Interpretações da Mecânica Quântica

Paper: "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"
- Einstein, Podolsky e Rosen (EPR)

- O que significa "completa"?

A. Todo elemento da realidade física deve ter um correspondente na teoria física.

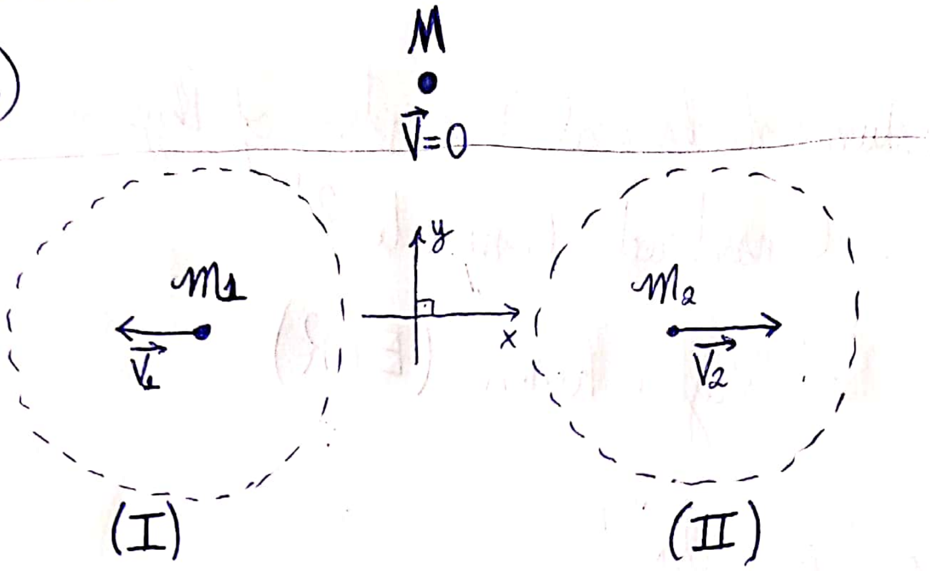
B. Se, sem perturbar o sistema, pudermos prever com certeza (ou seja, probabilidade = 1) o valor de uma quantidade físico, então existe um elemento da realidade física correspondente a essa quantidade física.

- Gedanken (experimento mental): inventar uma situação em que consiga prever o autovalor de um sistema sem perturbado.

Exemplo Clássico:

Início)

Fim)



Para simplificar, vamos considerar $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$

Observo (realizo uma medida) o <u>sistema I</u> e verifico que: $\vec{V}_1 = -V\hat{x}$

Isso determina que o <u>sistema II</u> terá $\vec{V}_2 = V\hat{x} = -\vec{V}_1$ sem que tenha sido feito uma medida sobre ele.

Exemplo Quântico:

Singleto de Spin de duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ geradas pelo decaimento de uma partícula de $J=0$.

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right]$$ Esfericamente Simétrico

Medir o spin da partícula 1 resulta em $S_1 = \pm\frac{1}{2}$ em alguma dir. $\vec{n}$.

Implica conhecer o spin da partícula 2 $S_2 = \mp\frac{1}{2} = -S_1$ na mesma dir. $\vec{n}$.

<u>Correlação perfeita $= -1$.</u>

- Determinar a propriedade de um sistema não necessariamente perturba o sistema.

- Correlações entre sistemas distantes são comuns em física clássica e não contradizem o princípio da causalidade

Princípio da Causalidade

Um objeto não sofre influência de eventos space-like em relação à ele.

Voltemos ao argumento EPR:

A um observável do sistema I com autovalores a_α e um conjunto completo de autofunções $u_\alpha(x_1)$

Estado genérico do sistema I-II:

$$\Psi(x_1; x_2) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x_2)\, u_\alpha(x_1)$$

$[A;B] \neq 0$

Seja B outro observável do sistema I com autovalores b_β e um conjunto completo de autofunções $v_\beta(x_1)$.

$$\Psi(x_1; x_2) = \sum_\beta \varphi_\beta(x_2)\, v_\beta(x_1)$$

No caso do singleto A e B podem ser $\vec{\sigma_1} \cdot \vec{n_A}$ e $\vec{\sigma_1} \cdot \vec{n_B}$, onde $\vec{n_A} \neq \vec{n_B}$ e $\vec{n_A} \neq -\vec{n_B}$.

Medindo A no sistema I e encontrando u_ν saberemos que o sistema II estará em ψ_ν.

Medindo B no sistema I, saberemos que o sistema II estará em φ_λ.
e encontrando v_λ

Agora suponha que os $\psi_\alpha(x_2)$ são autofunções de P com autovalores p_α e $\varphi_\beta(x_2)$ são autofunções de Q com autovalores q_β e que $[P;Q] \neq 0$

No caso do singleto P e Q podem ser $\vec{\sigma_2} \cdot n_A$ e $\vec{\sigma_2} \cdot \vec{n_B}$

Enquanto os sistemas I e II tiverem separação space-like não haverá interação entre eles, logo.

C. Medindo A ou B poderemos prever com certeza, e sem perturbar o sistema II, o valor de P ou de Q. De acordo com nosso critério de realidade, no primeiro caso temos que considerar P como uma quantidade real, já no segundo caso temos que Q será uma quantidade real.

Mas P e Q não comutam $[P;Q] \neq 0$.

↳ Não podem ser determinados simultaneamente

↳ Medir Q implica destruir a informação sobre P.

D. Quando dois operadores correspondentes a duas quantidades físicas não comutam, as duas quantidades físicas não podem simultaneamente terem realidade física.

$\Leftarrow\!\!\!\!/$

D. contradiz C.

Como o Gedanken satisfaz B. temos que A. não pode ser verdadeira, logo a descrição da mecânica quântica da realidade física dada por função de onda não é completa.

Crítica: argumento contrafactual

↳ Não se mede A e B ao mesmo tempo

↳ Não gera paradoxo nenhum.

- Estados emaranhados parecem que geram intervenções não-locais

↳ Exemplo: singleto com partículas com separação space-like

↳ Correlação e não "colapso da função de onda".

EPR levanta a pergunta: Existe uma descrição da natureza mais refinada que a quântica, que explique a interação fantasmagórica a distância? "spooky action at distance"

EPR não sugere como a quântica pode ser elaborada numa teoria local realista.

Variáveis Ocultas (Hidden Variables)

Em $\mathcal{H}_2$ existe uma teoria de variáveis ocultas.

Dado um operador hermitiano $A = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$, $a_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

Autovalores $v(A) = a_0 \pm a$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_z & a_x - i a_y \\ a_x + i a_y & a_0 - a_z \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_0 + a_z - \lambda & a_x - i a_y \\ a_x + i a_y & a_0 - a_z - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (a_0 - \lambda)^2 - a_z^2 - (a_x^2 + a_y^2) = 0$$

$$(a_0 - \lambda)^2 = a^2$$

$$\lambda - a_0 = \pm a \Rightarrow \lambda = a_0 \pm a$$

Tomemos o estado $|+\rangle$ de <u>spin-up</u> na direção $\vec{n}$.

$\therefore \; (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})|+\rangle = |+\rangle$

Analisemos o operador $(2|+\rangle\langle+| - I)$:

$$(2|+\rangle\langle+| - I)|+\rangle = 2|+\rangle\underbrace{\langle+|+\rangle}_{1} - |+\rangle = |+\rangle = (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})|+\rangle$$

$$(2|+\rangle\langle+| - I)|-\rangle = 2|+\rangle\underbrace{\langle+|-\rangle}_{0} - |-\rangle = -|-\rangle = (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})|-\rangle$$

como $(|+\rangle; |-\rangle)$ é uma base em $\mathcal{H}_2$, temos que

$$2|+\rangle\langle+| - I = \vec{n}\cdot\vec{\sigma} \Rightarrow |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}(I + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$

$\therefore \; \rho = \frac{1}{2}(I + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ <u>matriz densidade</u>

Calculemos o valor esperado.

$$\langle A\rangle_{\vec{n}} = Tr\,\rho(\vec{n})A = Tr\left(\frac{1}{2}\left[A + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})A\right]\right) = Tr\left(\frac{1}{2}\left[a_0 I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} + a_0\vec{n}\cdot\vec{\sigma} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\right]\right)$$

$$= \underbrace{Tr\left(\frac{1}{2}a_0 I\right)}_{a_0} + \underbrace{Tr\left(\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)}_{0} + \underbrace{Tr\left(\frac{1}{2}a_0\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)}_{0} + Tr\left(\frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\right)$$

$$= a_0 + \frac{1}{2}\left[Tr\left(n_x a_x \underbrace{\sigma_x\sigma_x}_{I}\right) + Tr\left(n_y a_y \underbrace{\sigma_y\sigma_y}_{I}\right) + Tr\left(a_z n_z \underbrace{\sigma_z\sigma_z}_{I}\right) + \sum_{\substack{i,j=x \\ i\neq j}}^{z} Tr\left(n_i a_j \sigma_i\sigma_j\right)\right]$$

Digitalizado com CamScanner

$$\langle A \rangle_{\vec{n}} = \mathrm{Tr}\,\rho(\vec{n})A = a_0 + \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\sum_{i=x}^{z} \underbrace{\mathrm{Tr}(n_i a_i I)}_{2n_i a_i}}_{2\vec{n}\cdot\vec{a}} + \sum_{\substack{i,j=x\\ i\neq j}}^{z} \mathrm{Tr}(n_i a_j \sigma_i \sigma_j)\Bigg]$$

$\underline{i\neq j}$: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \Rightarrow \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) + \mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_i) = 0$$

$$2\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 0$$

$$\therefore \langle A \rangle_{\vec{n}} = \mathrm{Tr}\,\rho(\vec{n})A = a_0 + \vec{n}\cdot\vec{a} = p_+(a_0 + a) + p_-(a_0 - a)$$

$$a_0 + \vec{n}\cdot\vec{a} = a_0 + (\hat{a}\cdot\vec{n})a = (p_+ + p_-)a_0 + (p_+ - p_-)a, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$$

$$\therefore \begin{cases} p_+ + p_- = 1 \\ p_+ - p_- = \hat{a}\cdot\vec{n} \end{cases} \Rightarrow p_+ = \frac{1}{2}(1 + \hat{a}\cdot\vec{n}) \text{ e } p_- = \frac{1}{2}(1 - \hat{a}\cdot\vec{n})$$

$$\therefore p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{a}\cdot\vec{n})$$

Descrição por variáveis ocultas para $\mathcal{H}_2$.

Variável oculta: $\vec{m} \in \mathbb{R}^3$

(i) Seja $v(A;\vec{n};\vec{m})$ a função determina um dos dois autovalores do observável A dado a variável oculta $\vec{m}$ e o estado $\rho(\vec{n})$.

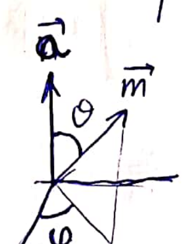
$$v(A;\vec{n};\vec{m}) = \begin{cases} a+a_0, & \vec{m}\cdot\vec{a} < \vec{n}\cdot\vec{a} \\ a-a_0, & \vec{m}\cdot\vec{a} > \vec{n}\cdot\vec{a} \end{cases}$$

(ii) A distribuição de probabilidades que determina a média pelas variáveis ocultas deve reproduzir o valor esperado de A.

<u>Distribuição uniforme</u>

$$\int \frac{d\vec{m}}{4\pi} v(A;\vec{n};\vec{m}) = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{4\pi} v(A;\vec{n};\vec{m})$$

onde os ângulos θ e φ foram tomados em relação a $\vec{a}$



$\therefore \vec{m}\cdot\vec{a} = (\vec{m}\cdot\vec{a})(\theta)$

Independente de φ

$$\therefore \int \frac{d\vec{m}}{4\pi} v(A;\vec{n};\vec{m}) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, v(A;\vec{n};\vec{m}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta \, v(A;\vec{n};\vec{m})$$

$$\int \frac{d\vec{m}}{4\pi} \mathcal{V}(A;\vec{n};\vec{m}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, \mathcal{V}(A;\vec{n};\vec{m}) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{\phi} dx\,(a_0+a) + \int_{\phi}^{1} dx\,(a_0-a)\right], \ \underline{\phi = \hat{a}\cdot\vec{n}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\phi+1)a_0 + (\phi+1)a + (1-\phi)a_0 + (\phi-1)a\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a_0 + 2\phi a\right] = a_0 + \phi a = a_0 + (\hat{a}\cdot\vec{n})a = a_0 + \vec{n}\cdot\vec{a}$$

$$\therefore \int \frac{d\vec{m}}{4\pi} \mathcal{V}(A;\vec{n};\vec{m}) = a_0 + \vec{n}\cdot\vec{a} = \langle A \rangle_{\vec{n}}$$

A Mecânica Quântica não determina o valor de um observável antes de realizar a medida.

Na teoria de variáveis ocultas os valores dos observáveis existem fazendo ou não a medida, sendo que a medida meramente identifica um dos valores pré-existentes.

<u>Teorema de Bell-Kochen-Specker</u>

Não é possível associar consistentemente valores para todos os observáveis em qualquer espaço de Hilbert de dimensão ≥ 3.

A prova para $\mathcal{H}_4$ é fácil. Veremos:

Todos os observáveis em $\mathcal{H}_4$ podem ser representados por dois vetores de spin de Pauli que comutam $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$. $[\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2] = 0$

E considere os seguintes observáveis:

$A_1 = \sigma_{1x}$ $\quad B_1 = \sigma_{2x}$ $\quad C_1 = \sigma_{1x}\sigma_{2x}$

$A_2 = \sigma_{2y}$ $\quad B_2 = \sigma_{1y}$ $\quad C_2 = \sigma_{1y}\sigma_{2y}$

$A_3 = \sigma_{1x}\sigma_{2y}$ $\quad B_3 = \sigma_{1y}\sigma_{2x}$ $\quad C_3 = \sigma_{1z}\sigma_{2z}$

Temos: $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3 = A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2 = A_3B_3C_3 = I$

$C_1C_2C_3 = -I$

$$A_1A_2A_3 = \sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{1x}\sigma_{2y} = \sigma_{2y}\underbrace{\sigma_{1x}\sigma_{1x}}_{I}\sigma_{2y} = \sigma_{2y}\sigma_{2y} = I$$

$$C_1C_2C_3 = \sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{1z}\sigma_{2z} = \underbrace{(\sigma_{1x}\sigma_{1y}\sigma_{1z})}_{iI}\underbrace{(\sigma_{2x}\sigma_{2y}\sigma_{2z})}_{iI} = -I$$

Associando valores a todos esses observáveis. $v(A_i)$, $v(B_i)$ e $v(C_i)$.

Temos: pq são compatíveis

$$\underbrace{\left(v(A_1)\,v(A_2)\,v(A_3)\right)}_{1}\underbrace{\left(v(B_1)\,v(B_2)\,v(B_3)\right)}_{1}\underbrace{\left(v(A_1)\,v(B_1)\,v(C_1)\right)}_{1}\underbrace{\left(v(A_2)\,v(B_2)\,v(C_2)\right)}_{1}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\left(v(A_3)\,v(B_3)\,v(C_3)\right)}_{1} = 1$$

$$\therefore \underbrace{\left[v(A_1)\,v(A_2)\,v(A_3)\,v(B_1)\,v(B_2)\,v(B_3)\right]^2}_{1 \geq 0}\underbrace{v(C_1)\,v(C_2)\,v(C_3)}_{(-1)} = 1$$

$\underline{-1 = 1}$ $\not\#$

Não é possível associar valores a operadores incompatíveis.

Teorema BKS prova que a Mecânica Quântica não é uma versão estatística de uma teoria de variáveis ocultas.

Voltemos ao Singleto de Spin.

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right]$$

$$\rho = |0\rangle\langle 0| = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I} - \vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}\right)$$

A equação acima pode ser verificada escrevendo os vetores e operadores na base $\begin{pmatrix} |++\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{pmatrix}$

$$\sigma_{1x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Função empírica de correlação:

$$C(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = \frac{1}{N}\sum_{v_1,v_2=\pm 1} N(v_1;v_2)\, v_1 v_2$$

Para qualquer estado invariante por rotação, $C(\vec{n}_1;\vec{n}_2)$ só pode ser função de $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2$.

A Mecânica Quântica calcula a correlação como o valor esperado do operador $(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)$.

$$Q(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = \mathrm{Tr}\,\rho(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{4}\left((\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2) - (\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{Tr}(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2) - \mathrm{Tr}\sum_{\alpha=x}^{z}\sigma_{1\alpha}(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)\sigma_{2\alpha}(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overbrace{\mathrm{Tr}(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)}^{0}\,\overbrace{\mathrm{Tr}(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)}^{0} - \sum_{\alpha=x}^{z}\mathrm{Tr}\,\sigma_{1\alpha}(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)\,\mathrm{Tr}\,\sigma_{2\alpha}(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)\right]$$

$\mathrm{Tr}(A\otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{\alpha=x}^{z}\underbrace{\left(\sum_{\beta=x}^{z}\mathrm{Tr}\,\sigma_{1\alpha}\sigma_{1\beta}n_{1\beta}\right)}_{2\delta_{\alpha\beta}n_{1\beta}}\underbrace{\left(\sum_{\gamma=x}^{z}\mathrm{Tr}\,\sigma_{2\alpha}\sigma_{2\gamma}n_{2\gamma}\right)}_{2\delta_{\alpha\gamma}n_{2\gamma}}$$

$$= -\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2$$

$$Q(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = \mathrm{Tr}\,\rho(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2) = -\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = -\cos\phi_{12}$$

Se $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, $Q(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = -1$ anticorrelação perfeita.

Vamos construir uma teoria de variáveis ocultas com descrição determinística.

Variável oculta: λ associado ao par de partículas criadas

Assim, os valores do spin nas direções $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são pré-determinados e o resultado da medida será $\underbrace{v_1(\lambda;\vec{n}_1) \text{ e } v_2(\lambda;\vec{n}_2)}_{\pm 1}$.

Correlação: $$R(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = \int v_1(\lambda;\vec{n}_1)\, v(\lambda;\vec{n}_2)\, w(\lambda)\, d\lambda$$

(i) O valor $v_i(\lambda;\vec{n})$ depende apenas da direção $\vec{n}$ que o aparato mede a partícula i mas ~~não~~ do outro aparato.

(ii) A distribuição de probabilidade $w(\lambda)$ não depende das direções $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

Existe variáveis ocultos tais que $R(\vec{n}_1;\vec{n}_2)$ está de acordo com a previsão da Mecânico Quântico $Q(\vec{n}_1;\vec{n}_2)$?

<u>Desigualdade de Bell</u>

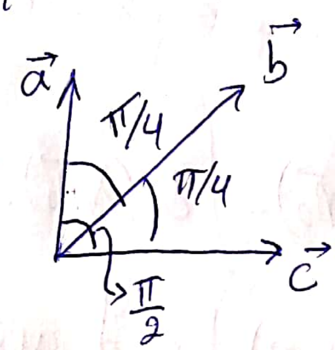
$$|R(\vec{a};\vec{b})-R(\vec{a};\vec{c})|-R(\vec{b};\vec{c})\leqslant 1$$

Se a Mecânica Quântico satisfaz a desigualdade de Bell:

$$|Q(\vec{a};\vec{b})-Q(\vec{a};\vec{c})|-Q(\vec{b};\vec{c})\leqslant 1$$

$$|\cos\phi_{ab}-\cos\phi_{ac}|+\cos\phi_{bc}\leqslant 1\ ,\quad \cos\phi_{ab}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Escolha $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que:



$$\therefore \left|\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{2}\leqslant 1 \quad \not\leqslant$$

$\therefore$ Mecânico Quântico viola a Desigualdade de Bell.

Desigualdade de Bell

$$|R(\vec{a};\vec{b}) - R(\vec{a};\vec{c})| - R(\vec{b};\vec{c}) \leqslant 1$$

Prova: $R(\vec{n};\vec{n}) = -1 \Rightarrow v_1(\lambda;\vec{n}) = -v_2(\lambda;\vec{n})$

$$\therefore R(\vec{n}_1;\vec{n}_2) = \int v_1(\lambda;\vec{n}_1)\, v_2(\lambda;\vec{n}_2)\, w(\lambda)\, d\lambda = -\int v_1(\lambda;\vec{n}_1)\, v_1(\lambda;\vec{n}_2)\, w(\lambda)\, d\lambda$$

$$\therefore R(\vec{a};\vec{b}) - R(\vec{a};\vec{c}) = -\int \left[v_1(\lambda;\vec{a})\, v_1(\lambda;\vec{b}) - v_1(\lambda;\vec{a})\, v_1(\lambda;\vec{c}) \right] w(\lambda)\, d\lambda$$

$$= -\int v_1(\lambda;\vec{a})\, v_1(\lambda;\vec{b}) \underbrace{\left[1 - \frac{v_1(\lambda;\vec{c})}{v_1(\lambda;\vec{b})} \right]}_{\underbrace{1 - \frac{v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c})}{v_1^2(\lambda;\vec{b}) = 1}}_{1 - v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c})}} w(\lambda)\, d\lambda$$

$$= -\int \underbrace{v_1(\lambda;\vec{a})\, v_1(\lambda;\vec{b})}_{\pm 1} \underbrace{\left[1 - \underbrace{v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c})}_{\pm 1} \right]}_{\geqslant 0} w(\lambda)\, d\lambda$$

$$|R(\vec{a};\vec{b}) - R(\vec{a};\vec{c})| \leqslant \int \left| v_1(\lambda;\vec{a})\, v_1(\lambda;\vec{b}) \left[1 - v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c}) \right] w(\lambda) \right| d\lambda$$

$$\leqslant \int \left[1 - v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c}) \right] d\lambda$$

$$\left|R(\vec{a};\vec{b}) - R(\vec{a};\vec{c})\right| \leqslant \int \left[1 - v_1(\lambda;\vec{b})\, v_1(\lambda;\vec{c})\right] w(\lambda)\, d\lambda = 1 + R(\vec{b};\vec{c})$$

$$\therefore \left|R(\vec{a};\vec{b}) - R(\vec{a};\vec{c})\right| - R(\vec{b};\vec{c}) \leqslant 1 \qquad \blacksquare$$

Desigualdade de Clauser-Horne

Similar à desigualdade de Bell, porém reside em premissas mais fracas.

$A \quad (a; a'; \dots) \quad S_1$

$B \quad (b; b'; \dots) \quad S_2$

$$p_1(a) = \frac{N_1(a)}{N} \qquad p_2(b) = \frac{N_2(b)}{N} \qquad p_{12}(a;b) = \frac{N_{12}(a;b)}{N}$$

Variável oculta: $\lambda \longrightarrow$ Não determina unicamente o valor do observável A, mas aparece na distribuição de probabilidade $p_1(a;\lambda)$

$$p_1(a) = \int p_1(a;\lambda)\, w(\lambda)\, d\lambda$$

Localidade é imposta ao requerir que dado λ, a distribuição de probabilidade conjunta para valores específicos a e b não têm correlações para subsistemas distantes:

$$p_{12}(a;b;\lambda) = p_1(a;\lambda)\,p_2(b;\lambda).$$

$$\therefore\ p_{12}(a;b) = \int p_1(a;\lambda)\,p_2(b;\lambda)\,w(\lambda)\,d\lambda$$

↳ Ainda há correlação na prob. medida.
pode haver

<u>Lema</u> Dados $x; x'; y; y' \in (0;1)$, então

$$xy - xy' + x'y + x'y' - x' - y \leq 0$$

$$x = p_1(a;\lambda) \quad x' = p_1(a';\lambda) \quad y = p_2(b;\lambda) \quad y' = p_2(b';\lambda)$$

$$\therefore\ p_1(a;\lambda)p_2(b;\lambda) - p_1(a;\lambda)p_2(b';\lambda) + p_1(a';\lambda)p_2(b;\lambda) + p_1(a';\lambda)p_2(b';\lambda) - p_1(a';\lambda) - p_2(b;\lambda) \leq 0$$

$$\therefore\ p_{12}(a;b) - p_{12}(a;b') + p_{12}(a';b) + p_{12}(a';b') - p_1(a') - p_2(b') \leq 0$$

$$\therefore \quad \frac{p_{12}(a;b) - p_{12}(a;b') + p_{12}(a';b) + p_{12}(a';b')}{p_1(a') + p_2(b)} \leq 1$$

Mecânica Quântica é uma teoria não-local?

↳ Precisamos de uma def. de localidade que não implique em elementos que não estão na M.Q.

S sistema composto por S_1 e S_2 emaranhados.

Aparato X interage com S_1
Aparato Y interage com S_2
} Não há acoplamento entre S_1 e Y ou entre S_2 e X ou entre X e Y.

Hamiltoniano H do sistema $S_1 + X + S_2 + Y$.

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = K_1 + K_X + V_{1X} \quad H_2 = K_2 + K_Y + V_{2Y}$$

$$[H_1; H_2] = 0$$

$\therefore$ Evolução temporal: $U = U_1 U_2 = U_2 U_1$, $U_i = e^{-iH_i t}$

Estado inicial: $\rho^0 = \rho_S^0 \otimes \rho_X^0 \otimes \rho_Y^0$

$\rho_S^0 \downarrow$ emaranhado

Evolução temporal: $\rho^0 \longrightarrow U(\rho_S^0 \otimes \rho_X^0 \otimes \rho_Y^0)U^\dagger$

Seja Q_1 um observável do aparato X.

$$\langle Q_1 \rangle = Tr\, Q_1 \rho = Tr\, Q_1 U_1 U_2 \rho^0 U_2^\dagger U_1^\dagger$$

$$= Tr\, Q_1 U_2 U_1 \rho^0 U_1^\dagger U_2^\dagger = Tr\, \underbrace{U_2^\dagger Q_1 U_2}_{Q_1} U_1 \rho^0 U_1^\dagger$$

$$= Tr\, Q_1 U_1 \rho^0 U_1^\dagger$$

$\downarrow$

$[Q_1; U_2] = 0$

$$\therefore \underline{\langle Q_1 \rangle = Tr\, Q_1 U_1 \rho^0 U_1^\dagger}$$

V_{2Y} desapareceu

↳ Não importa se o aparato Y está desligado.

Mecânica Quântica é uma teoria local no sentido de que nenhuma medida num sistema possui distribuição estatística que depende da escolha do de se medirá num outro sistema emaranhado ao primeiro, mas que não mais interagem.

Medida

Vamos construir um modelo semelhante ao Stern-Gerlach.

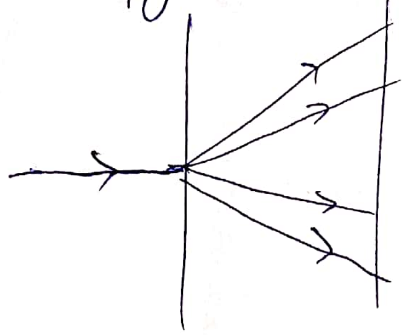
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + g p_z S_z f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Classicamente: $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} + g S_z f(x)$

Consideremos uma partícula com $p_y(0) = p_z(0) = 0$

$\therefore$ $x < 0$, temos $\dot{z} = 0$

$x \in (0; a)$, temos $\dot{z} = g S_z$



S_z microscópico

$\downarrow$

Z macroscópico

Na Mecânica Quântica:

spin-state

$$\psi^{out} = e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, e^{-iEt}\, \xi_\mu \quad (x<0,\ x>a)$$

$$\psi^{ins} = e^{iK_x' x}\, e^{\vec{K}_\perp\cdot\vec{r}_\perp}\, e^{-iEt}\, \xi_\mu \quad (0<x<a)$$

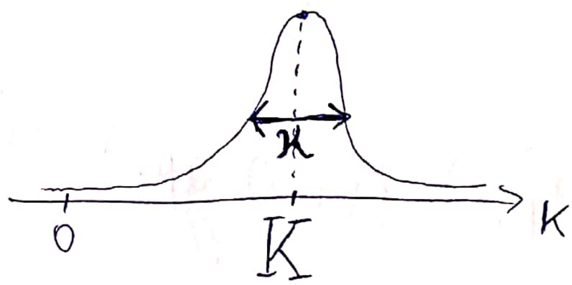
$$E = \frac{1}{2m}\left(K_x^2 + K_\perp^2\right) = \frac{1}{2m}\left(K_x'^2 + K_\perp^2\right) + g^\mu K_z$$

Estado incidente pela esquerda:

$$\Psi_\mu^{<}(\vec{r};t) = \chi(\vec{r};t)\,\xi_\mu\,, \quad x<0$$

$$\chi(\vec{r};t) = \int d\vec{k}\; a(\vec{k})\, e^{ik_x x}\, e^{i\vec{k}_\perp\cdot\vec{r}_\perp}\, e^{-ik^2 t/2m}$$ pacote de onda

$a(\vec{k})$ é amplitude no espaço de momento com pico em $\vec{K} = (K;0;0)$ e dispersão $\kappa \ll K$.



K grande $\Rightarrow$ reflexão desprezível

$$\Psi_\mu^{ins}(\vec{r};t) = \xi_\mu \int d\vec{K}\, a(\vec{K})\, e^{iK_x' x}\, e^{i\vec{K}_\perp\cdot\vec{r}_\perp}\, e^{-iK^2 t/2m}$$

$$K_x'^2 = K_x^2 - 2m\, g^\mu K_z$$

$$K_x' = K_x\left(1 - \frac{2g^\mu K_z m}{K_x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong K_x\left(1 - \frac{g^\mu K_z m}{K_x^2}\right)$$

$$K_x' = K_x - \frac{g^\mu K_z m}{K_x} \cong K_x - \frac{g^\mu K_z}{\bar{V}}, \quad \bar{V} = \frac{K}{m}$$

$$\therefore e^{iK_x' x} e^{iK_z z} \cong e^{iK_x x} e^{iK_z\left(z - \frac{g^\mu x}{\bar{V}}\right)}$$

$$\therefore \Psi_\mu^{ins}(\vec{r};t) = \xi_\mu \int d\vec{K}\, a(\vec{K})\, e^{iK_x x}\, e^{iK_y y}\, e^{iK_z\left(z - \frac{g^\mu x}{\bar{V}}\right)}\, e^{-iK^2 t/2m}$$

$$= \xi_\mu\, \chi\left(x - \bar{v}t; y; z - \frac{g^\mu x}{\bar{V}}; 0\right) = \chi_\mu(\vec{r};t)\, \xi_\mu .$$

$\therefore \vec{r}_\mu(t) = (\bar{v}t; 0; g^\mu t)$ Resultado esperado classicamente para as eq. de movimento.

Caso geral:

$$\Psi^{<}(\vec{r};t) = \chi(\vec{r};t)\sum_{\mu=-s}^{s} c_\mu \xi_\mu$$

$$\psi^{out}(\vec{r};t) = \sum_{\mu=-s}^{s} c_\mu \chi_\mu(\vec{r};t)\,\xi_\mu$$

$$\int_{\Omega_\mu} d\vec{r}\,|\psi^{out}(\vec{r};t)|^2 = |c_\mu|^2 = |\langle\mu|\psi^{out}\rangle|^2$$

SG tem um input não-emaranhado, onde não há correlação entre posição e spin, e produz a partir disso um estado emaranhado como output onde há uma correlação 1 para 1 entre distintas regiões macroscópicas Ω_μ e autovalores μ de S_z. Além de determinar a fração de resultados μ como $|c_\mu|^2$ e associa um novo estado após a medida que é $\chi_\mu \xi_\mu$.

Motivação: Mecânica Estatística - Nestor Caticha

Teoria de Crenças

Desejos para a teoria:

D1) $A|B \succ A|C$ e $A|C \succ A|D$, então $A|B \succ A|D$

Avalia crença como nº real.

D2) Se a plausabilidade de uma asserção puder ser representada por mais de uma forma, todas devem resultar no mesmo. (Consistência) (soma, negação etc. de asserções)

D3) Existem dois números V_v e V_f tal que $\forall a$, $a|a = V_v$ e para a e b mutuamente exclusivos $a|b = V_f$.

D4) Regra da Soma: Deve existir uma função F que relaciona $a \vee b|c$ e algum subconjunto de $\{a|c; b|c; b|ac; a|bc\}$ e não deve tomar um valor constante.

D5) Regra do Produto: Deve existir uma função G que relaciona $ab|c$ e algum subconjunto de $\{a|c; b|c; b|ac; a|bc\}$ e não deve tomar valor constante.

Da lista de desejos que queremos que uma Teoria de Crenças deva obedecer, deduzimos que essa teoria é equivalente à Teoria de Probabilidades.

$$P(a|a) = 1$$

$$P(a|\bar{a}) = 0$$

$$P(a \vee b|c) = p(a|c) + p(b|c) - p(ab|c)$$

$$P(ab|c) = p(a|c)\, p(b|ac) = p(b|c)\, p(a|bc)$$

$$p(\bar{a}|d) = 1 - p(a|d)$$

<u>Exemplo 1</u>: Moeda "justa" $P(cara|I) = \frac{1}{2}$ $P(coroa|I) = \frac{1}{2}$

Se jogo 1000 vezes a moeda verei 500 caras e 500 coroas <u>exatamente</u>?

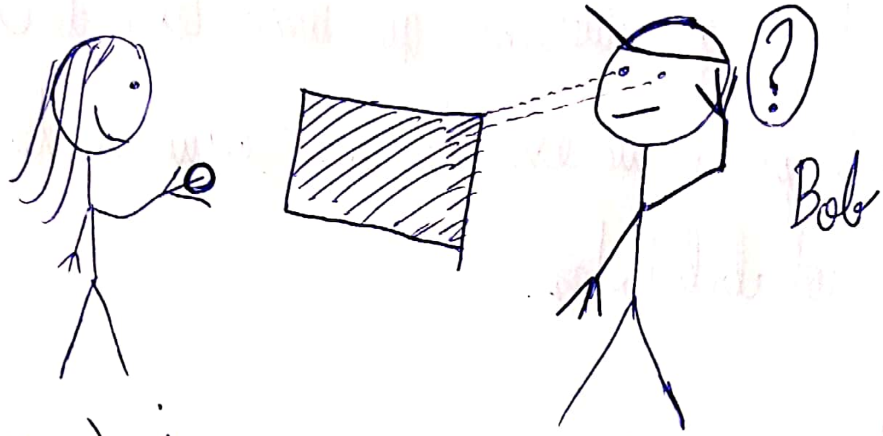
- Possivelmente <u>não</u>, mas muito possível que fique próximo.

E se o nº de vezes tender à ∞?

- O q significa ∞? Se eu jogar 1 milhão de vezes verei metade caras? Não.

Probabilidade é crença não um objeto do mundo físico.

Exemplo 2:



$P(\text{cara} \mid I_{\text{Alice}}) = 1$ ou 0

$P(\text{cara} \mid I_{\text{Bob}}) = \frac{1}{2}$

Probabilidade depende da informação que se tem disponível.
Probabilidade não é um objeto intrínseco à realidade.

Probabilidade NÃO existe!

Mecânica Quântica é probabilística
↳ Aqui tá o link com Bayesianismo

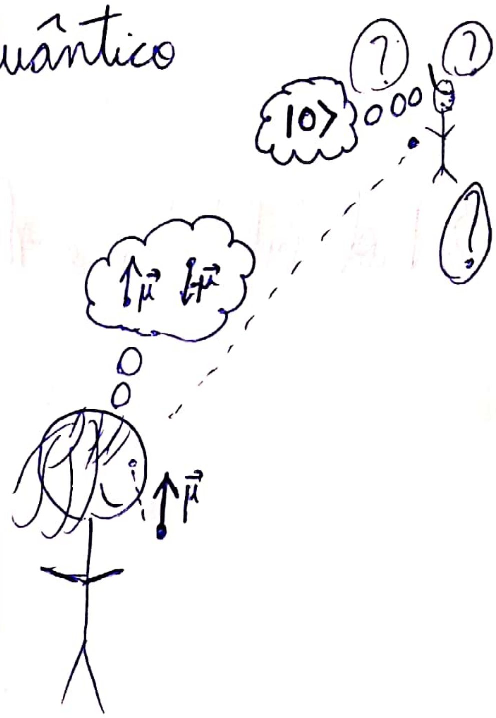
Quantum Bayesianism = QBism

→ Probabilidades não existem

→ Estados Quânticos não existem

Estados Quânticos $\xrightarrow{\text{Regra de Bohr}}$ Probabilidades

Probabilidades de resultados de um conjunto de medidas bem selecionados $\longrightarrow$ Estado Quântico

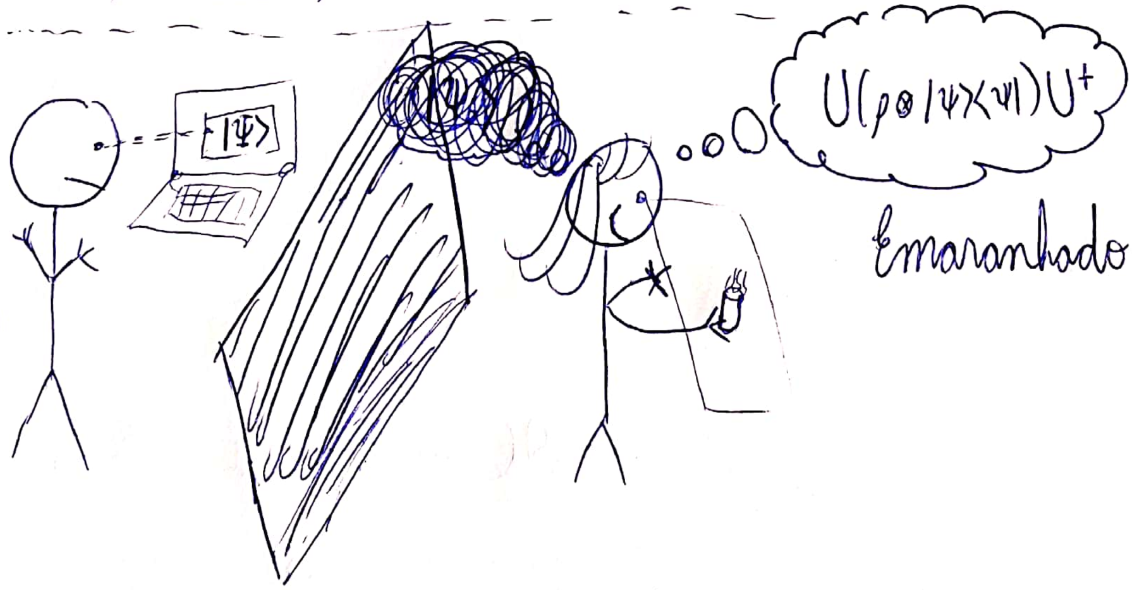


<u>Consequência</u>: Evita não-localidade.

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right]$$

Exemplo: <u>Início</u>)

<u>Medida</u>)



<u>Wigner's Friend</u> $\longrightarrow$ Resultados de medidas também são pessoais para o agente.

Referências:

1. Quantum Mechanics: Fundamentals, Gottfried
2. QBism, the Perimeter of Quantum Bayesianism, Christopher Fuchs
   Perimeter Institute
3. Probabilidades e Mecânica Estatística, Nestor Caticha