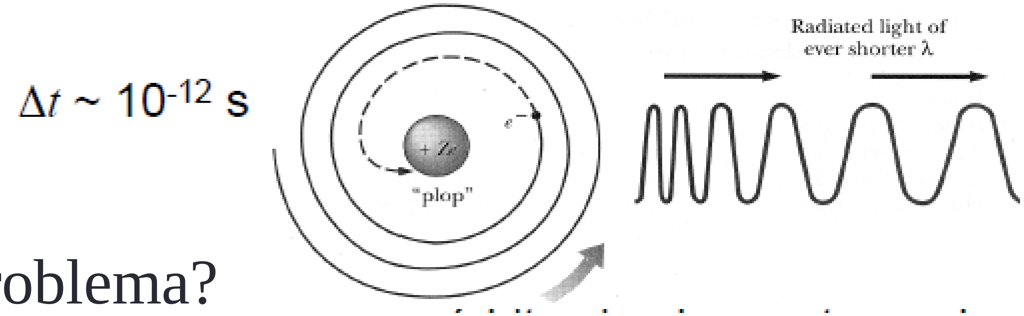
$$\Delta N = \frac{91{,}26x10^{25}}{0{,}137x4x10^{-4}} x(56{,}4)^2 x(10^{-16})^2$$

$$\Delta N = 529x10^3 x10^{-3}$$

$$\Delta N = 529alfas/s$$

E a estabilidade do átomo proposto por Rutherford ?

- Este modelo proposto por Rutherford tinha um sério problema conceitual:
  - Como elétrons que estavam orbitando ao redor do núcleo poderia manter o sistema estável?
  - Elétron acelerado devido ao movimento circular em torno do núcleo.
  - Da teoria eletromagnética clássica temos que uma carga acelerada irradia energia continuamente (radiação eletromagnética).
  - Energia do sistema deve decrescer.
  - R decresce – órbitas irão diminuir o sistema deveria colapsar – elétron cair no núcle



- Como resolvemos este problema?
- Além do mais havia a emissão de comprimentos de luz discretos por alguns gases, que não havia ainda sido explicado

O Modelo de Bohr

- Em 1913, Niels Bohr propõe um modelo baseado nas ideias de Rutherford – artigo "On the constitution of atoms and molecules":
  - Considerou que o elétron se move em torno do núcleo (muito + massivo) e com carga positiva

POSTULADOS:

- O elétron em um átomo se move em uma órbita circular em torno do núcleo sob a influência da atração Coulombiana entre o elétron e o núcleo, obedecendo as leis da mecânica clássica.
- Em vez de infinitas orbitas que seriam possíveis segundo a mecânica clássica, o elétron só pode se mover em certas órbitas na qual seu momento angular orbital L é um múltiplo inteiro de ħ ($h/2\pi$)

$$L = n\hbar \quad , \quad n = 1,2,3....$$

O Modelo de Bohr

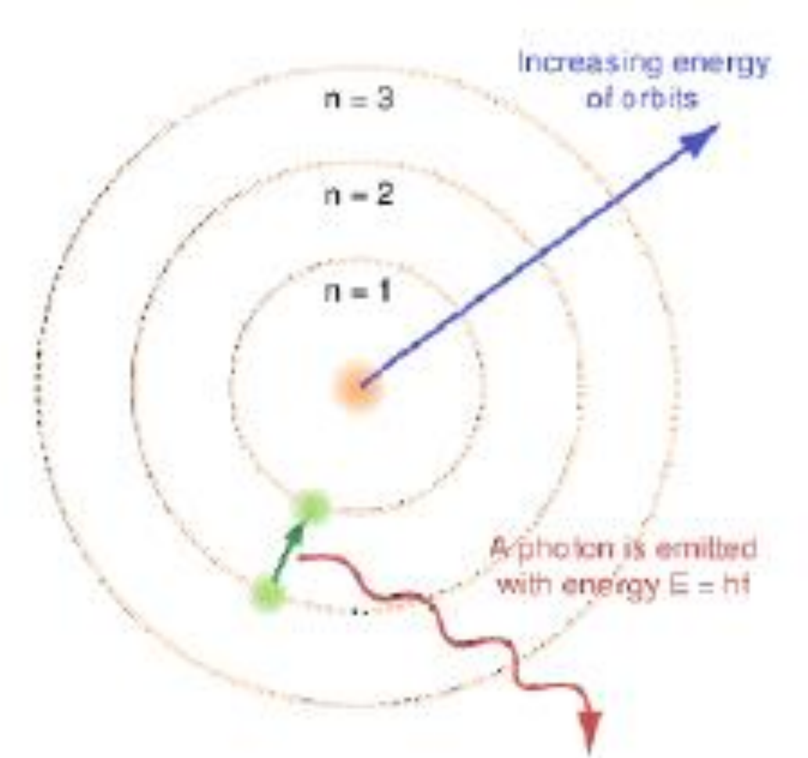
POSTULADOS:

- ❑ Apesar dos elétrons estarem acelerados, um elétron que se move em uma destas órbitas possíveis não emite radiação eletromagnética. Portanto as energia total E permanece constante. (não emissão contaria a eletromagnetismo clássico).
- ❑ É emitida radiação eletromagnética se um elétron se move inicialmente sobre uma órbita de energia Ei e depois muda seu movimento descontinuamente de forma a se mover em uma orbita Ef. A frequência da radiação emitida ν é igual a:

$$h\nu = E_i - E_f$$

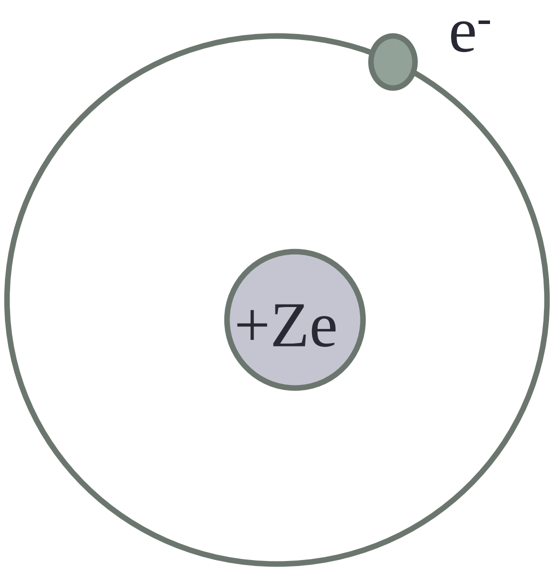
o elétron pode transitar de uma órbita permitida para outra “num salto” emitindo um fóton e conservando energia do sistema

O Modelo de Bohr



- Orbita circular
- L = nħ
- Energia total constante
- $$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

O Modelo de Bohr



- Átomo com núcleo de carga Ze e massa M e elétron com carga –e e massa m_e
- m_e desprezível em relação a M
- Estabilidade mecânica
- Forca centrípeta = Força Coulombiana

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

- Momento angular

$$\left.\begin{aligned} L &= n\hbar \\ L &= mvr \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} mvr &= n\hbar \\ v &= \frac{n\hbar}{mr} \end{aligned}$$

O Modelo de Bohr – raio e velocidade

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \dfrac{mv^2}{r} \\ \\ v = \dfrac{n\hbar}{mr} \end{array}\right\}$$

$$Ze^2 = 4\pi\varepsilon_o r^2 \frac{mv^2}{r} = 4\pi\varepsilon_o rmv^2$$

$$Ze^2 = 4\pi\varepsilon_o rm\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2$$

$$Ze^2 = 4\pi\varepsilon_o \frac{n^2\hbar^2}{mr}$$

$$r = 4\pi\varepsilon_o \frac{n^2\hbar^2}{Ze^2 m} \longrightarrow a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

Raio de Bohr=0,529Å

$$\boxed{r_n = \frac{n^2 a_o}{Z}}$$

Raio atômico é quantizado

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{n\hbar}{m}\frac{Ze^2 m}{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}}$$

H=1, Z=1, n=1
r_1=0,05nm
v_1~2,2x10^6m/s

O Modelo de Bohr – Energia

- A energia de um elétron atômico se movendo em uma das órbitas possíveis
- A energia cinética do sistema é devido ao elétron
- K = ½ mv^2
- O núcleo é massivo comparado com o elétron (m_{proton} =1836m) que o núcleo pode ser considerado em repouso.
- A energia potencial V é

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

- A energia mecânica total:

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

O Modelo de Bohr – Energia

$$E = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$r_n = \frac{n^2 a_o}{Z}$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{e^4 m}{\hbar^2}$$

E_o = 13,6eV

$$\left.\begin{array}{l} E_n = -\dfrac{1}{2}\dfrac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_o n^2 a_0} \\ a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2} \\ E_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \dfrac{Z^2 e^4 m}{\hbar^2 n^2} \end{array}\right\} \quad E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

Energia quantizada

O estado de energia mais baixo:

n=1 E_1= -E_o

menor raio

Postulados do Modelo de Bohr

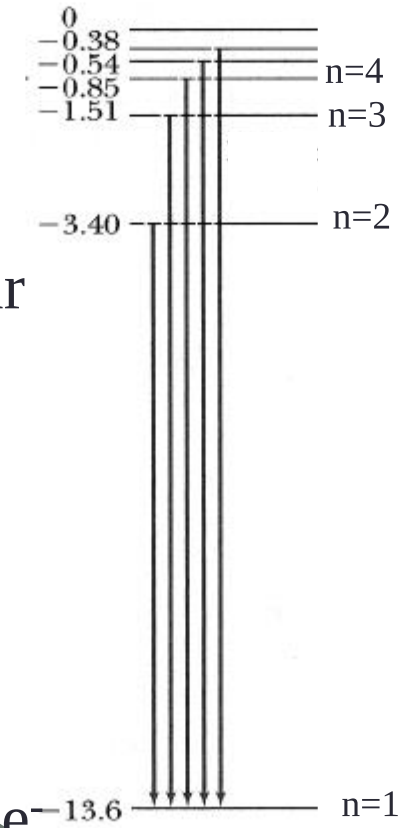
- A quantização do momento angular orbital do elétron implica na quantização da energia
- n=1 estado fundamental – menor energia

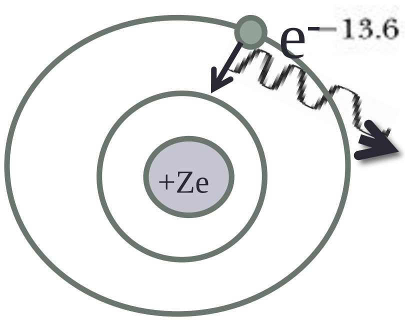
  Hidrogênio

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

- Níveis discretos de energia
- Os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia
- átomo só pode existir em “estados estacionários” com energias quantizadas, E_n, definidas
- Átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro.
- A frequência da radiação emitida esta relacionadas às energias das órbitas:

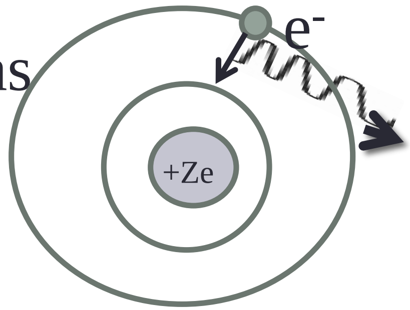
$$h\upsilon = E_{ni} - E_{nf}$$





Modelo de Bohr

- A frequência da radiação emitida esta relacionadas às energias das órbitas:



$$E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

$$h\upsilon = E_{ni} - E_{nf}$$

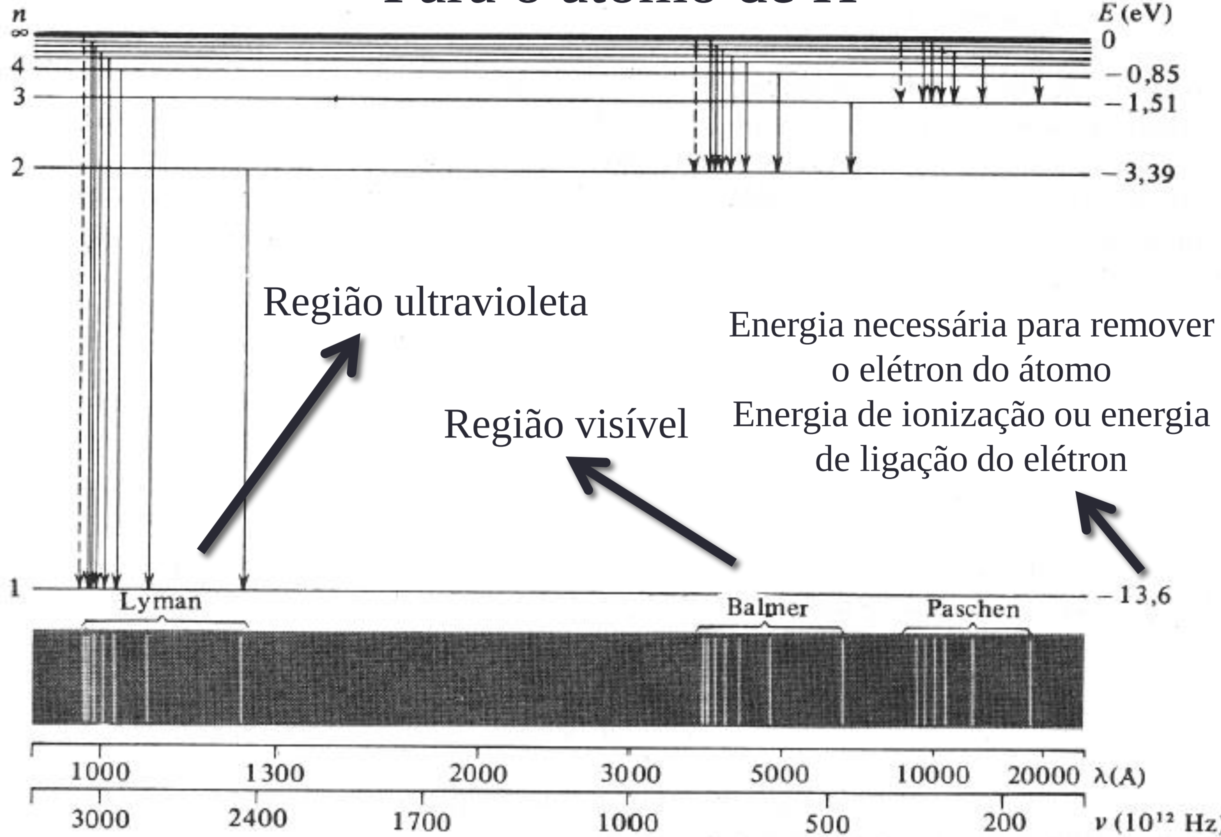
$$h\upsilon = -E_0 \frac{Z^2}{n_i^2} - \left(-E_0 \frac{Z^2}{n_f^2} \right)$$

$$\upsilon = \frac{E_0 Z^2}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

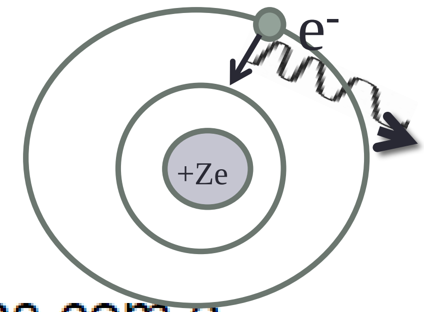
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0 Z^2}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Valor teórico obtido por Bohr para a constante de Rydberg
Calculou R=1,097x10^{-7} m^{-1}

Para o átomo de H



Modelo de Bohr



1. $n = 1 \Rightarrow$ estado fundamental (menor energia)
2. Excitação $\Rightarrow$ transições para n maior ($n > 1$)
3. Volta para o estado fundamental: emissão de fótons com a diferença de energia entre os estados. Caso particular do H:

$Z = 1$ e $n_f = 2$ ($n_i > n_f \Rightarrow$ desexcitação)

$$\kappa = R_\infty\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$R_n = \frac{E_0}{hc} = \frac{mk^2e^4}{4\pi c\hbar^3}$$

Espectro de Balmer, se $R_H = R_\infty$. Bohr obteve valor bastante próximo.

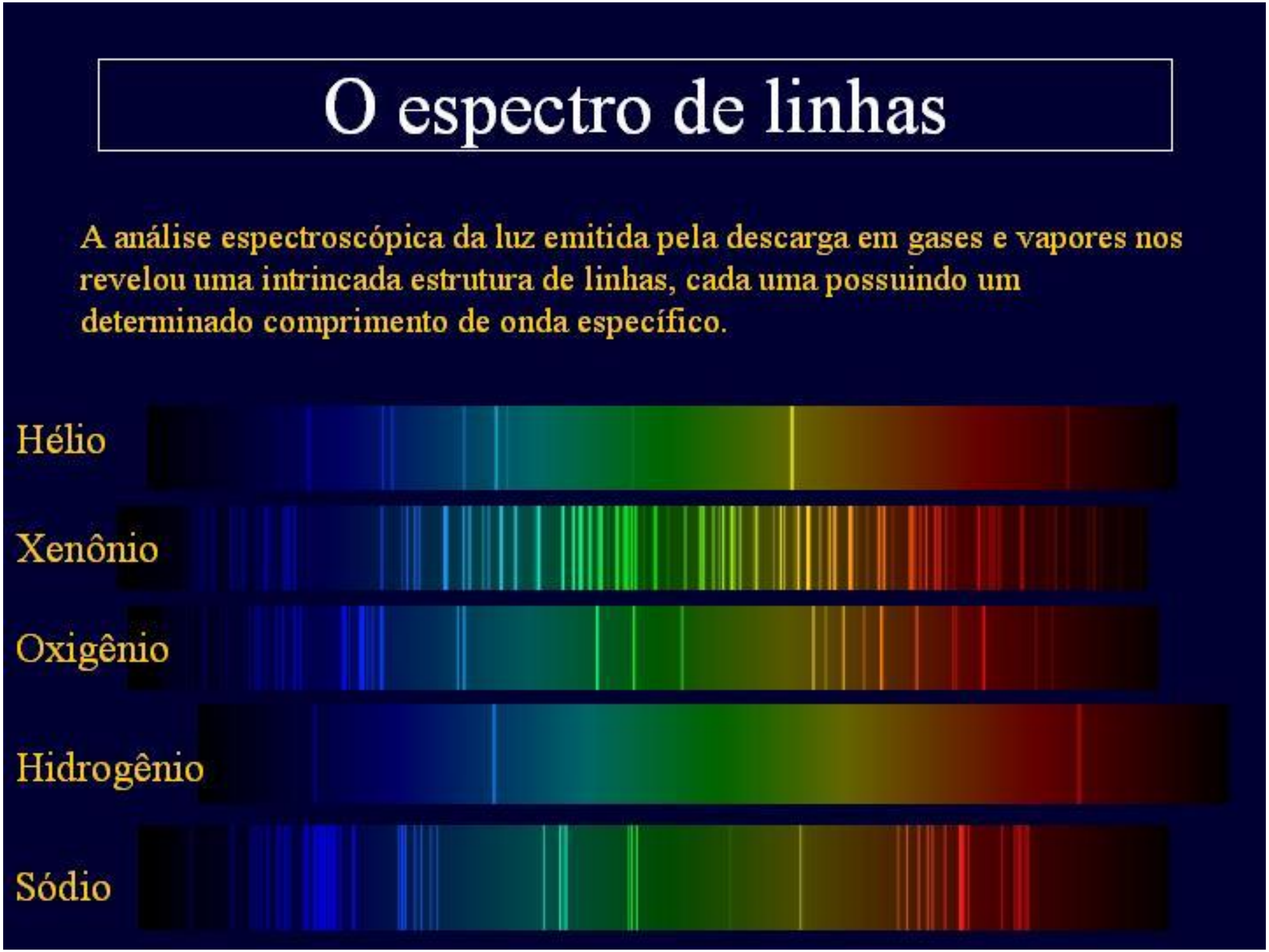
Correção para massa nuclear finita $\Rightarrow$ massa reduzida no lugar da massa do e^-.

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

m=m_e =9,109x10^{-31}kg
e
M = m_p=1,673x10^{-27}kg

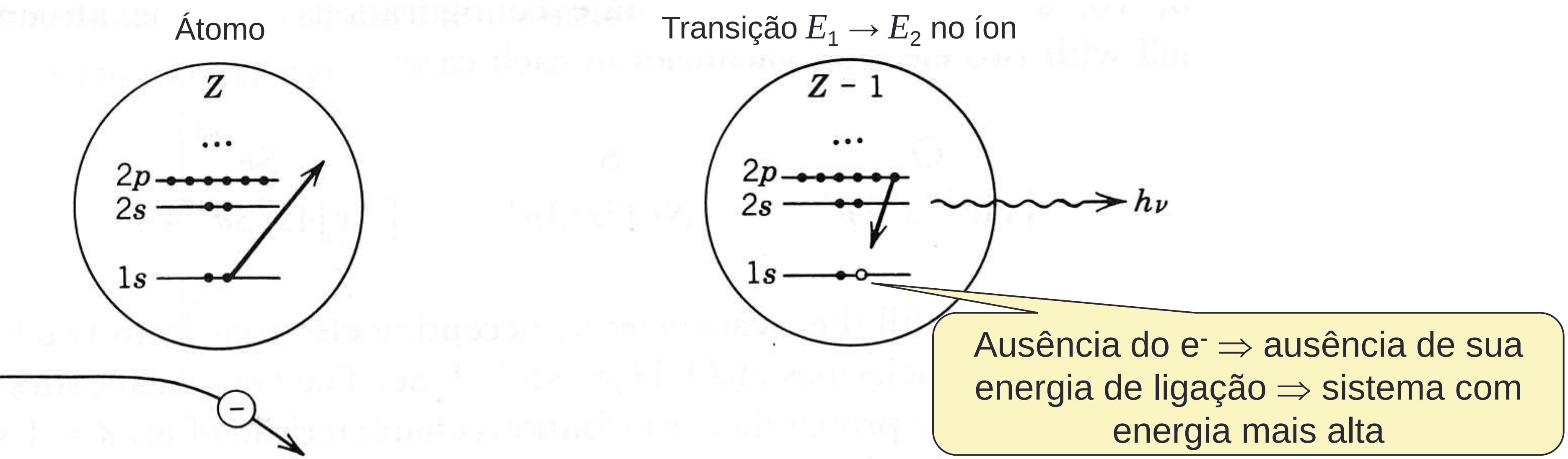
Na suposição de Bohr o núcleo estava imóvel (significa que sua massa era considerada infinita)

Transições óticas



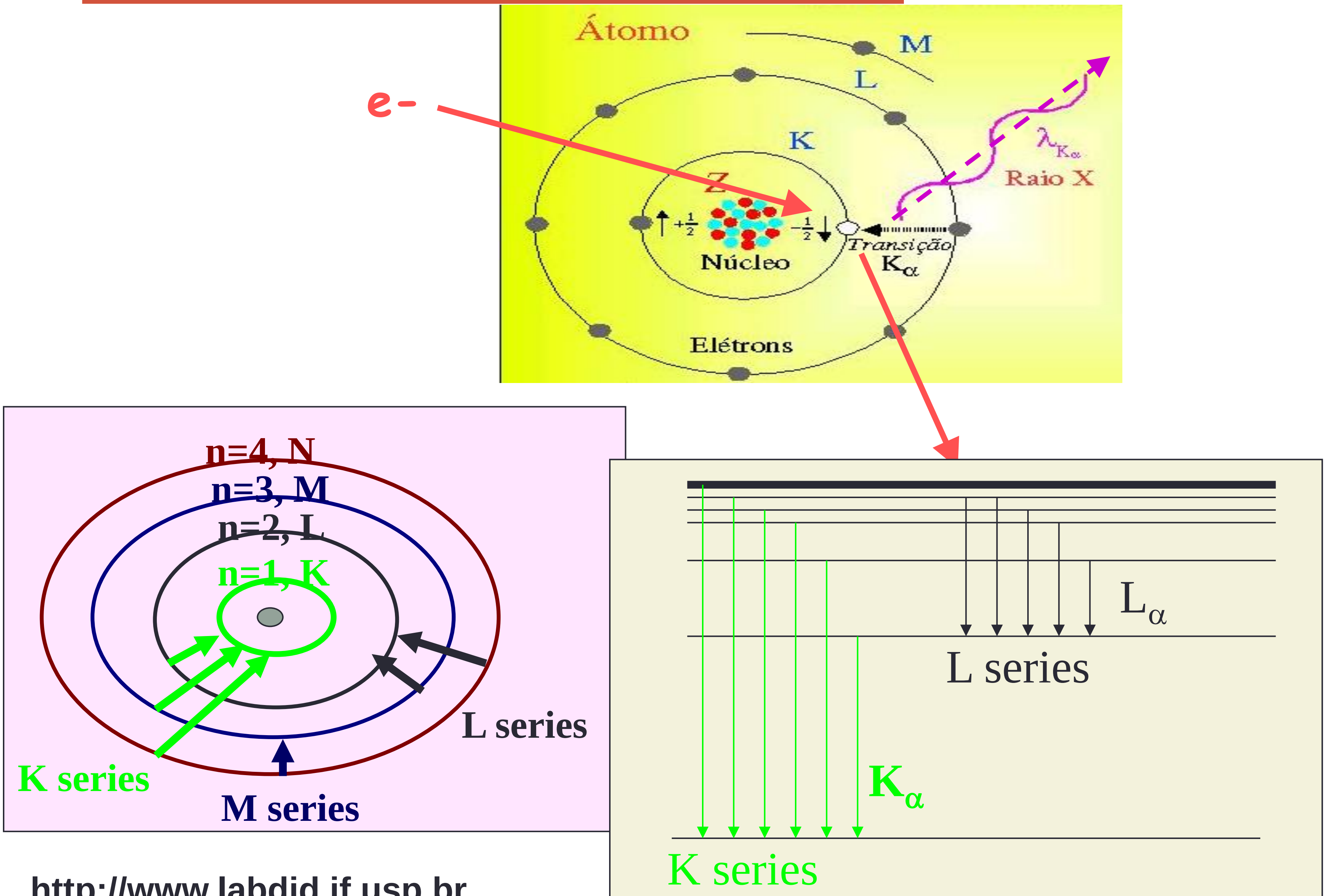
http://www.labdid.if.usp.br

Emissão de Raio-X

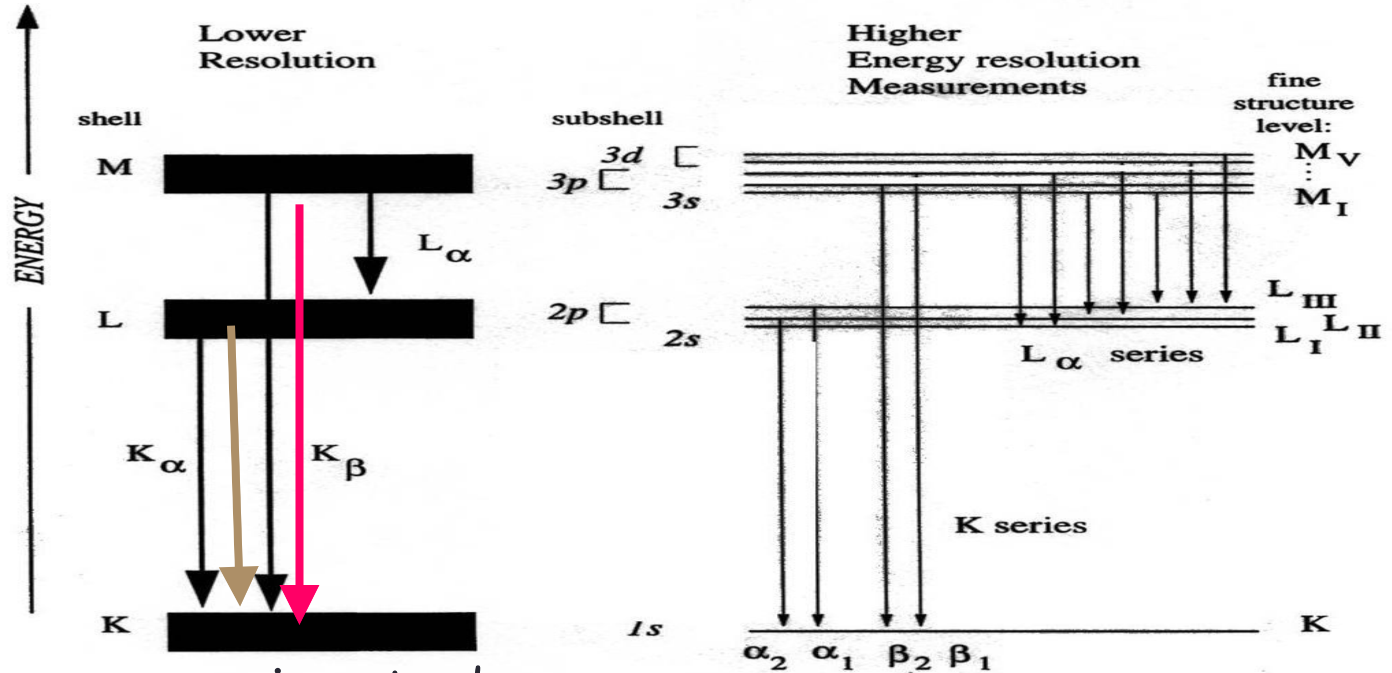


Como resultado temos a excitação de um estado iônico com energia E_1. Isso pode ser representado pela criação de uma vacância (ou buraco) em uma das camadas internas completas. Atenção: nesse caso, estamos assumindo que o e^- tenha sido expulso do átomo, mas ele poderia ir para um estado ligado desocupado, acima da última camada. O que não pode acontecer é dele ir para um estado já ocupado por outro e^- (Pauli).
A desexcitação radioativa do sistema se dá quando um e^- de uma camada de energia mais elevada ocupa o buraco e emite um fóton de energia $h\nu = E_1 - E_2$, onde E_2 é a energia do estado final.

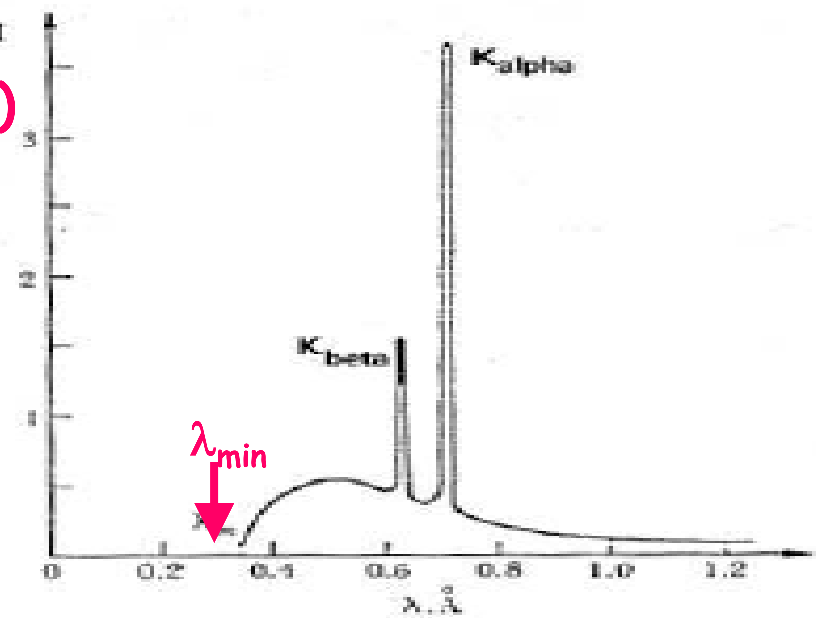
Ionização e De-excitação



http://www.labdid.if.usp.br



- O fóton de menor comprimento de onda, λ_{min}, seria emitido quando o elétron perdesse o máximo **(toda)** de sua energia cinética durante a colisão (K´=0).

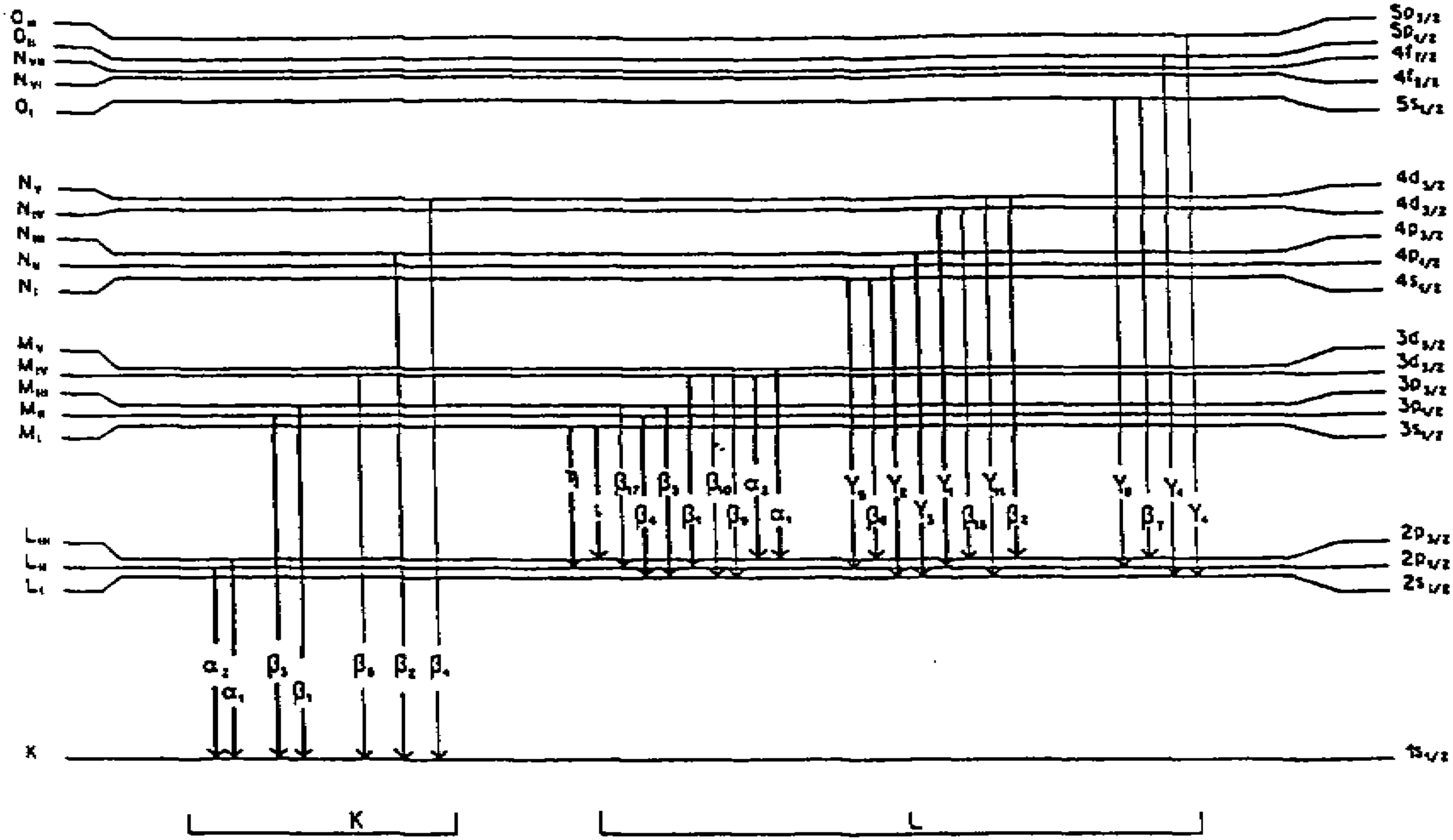


energia inicial do eletron

$$K = eV = hc/\lambda_{min}$$

http://www.labdid.if.usp.br

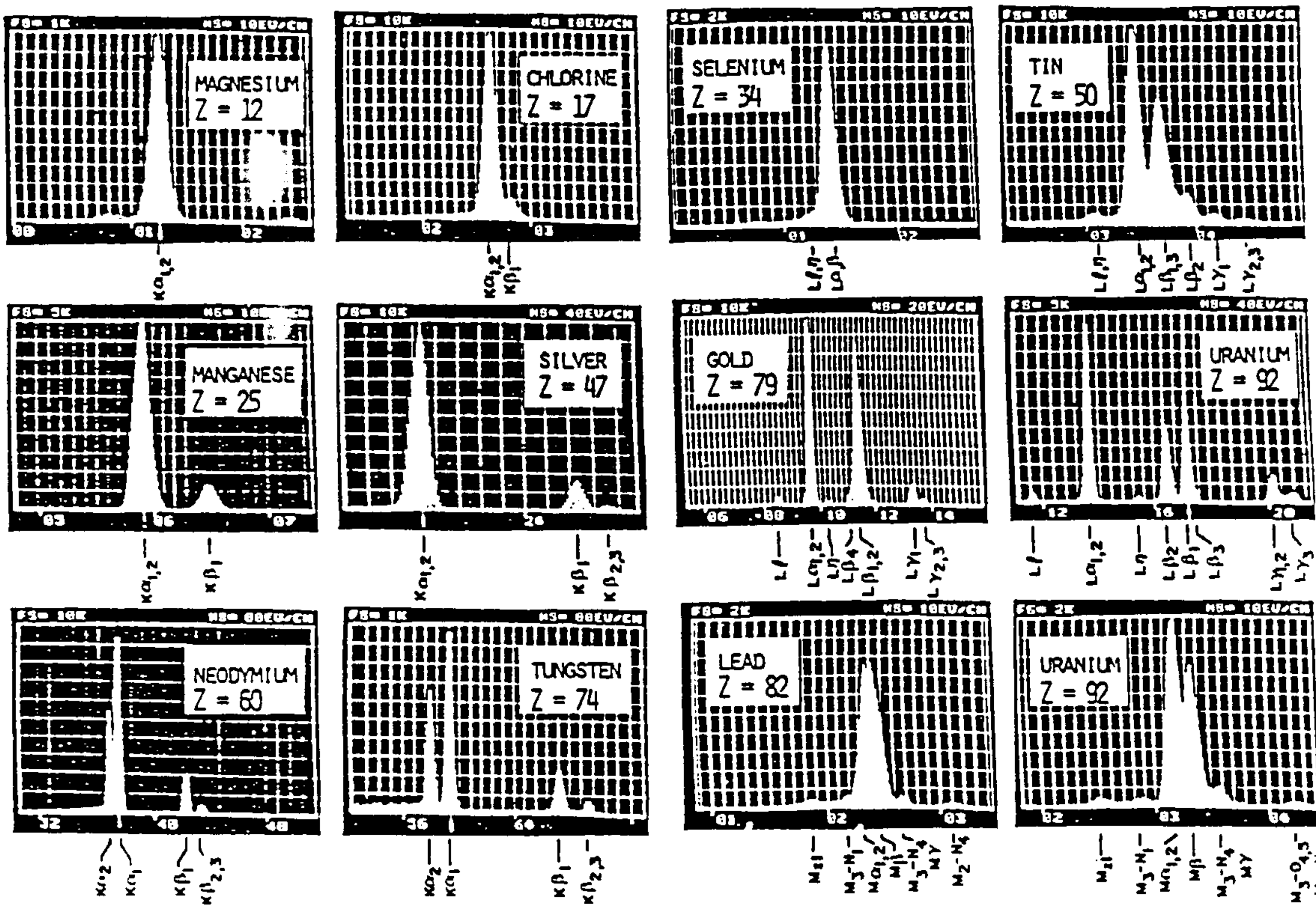
Principais transições de dipolo para raios-X



K_α - transições de L→K
K_β - transições de M →K

L_α - transições de M→ L
L_β - transições de N→ L

Principais linhas de raios-X



Cálculo das energias das transições

A energia dos fótons envolvidos nestas transições de espectros característicos de raio-X pode ser calculado:

Linha K_α (um e^- da camada L (n=2) preenche o buraco da camada K (n=1)). O elétron na camada L é parcialmente escondido do núcleo pelos outros elétrons da camada K, assim vê a carga nuclear como Z-1 (carga efetiva)

$$n=2 \longrightarrow n=1$$

$$E[K_\alpha] = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{(Z-1)^2}{2^2} + \frac{ke^2}{2a_0}\frac{(Z-1)^2}{1^2} = \frac{ke^2}{2a_0}\frac{3(Z-1)^2}{4}$$

Para o Mo (Z=42) $E[K_\alpha] = 17.146(keV)$ $\lambda[K_\alpha] = \frac{hc}{E[K_\alpha]} = \frac{12.4keV.\dot{A}}{17.146(keV)} = 0.723\dot{A}$

As energias dos raios-X (λ) das linhas variam de elemento para elemento, pois a energias envolvidas dependem das energias de ligações dos e- nas camadas internas (que aumentam uniformemente como aumento de Z). Uma série de medidas experimentais realizadas em 1913 e 1914 por H.G. J. **Moseley** das transições K_α de diferentes elementos confirmaram a validade da equação acima

Moseley, 1913

Gráfico de Moseley (raiz quadrada do inverso do comprimento de onda em função do Z)