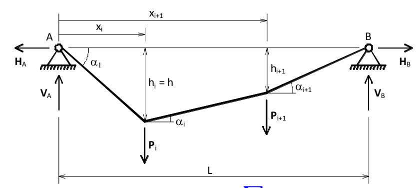
PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I – Sistemas Reticulados

# Arcos e Cabos – II

(Aula 4 - 12/09/2016)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

## Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:




Equilíbrio vertical : $V_A + V_B - \sum_i P_i = 0$

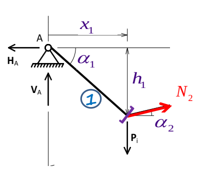
Equilíbrio horizontal: $H_B - H_A = 0$ $\boxed{H_A = H_B = H}$ (Empuxo)

Equilíbrio de Momentos em torno de A: $V_B L - \sum P_i\, x_i = 0$ $\boxed{V_B = \frac{1}{L}\sum P_i\, x_i}$

Equilíbrio de Momentos em torno de B: $-V_A L + \sum P_i\,(L - x_i) = 0$ $\boxed{V_A = \frac{1}{L}\sum P_i\,(L - x_i)}$



## Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:




Fixando o valor de $h_1$ (ou de outro $h_i$ qualquer, determinamos o valor do empuxo:

$$\sum_i M_{(S1)} = Hh_1 - V_A x_1 = 0$$

$$\boxed{H = \frac{V_A x_1}{h_1}}$$

Decorre o esforço $N_1$: $N_1 = \sqrt{H^2 + V_A^2}$

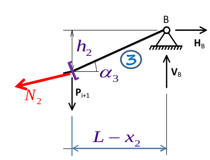
Ou, de outro modo: $N_1 \cos\alpha_1 = H$ $N_1 = \dfrac{H}{\cos\alpha_1}$

Sendo que: $\cos\alpha_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\ell_i} = \dfrac{\Delta x_i}{\ell_i} = \dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}$



## Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:

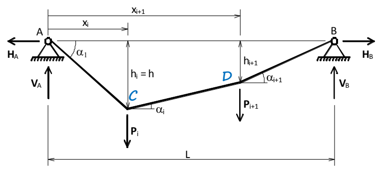
Determinado o empuxo H, as demais alturas $h_i$ são decorrência, bem como as forças normais $N_i$:




$$\sum_i M_{(S2)} = V_B\,(L - x_2) - Hh_2 = 0$$

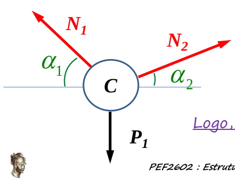
$$\boxed{h_2 = \frac{V_B\,(L - x_2)}{H}}$$

## Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:




Equilíbrio do Nó C: $\sum F_X = N_2 \cos\alpha_2 - N_1 \cos\alpha_1 = 0$

$$N_2 \cos\alpha_2 = N_1 \cos\alpha_1 = H$$



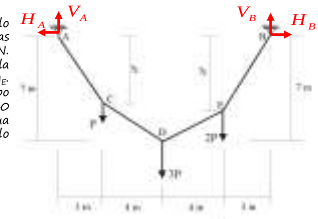

Em geral, para cargas verticais:

$$N_i \cos\alpha_i = H = \text{constante!}$$

Logo, para as forças normais: $\boxed{N_i = \dfrac{H}{\cos\alpha_i}}$



Exemplo: O cabo da figura ao lado encontra-se sujeita à ação de cargas verticais, múltiplas de P=275kN. Determine as forças normais em cada trecho do cabo e as alturas $y_C$ e $y_E$. Considerando que o material do cabo possui tensão de ruptura $\sigma_R$ = 40 kN/cm², determine o diâmetro de sua seção transversal (uniforme), utilizando um coeficiente de segurança s=2.




Equilíbrio horizontal:

$$\sum_i F_X^i = H_B - H_A = 0$$

$$\boxed{H_A = H_B = H}$$

Equilíbrio vertical : $V_A + V_B - P - 3P - 2P = 0$

$$V_A + V_B = 6P = 6 \times 275 = 1650kN$$

Equilíbrio de Momentos em torno de A: $V_B \times 14 - P \times 3 - 3P \times 7 - 2P \times 11 = 0$

$$\boxed{V_B = \frac{275}{14}(3 + 3 \times 7 + 2 \times 11) = 903{,}57kN}$$

$$\boxed{V_A = 1650 - 903{,}57 = 746{,}43kN}$$



Equilíbrio de momentos do trecho ACD em relação ao ponto D

$$\sum_i M_{(D)} = H \times y_D - V_A \times 7 + P \times 4 = 0$$

$$H = \frac{1}{7}(746{,}43 \times 7 - 275 \times 4) = 589{,}29kN$$

Equilíbrio de momentos do trecho AC em relação ao ponto C

$$\sum M_{(C)} = H \times y_C - V_A \times 7 = 0 \qquad y_C = \frac{746{,}43 \times 3}{589{,}29} = 3{,}8m$$

Equilíbrio de momentos do trecho BE em relação ao ponto E

$$\sum M_{(E)} = -H \times y_E + V_B \times 3 = 0 \qquad y_E = \frac{903{,}57 \times 3}{589{,}29} = 4{,}6m$$



Forças normais: $\boxed{N_i = \dfrac{H}{\cos\alpha_i}}$ $\cos\alpha_i = \dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}$

| Trecho | Δx [m] | Δy [m] | ΔL [m] | cosα | N [kN] |
|---|---|---|---|---|---|
| AC | 3 | 3,8 | 4,84 | 0,6196 | 951,1 |
| CD | 4 | 3,2 | 5,12 | 0,7809 | 754,6 |
| DE | 4 | 2,4 | 4,66 | 0,8575 | 687,2 |
| EB | 3 | 4,6 | 5,49 | 0,5463 | 1078,7 |

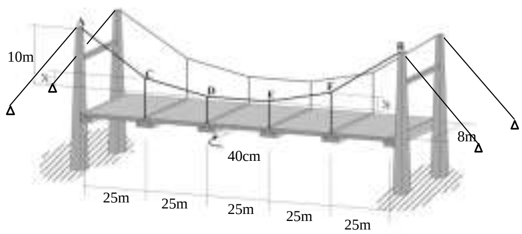
Dimensionamento: $\boxed{N_{\max} = N_{EB} = 1078{,}7kN}$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{N_{\max}}{\left(\dfrac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \frac{\sigma_R}{s}$$

$$\sigma_R = 40\frac{kN}{cm^2} \times \left(10^3 \frac{N}{kN}\right) \times \left(10^4 \frac{cm^2}{m^2}\right) = 400 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$$

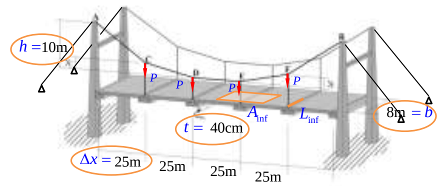
$$\boxed{\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{\max}}{\pi\sigma_R}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 1078{,}7 \times 10^3}{\pi \times 400 \times 10^6}} = 0{,}083m = 8{,}3cm}$$

<u>Exercício</u>: A ponte suspensa da figura abaixo encontra-se sujeita à ação simultânea do peso próprio dos tabuleiros (peso específico: $\gamma_T$ = 25 kN/m³; espessura = 40 cm), de uma sobrecarga de 4 kN/m² e do peso próprio das vigas de suporte (40 kN/m). O material dos cabos possui tensão de ruptura $\sigma_R$ = 120 kN/cm². Determine as e alturas $y_C$ e $y_F$ e as forças normais de cada trecho do cabo ACDEFB. Utilizando um coeficiente de segurança s=3, determine o diâmetro da sua seção transversal uniforme. Desconsidere o peso dos cabos e dos tirantes.






<u>Resolução:</u>




Largura da ponte: $b = 8m$ Espessura do tabuleiro $t = 0.4m$

Área de influência de cada tirante: $A_{\inf} = \Delta x \times \frac{b}{2} = 100\ m^2$

Largura de influência de cada tirante: $L_{\inf} = \frac{b}{2} = 4\ m$

Carga de peso próprio do tabuleiro: $w_{pp} = \gamma_T \times t = 25\frac{kN}{m^3} \times 0.4\ m = 10\frac{kN}{m^2}$

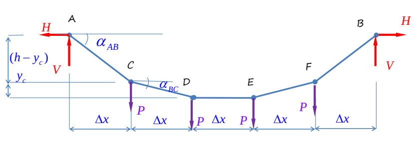
Sobrecarga: $w_{ad} = 4\frac{kN}{m^2}$ Peso das vigas: $q_v L_{\inf} = 40kN/m$

Carga sobre cada tirante:

$$P = \left(w_{pp} + w_{ad}\right) A_{\inf} + q_{vigas} L_{\inf} = (10+4) \times 100 + 4 \times 40 = 1560kN$$

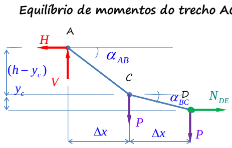


<u>Resolução:</u>




Equilíbrio do cabo ACDEFB: $V_A = V_B = V = 2P = 3120\ kN$

Equilíbrio de momentos do trecho ACD em torno do ponto D:

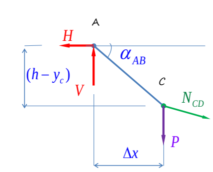



$$H_A \times h - V \times 2 \times \Delta x + P \times \Delta x = 0$$

$$H = \frac{1}{h}\left(V \times 2 \times \Delta x - P \times \Delta x\right) = 11700\ kN$$



Equilíbrio de momentos do trecho AC em torno do ponto C:




$$H_A \times \left(h - y_C\right) - V \times \Delta x = 0$$

$$y_C = h - \frac{V}{H}\Delta x = 3{,}33\ m$$

$$\cos\alpha_{AC} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \left(h - y_c\right)^2}} = 0{,}96623 \quad \therefore \quad N_{AC} = \frac{H}{\cos\alpha_{AC}} = \frac{10620}{0{,}96623} = 12109\ kN$$

$$\cos\alpha_{CD} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \left(y_c\right)^2}} = 0{,}99123 \quad \therefore \quad N_{CD} = \frac{H}{\cos\alpha_{CD}} = \frac{10620}{0{,}99123} = 11804\ kN$$

$$\cos\alpha_{DE} = 1 \quad \therefore \quad N_{DE} = \frac{H}{\cos\alpha_{DE}} = H = 11700\ kN$$

**Dimensionamento do cabo ACDEFB:**

$$N_{max} = N_{AC} = 12109\ kN$$

**Resistência à tração:** $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{A_{cabo}} = \leq \dfrac{\sigma_R}{s} \quad \therefore \quad \dfrac{N_{max}}{\left(\dfrac{\pi\phi^2}{4}\right)} = \leq \dfrac{\sigma_R}{s}$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{max}}{\pi\sigma_R}}$$

$$\sigma_R = 120\frac{kN}{cm^2} = 1200\ MPa$$

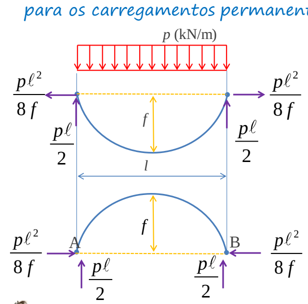
$$\phi \geq \sqrt{\frac{4\times3\times12109\times10^3}{\pi\times1200\times10^6}} = 0{,}19633\ m$$

**Diâmetro do cabo:** $\boxed{\phi \cong 20cm}$



<u>ARCOS</u>: estruturas planas lineares, sujeitas predominantemente à esforços de <u>compressão</u>.

Forma do arco: preferencialmente funicular (livre de flexão) para os carregamentos permanentes.




❖ Para ser estável à compressão, o arco deve ter rigidez à flexão, mesmo no caso de não ser solicitado deste modo.

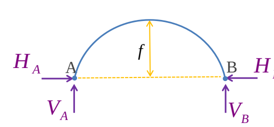


Viaducto del Ulla, 2011. 630 metros de comprimento, altura máxima 117m, vão principal 168m.



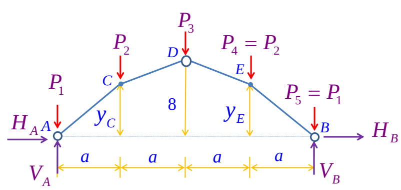
❖ A rigidez à flexão torna o arco bi-articulado: 1x hiperestático

❖ Como vamos estudar, arcos funiculares para um dado carregamento, podem introduzir articulações internas!

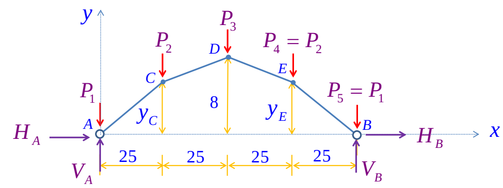


**Etapas:**

1. Definir a forma e esforços no arco para os carregamentos permanentes (p)
2. Inserir uma articulação interna
3. Determinar solicitações para carga acidental (q)
4. Adicionar as solicitações (p + q)





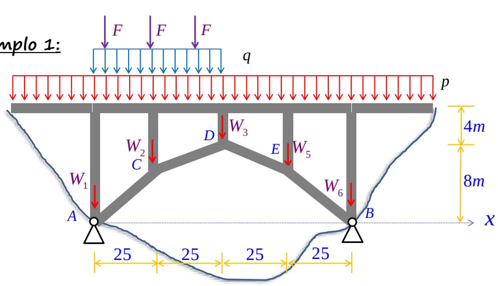

**Simetria dos carregamentos permanentes:**

$H_A = H_B$ $\qquad V_A = V_B$ $\qquad y_C = y_E$

É necessário definir apenas uma variável geométrica!



**Exemplo 1:**




*Cargas permanentes:*

$p = 100kN/m$

$W_1 = W_5 = 100kN$

$W_2 = W_4 = 100kN$

$W_3 = 40kN$

*Cargas móveis:*

$q = 20kN/m$

$F = 100kN$

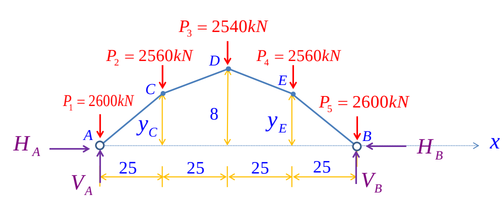


*Definição das cargas permanentes nos nós do arco:* $P_i = p.l_i + W_i$

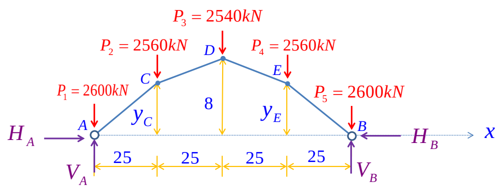
$P_1 = P_5 = 100 \times 25 + 100 = 2600kN$

$P_2 = P_4 = 100 \times 25 + 60 = 2560kN$

$P_3 = 100 \times 25 + 40 = 2540kN$



Equilíbrio:



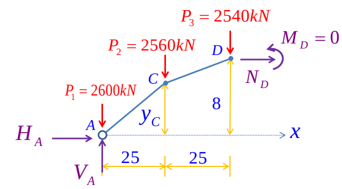

$$\sum F_X = 0 \qquad H_A = H_B = 0 \qquad \therefore \qquad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0 \quad V_A + V_B - 2\times 2600 \ - 2\times 2560 - 2540 = 0$$

$$\boxed{V_A = V_B = 6430kN}$$ SIMETRIA!!



Empuxo: Supondo o cabo funicular às cargas permanentes




Equilíbrio do trecho AD, à esquerda:

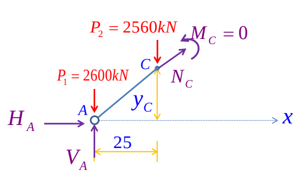
$$\sum M_{(D)} = H_A \times 8 - (V_A - 2600)\times 50 + 2560\times 25 + \cancel{M_D} = 0$$

$$H_A = \frac{1}{8}\left[(6430 - 2600)50 - 2560\times 25\right]$$

$$\boxed{H_A = 15.937,5kN = H_B}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Determinação da ordenada $y_C$




Para cargas permanentes:

$$\sum M_{(C)} = 0$$

Equilíbrio do trecho AC, à esquerda:

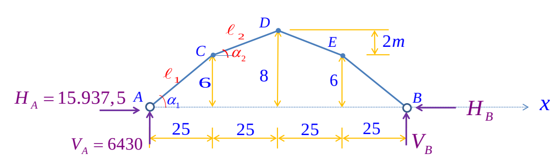
$$\sum M_{(C)} = \cancel{M_C} + 15.937,5\times y_C - (6430 - 2600)\times 25 = 0$$

$$y_C = \frac{(6430 - 2600)25}{15.937,5}$$

$$\boxed{y_C = 6,01m = y_E}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

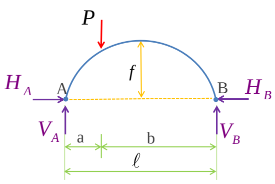
Determinação na força normal nos segmentos do arco




| $i$ | $\Delta x_i$ (m) | $\Delta y_i$ (m) | $L_i$ (m) | Cos $\alpha_i$ | Ni=H/cos$\alpha_i$ (kN) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 6 | 25,71 | 0,972 | 16.396,6 |
| 2 | 25 | 2 | 25,08 | 0,997 | 15.985,4 |

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

Para carregamentos acidentais, para os quais o arco não é funicular, este fica sujeito à flexão.




$\sum F_X = 0$ ?

$H_A - H_B = 0 \quad \therefore \quad H_A = H_B$

$\sum F_Y = 0$

$V_A + V_B - P = 0$

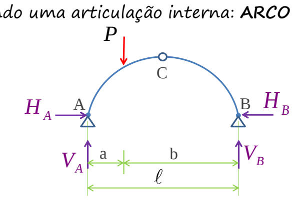
$\sum M_{(A)} = 0 \qquad V_B \times \ell - P \times a = 0 \qquad V_B = \dfrac{P \times a}{\ell}$

Estrutura 1 x HIPERESTÁTICA $\qquad V_A = \dfrac{P \times b}{\ell}$

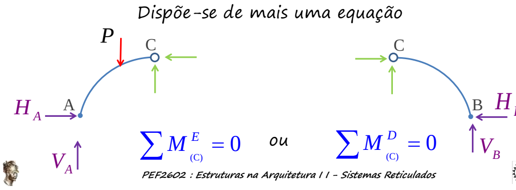


Introduzindo uma articulação interna: **ARCO TRIARTICULADO**

**ISOSTÁTICO**



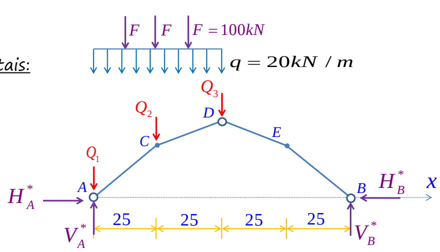

Dispõe-se de mais uma equação




$\sum M^{E}_{(C)} = 0$ ou $\sum M^{D}_{(C)} = 0$



Cargas acidentais:



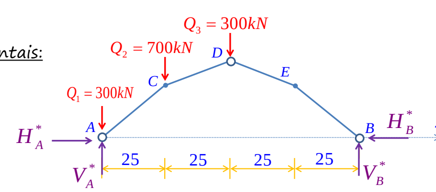

$$Q_1 = \frac{20 \times 25}{2} + \frac{100}{2} = 300kN$$

$$Q_2 = 20 \times 25 + 2 \times \frac{100}{2} + 100 = 700kN$$

$$Q_3 = 300kN$$



Cargas acidentais:




$\sum F_X = H_A^* - H_B^* = 0 \quad \therefore \quad H_A^* = H_B^*$

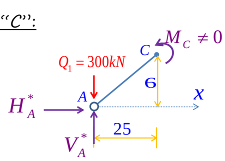
$\sum F_Y = V_A^* + V_B^* - Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad \therefore \quad V_A^* + V_B^* = 1300kN$

$\sum M_{(A)} = 100 \times V_B^* - 25 \times Q_2 - 50 \times Q_3 = 0 \quad \therefore \quad V_B^* = \dfrac{25 \times 700 + 50 \times 300}{100}$

$\boxed{V_B^* = 325kN \quad \therefore \quad V_A^* = 975kN}$

$\sum M^{D}_{(D)} = 50 \times V_B^* - 8 \times H_B^* = 0 \quad \therefore \quad H_B^* = \dfrac{25 \times 325}{8} \qquad \boxed{H_B^* = H_A^* = 2031,25kN}$

Cortando em "C":




$$\sum M^{E}_{(C)} = M_C + (Q_1 - V_A^*) \times 25 - 6 \times H_A^* = 0$$

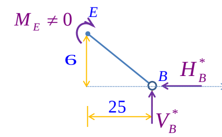
$$M_C = (Q_1 - V_A^*) \times 25 - 6 \times H_A^*$$

$$M_C = (975 - 300) \times 25 - 6 \times 2031{,}25$$

$$\boxed{M_C = 4.687{,}5 kN \cdot \mathrm{m}}$$



Cortando em "E":




$$\sum M^{D}_{(E)} = -M_E + V_B^* \times 25 - 6 \times H_B^* = 0$$

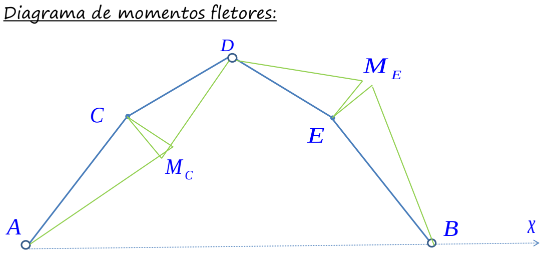
$$M_E = V_B^* \times 25 - 6 \times H_B^*$$

$$M_E = 325 \times 25 - 6 \times 2031{,}25$$

$$\boxed{M_E = -4.062{,}5 kN \cdot \mathrm{m}}$$



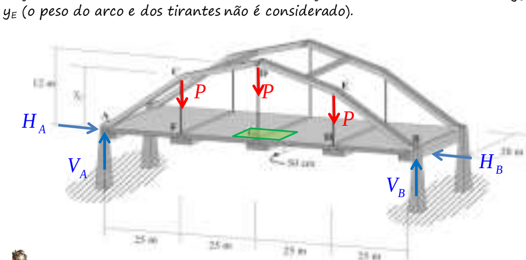
Diagrama de momentos fletores:




- Analogamente, podem ser traçados os diagramas de N e Q.
- As solicitações para o carregamento total (permanente + acidental) são obtidos por superposição.



**Exemplo 2:** A ponte suspensa da figura abaixo encontra-se sujeita à ação simultânea do peso próprio do tabuleiro ($\gamma_T = 25kN/m^3$; espessura = 50 cm), de uma sobrecarga de 5kN/m² e do peso próprio das vigas de suporte (10kN/m). O arco de sustentação é formado pelas barras AC, CD, DE e EB, cujo material possui tensão de ruptura à compressão $\sigma_{R,compr} = 4kN/\mathrm{cm}^2$ . Por sua vez, os tirantes possuem material com tensão de ruptura $\sigma_{R,\text{tração}} = 40kN/\mathrm{cm}^2$. Utilizando um coeficiente de segurança s=2, determine as forças normais das barras que formam o arco, as forças normais dos tirantes, a dimensão das seções transversais e as alturas $y_C$ e $y_E$ (o peso do arco e dos tirantes não é considerado).



Determinação das cargas equivalentes:

$$P = (\gamma_T \times \text{vol}_{\text{influência Tab}}) + (\text{Sob} \times \text{A}_{\text{influência}}) + \text{Reação da viga}$$

$$P = (25 \times 25 \times 10 \times 0,5) + (5 \times 25 \times 10) + (10 \times 10) = 4475kN$$

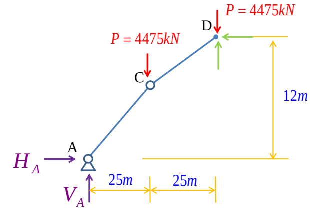
Reações de apoio:

$$\sum F_X = 0 \qquad H_A = H_B = 0 \qquad \therefore \quad H_A = H_B$$

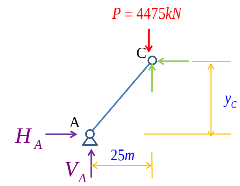
$$\sum F_Y = 0 \qquad V_A + V_B - 3 \times P = 0 \qquad V_A = V_B = \frac{3 \times P}{2} = 6712,5kN$$



Cortando em "D":




Cortando em "C":




$$\sum M^E_{(C)} = V_A \times 25 - H_A \times y_C = 0$$

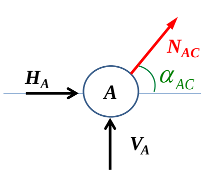
$$\boxed{y_C = \frac{V_A \times 25}{H_A} = 9m}$$

$$\sum M^E_{(D)} = V_A \times 50 - H_A \times 12 - P \times 25 = 0$$

$$\boxed{H_A = \frac{P \times 25 - V_A \times 50}{12} = 18.645,83kN}$$



Equilíbrio do Nó A:



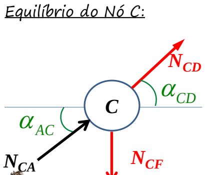

$$\cos\alpha_{AC} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 9^2}} = 0,9409$$

$$\boxed{N_{AC} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{AC}} = -19.816,8kN}$$

$$\cos\alpha_{CD} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + (12-9)^2}} = 0,993$$

$$\boxed{N_{CD} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{CD}} = -18.777,27kN}$$

Equilíbrio do Nó C:



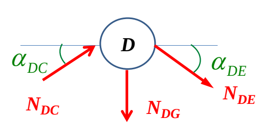

$$\sum F_Y = 0 \; N_{CF} + N_{CD} \times sen\alpha_{CD} - N_{CA} \times sen\alpha_{CA} = 0$$

$$N_{CF} = -18.777,27 \times \frac{3}{\sqrt{25^2 + 3^2}} + 19.816,8 \times \frac{9}{\sqrt{25^2 + 9^2}}$$

$$\boxed{N_{CF} = 4475kN}$$



Equilíbrio do Nó D:




$$\sum F_Y = 0$$

$$-N_{DG} - N_{DC} \times sen\alpha_{DC} - N_{DE} \times sen\alpha_{DE} = 0$$

$$N_{DG} = -2 \times \left( -18.777,27 \times \frac{3}{\sqrt{25^2 + 3^2}} \right)$$

$$\boxed{N_{DG} = 4475kN}$$

Dimensionamento do arco ACDEB e dos tirantes:

Arco – barras comprimidas:

$$\sigma = \frac{N}{A_{nec}} \leq \frac{\sigma_{R,compressão}}{s}$$

$$\frac{19.816,8}{A_{AC}} \leq \frac{4}{2} \qquad \frac{18.777,27}{A_{CD}} \leq \frac{4}{2}$$

$$\boxed{A_{AC} \geq 9908,4cm^2} \qquad \boxed{A_{CD} \geq 9388,63cm^2}$$

Tirantes – barras tracionadas:

$$\sigma = \frac{N}{A_{nec}} \leq \frac{\sigma_{R,tração}}{s}$$

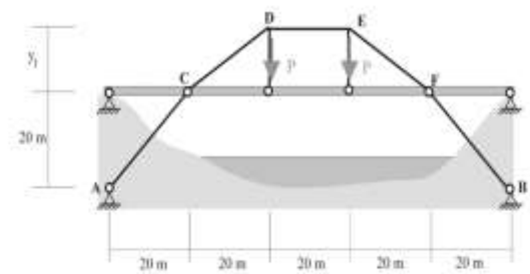
$$\frac{4475}{A} \leq \frac{40}{2}$$

$$\boxed{A \geq 223,75cm^2}$$



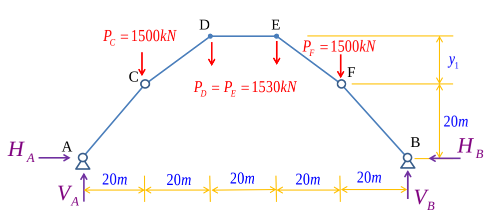
**Exemplo 3:** O arco da figura encontra-se sujeito à ação do peso próprio q do tabuleiro e de cargas verticais P aplicadas nos pontos D e E. Determine as reações de apoio, as forças normais de cada barra do arco e a altura $y_1$.

P=30kN e q=75kN/m






Determinação das cargas equivalentes:

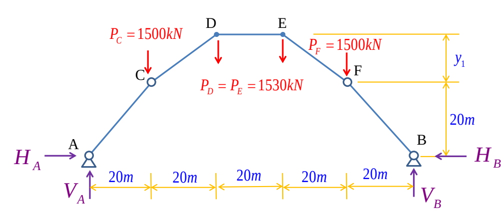



$$P_C = P_F = 75 \times 20 = 1500kN$$

$$P_D = P_E = 1500 + 30 = 1530kN$$



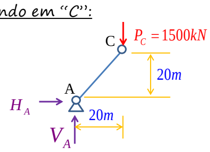
Determinação reações de apoio:




$$\sum F_x = 0 \qquad H_A - H_B = 0 \qquad \therefore \quad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad V_A + V_B - 2\times1500 - 2\times1530 = 0 \qquad \boxed{V_A = V_B = 3030kN}$$

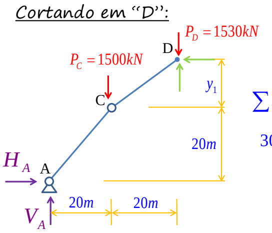
Cortando em "C":




$$\sum M^{E}_{(C)} = V_A \times 20 - H_A \times 20 = 0$$

$$\boxed{H_A = V_A = 3030kN = H_B}$$

Cortando em "D":



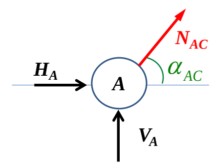

$$\sum M^{E}_{(D)} = V_A \times 40 - H_A \times (20 + y_1) - 1500 \times 20 = 0$$

$$3030 \times 40 - 3030 \times (20 + y_1) - 1500 \times 20 = 0$$

$$\boxed{y_1 = \frac{30600}{3030} = 10,099m}$$



Equilíbrio do Nó A:




$$\cos\alpha_{AC} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 20^2}} = 0,707$$

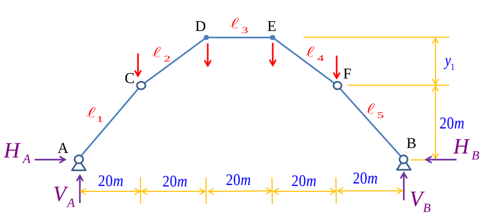
$$N_{AC} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{AC}} = -4285,71kN$$

Em geral, para cargas verticais:

$$N_i \cos\alpha_i = H = \text{constante!}$$

Logo, paras as forças normais: $\boxed{N_i = \frac{H}{\cos\alpha_i}}$






| i | $\Delta x_i$ (m) | $\Delta y_i$ (m) | $L_i$ (m) | Cos $\alpha_i$ | Ni=-H/cos$\alpha_i$ (kN) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1=5 | 20,0 | 20,00 | 28,28 | 0,707 | -4.285,7 |
| 2=4 | 20,0 | 10,09 | 22,40 | 0,893 | -3.393,1 |
| 3 | 20,0 | 0,00 | 20,00 | 1,000 | -3.030,0 |