PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

TEMA

Posicionamento de uma massa com atuador pneumático

Departamento de Engenharia Mecânica

Professores: Decio Crisol Donha e Agenor de Toledo Fleury

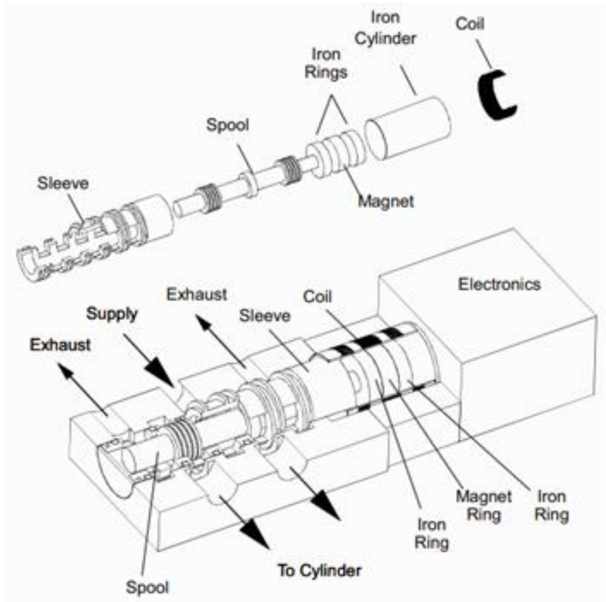
GRUPO 22

Pedro Di Pietro #USP: 9853123

21/01/2021

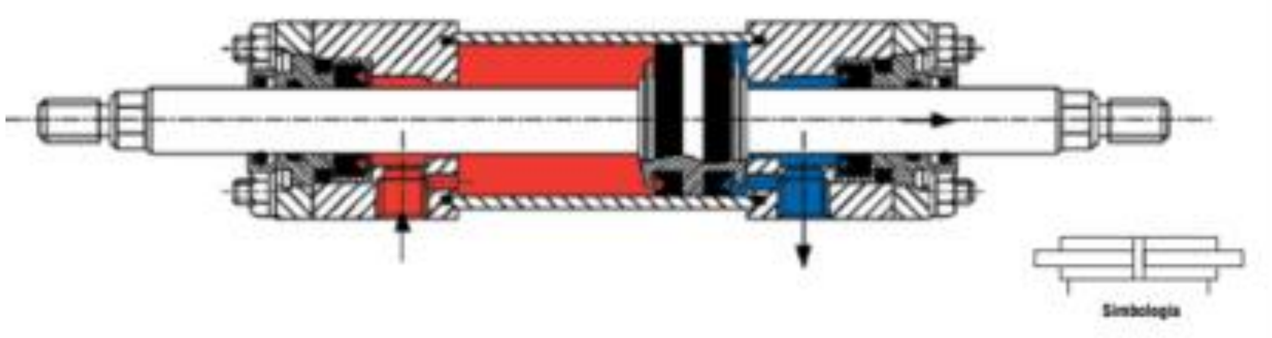
Atuadores pneumáticos

- Dispositivos que convertem energia pneumática em energia cinética
- Diversas aplicações na indústria, por exemplo controle de válvulas e posicionamento de componentes em linhas de montagem
- Vantagens de ter aspecto construtivo simples, oferecendo força e velocidades elevadas para sistemas que não dependem de bastante precisão



Objetivos

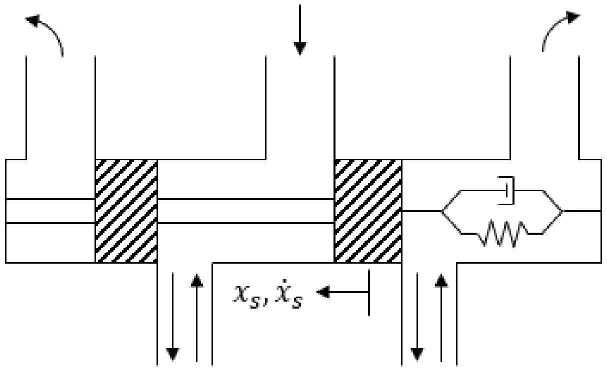
- Modelagem de um atuador pneumático linear de dupla ação para posicionamento de uma massa



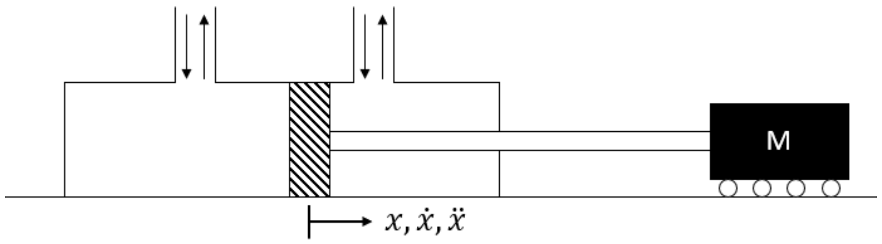
Metodologia

- Desenvolvimento do modelo físico do atuador acoplado à massa
- Adoção de hipóteses simplificadoras pertinentes ao modelo
- Obtenção do modelo matemático que descreve a mecânica do atuador
- Simulação da resposta temporal a diferentes entradas

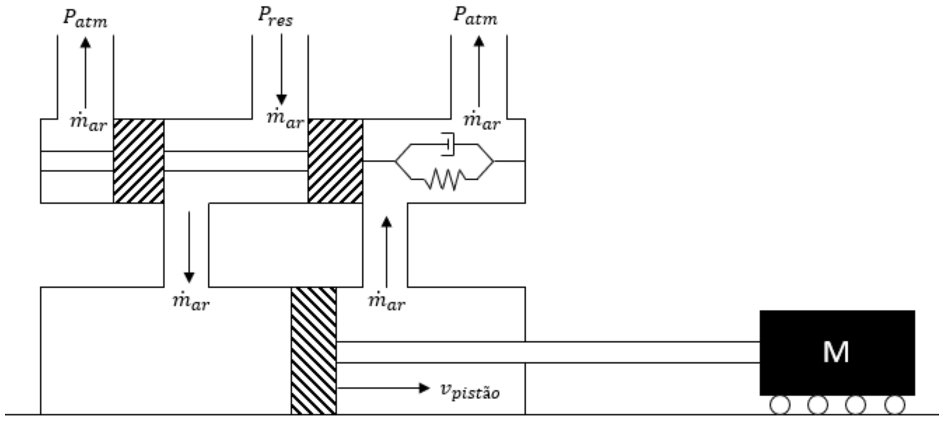
MODELO FÍSICO



Válvula de três vias



Pistão



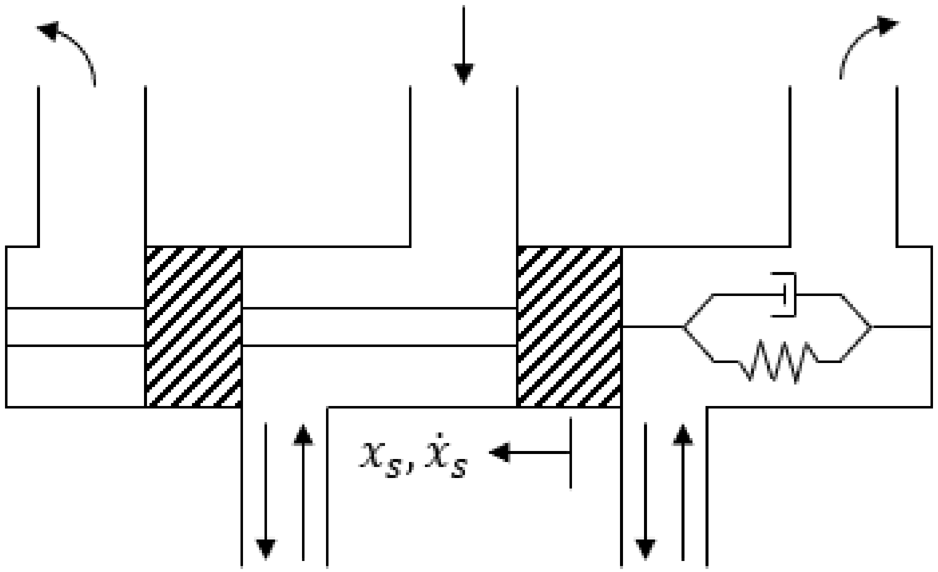
Conjunto acoplado

- A válvula proporcional está presa a uma mola referencial parado na válvula, e seu movimento é resistido por um amortecimento viscoso devido à interação com a parede
- No pistão, além das forças devido à pressão do fluido, é também considerada um amortecimento viscoso devido ao deslizamento na parede
- Variáveis de estado: $X = [x_s \;\; \dot{x}_s \;\; x \;\; \dot{x} \;\; \ddot{x}]$
- Saídas observadas $Y = [x]$

HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

- A pressão e temperatura do reservatório são constantes;
- A transferência de calor do gás para o ambiente é desprezível;
- A temperatura do gás não varia ao longo do escoamento;
- A válvula direcional é simétrica;
- Não há interseção na válvula;
- As passagens de ar da válvula para o cilindro são curtas e não oferecem resistência significativa ao escoamento;
- Não há atrito seco;
- Pequenos deslocamentos em relação ao centro do pistão;
- As pressões em cada lado do pistão do atuador variam pouco em relação a seu valor inicial;
- Escoamento subsônico;
- Não há vazamento de ar de um lado para o outro do pistão.
- Volume do êmbolo desprezível

VÁLVULA DE TRÊS VIAS



Modelagem Pneumática

Schwenzer (1983, apud BEATER, 2007, p. 252) propõe o seguinte modelo

$$\dot{m} = C(x_s)\rho_0 K_1 (P_1 - P_2)$$

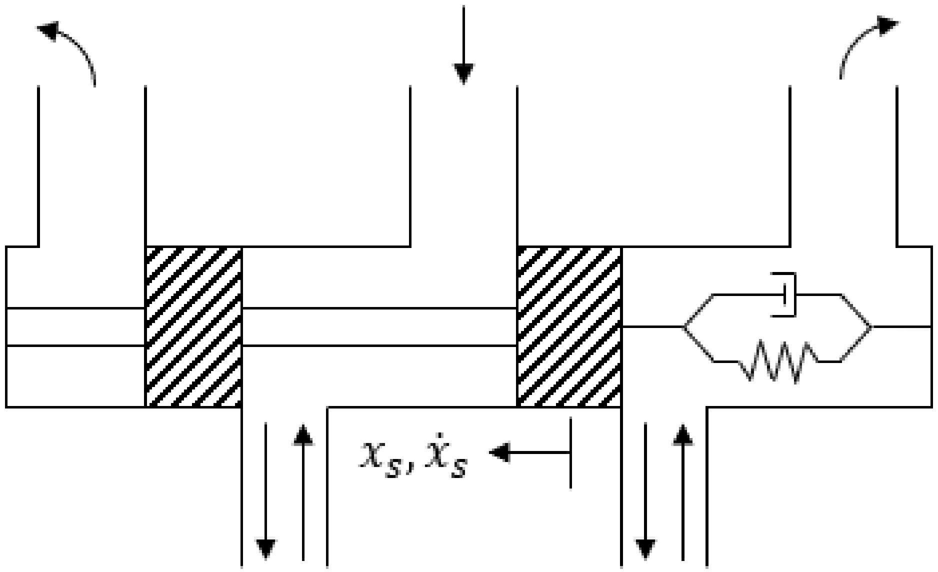
Onde:

$$C(x_s) = K_v x_s$$

Chegando em:

$$\dot{m} = K_v K_1 \rho_0 (P_1 - P_2) x_s = K_2 (P_1 - P_2) x_s$$

VÁLVULA DE TRÊS VIAS



Modelagem Mecânica

Normalizando a posição de referência do sinal de entrada do sistema e representando o sistema como um oscilador linear de segunda ordem:

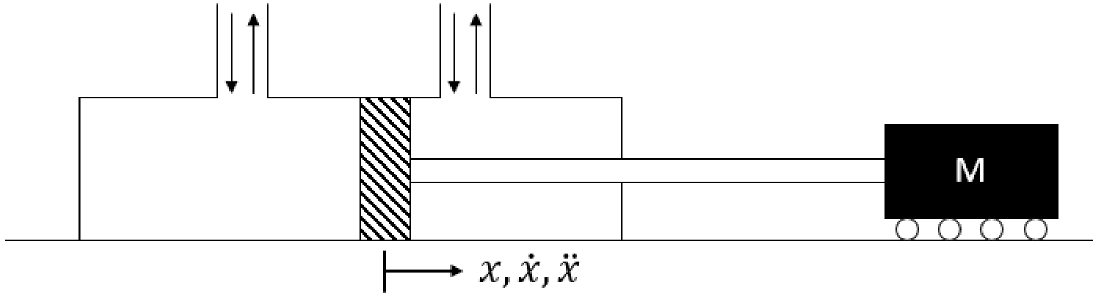
$$\frac{X_s}{U} = \frac{\omega_{ns}}{s^2 + 2\zeta_s\omega_{ns} + \omega_{ns}^2}$$

Analogamente, a equação diferencial é:

$$\ddot{x}_s + 2\zeta_s\omega_{ns}\dot{x}_s + \omega_{ns}^2 x_s = \omega_{ns}^2 u$$

PISTÃO

Modelagem Pneumática



Definição dos parâmetros do cilíndro

- V_A : Volume à esquerda do barril do cilindro;
- A_A : Àrea transversal interna do compartimento A;
- V_{0A} : Volume inicial à esquerda do barril do cilindro;
- V_B : Volume à direita do barril do cilindro;
- A_B : Àrea transversal interna do compartimento B;
- V_{0B} : Volume inicial à direita do barril do cilindro;
- x : Posição do cilindro, considerado zero quando aproximadamente no meio de seu curso.

Portanto, o volume de cada compartimento é dado por:

$$V_A = V_{0A} + A_A x, \qquad V_B = V_{0B} - A_B x$$

PISTÃO

Modelagem Pneumática

Assume-se comportamento isotérmico do ar conforme Kawakami et al (1988 [5]) e Gottert (2004, apud BEATER, 2007 [1], p. 253) propuseram em seus estudos.

Com isso, parte-se da definição de densidade e derivando:

$$\dot{m} = \dot{\rho} V + \rho \dot{V}$$

Ar assumido como gás ideal, assim:

$$\rho = \frac{\rho_0}{P_0} P$$

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0}{P_0} \dot{P}$$

Assim, derivando a equação do slide anterior e após algebrismos

$$\dot{P}_A = \frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A P_0 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A A_A \dot{x}}{V_{0A} + A_A x}$$

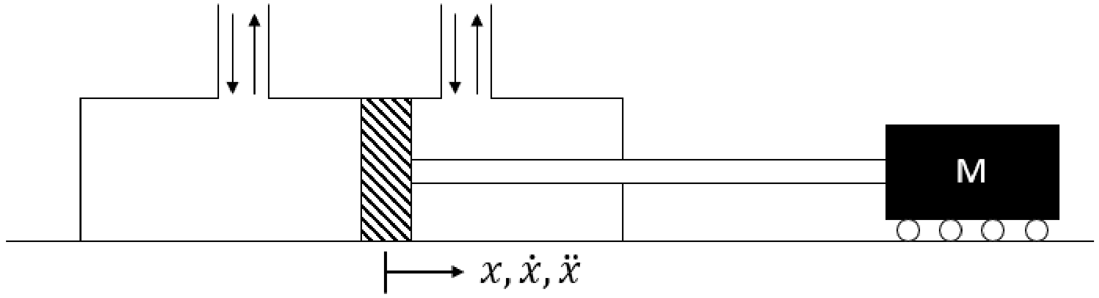
Mas como $\dot{P}_A$ não é linear, lineariza-se ao redor de $x_{s0} = x_0 = \dot{x}_0 = 0$ e $P_{A0} = P_0/2$

Com isso, a linearização por expansão em primeira ordem do polinómio de Taylor é feita, chegando-se em:

$$\dot{P}_A(x_s, \dot{x}) = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 V_{0A}} x_s - \frac{P_A A_A}{2V_{0A}} \dot{x}$$

$$\dot{P}_B(x_s, \dot{x}) = -\frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 V_{0B}} x_s + \frac{P_B A_B}{2V_{0B}} \dot{x}$$

PISTÃO



Modelagem Mecânica

Aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro

$$M\ddot{x} = F_{\Delta P} - F_{Atrito}$$

Onde:

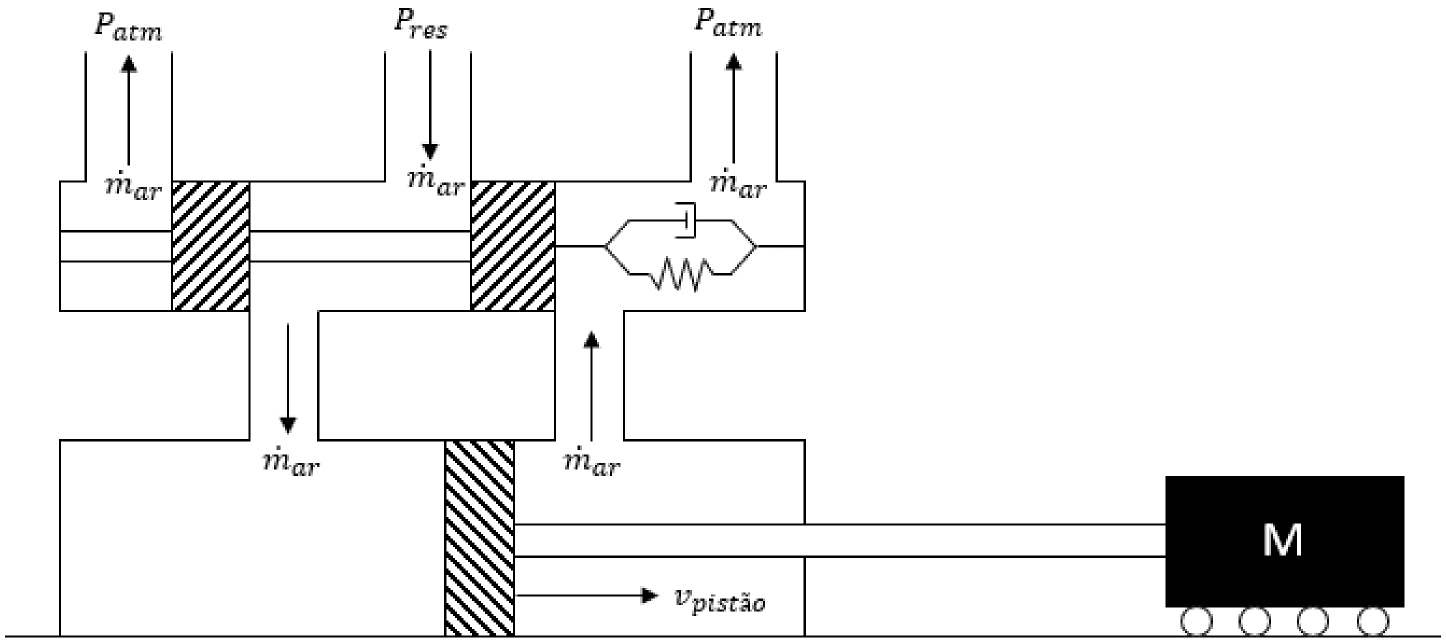
$$F_{Atrito} = K_3\dot{x}$$

$$F_{\Delta P} = P_A A_A - P_B A_B$$

Assim, após manipulações algébricas e cálculos de derivadas, têm-se:

$$\dddot{x} = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 M}\left(\frac{A_A}{V_{0A}} + \frac{A_B}{V_{0B}}\right)x_S - \frac{P_0}{2M}\left(\frac{A_A^2}{V_{0A}} + \frac{A_B^2}{V_{0B}}\right)\dot{x} - \frac{K_3}{M}\ddot{x}$$

SISTEMA COMPLETO



Definindo-se as constantes

$$\alpha = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 M}\left(\frac{A_A}{V_{0A}} + \frac{A_B}{V_{0B}}\right)$$

$$\beta = \frac{P_0}{2M}\left(\frac{A_A^2}{V_{0A}} + \frac{A_B^2}{V_{0B}}\right)$$

$$\gamma = \frac{K_3}{M}$$

$$\epsilon = 2\zeta_s \omega_{ns}$$

$$\lambda = \omega_{ns}^2$$

O sistema proposto é definido pelo seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{l} \dddot{x} = \alpha x_s - \beta \dot{x} - \gamma \ddot{x} \\ \ddot{x}_s = -\lambda x_s - \epsilon \dot{x}_s + \lambda u \end{array}\right.$$

SISTEMA COMPLETO

Representação em Espaço de Estados

$$\boldsymbol{X} = [\, x_s,\ \dot{x}_s,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x} \,]^T \longrightarrow \dot{\boldsymbol{X}} = [\, \dot{x}_s,\ \ddot{x}_s,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x} \,]^T$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}u \\ \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}u \end{aligned} \longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = 0$$

MODELO MATEMÁTICO

SISTEMA COMPLETO

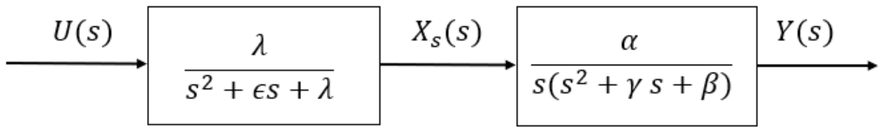
Determinação da Função de Transferência

$$s^3X = \alpha X_s - \beta sX - \gamma s^2X$$
$$s^2X_s = -\lambda X_s - \epsilon sX_s + \lambda U$$

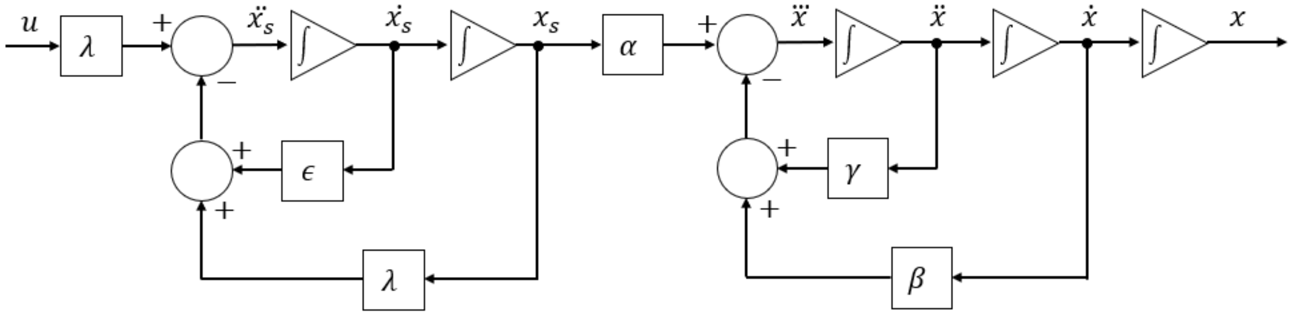
$$\longrightarrow \quad \frac{X}{U} = \frac{\alpha\lambda}{s(s^2+\gamma s+\beta)(s^2+\epsilon s+\lambda)}$$

Representação em Diagramas de Blocos

Domínio da Frequência



Domínio do Tempo



MODELO MATEMÁTICO – Parâmetros do Sistema

Parâmetro	Símbolo	Valor
Pressão do reservatório	P_0	600 kPa
Massa do pistão e movida	M	5 kg
Área transversal interna do compartimento A	A_A	$1{,}256 \cdot 10^{-3}\ m^2$
Área transversal interna do compartimento B	A_B	$1{,}178 \cdot 10^{-3}\ m^2$
Volume inicial do compartimento A	V_{0A}	$3{,}142 \cdot 10^{-4}\ m^3$
Volume inicial do compartimento B	V_{0B}	$2{,}945 \cdot 10^{-4}\ m^3$
Densidade do gás no compartimento	ρ_0	$7{,}107\ kg/m^3$
Coeficiente de atrito viscoso no pistão	K_3	$50\ Ns/m$
Frequência natural do carretel	ω_{ns}	$760\ rad/s$
Fator de amortecimento do carretel	ζ_s	0,47
Diâmetro interno do cilindro	D	$40 \cdot 10^{-3}$ m
Diâmetro do eixo preso ao pistão (B)	d	$10 \cdot 10^{-3}$ m
Comprimento útil interno do cilindro	L	0,5 m
Temperatura do ar no reservatório (referência)	T_0	295,15 K
Coeficiente de gás do ar	R	288 J/kgK
Coeficiente alpha	α	$2{,}026 \cdot 10^3$
Coeficiente beta	β	$5{,}843 \cdot 10^2$
Coeficiente gamma	γ	10
Coeficiente epsilon	ϵ	$7{,}144 \cdot 10^2$
Coeficiente lambda	λ	$5{,}776 \cdot 10^5$

ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Critério de Routh-Hurwitz

Substituição dos parâmetros na função de transferência resulta na expressão abaixo

$$\frac{1,17 \cdot 10^9}{s^5 + 724,4s^4 + 5,853 \cdot 10^5 s^3 + 6,193 \cdot 10^6 s^2 + 3,375 \cdot 10^8 s = 0}$$

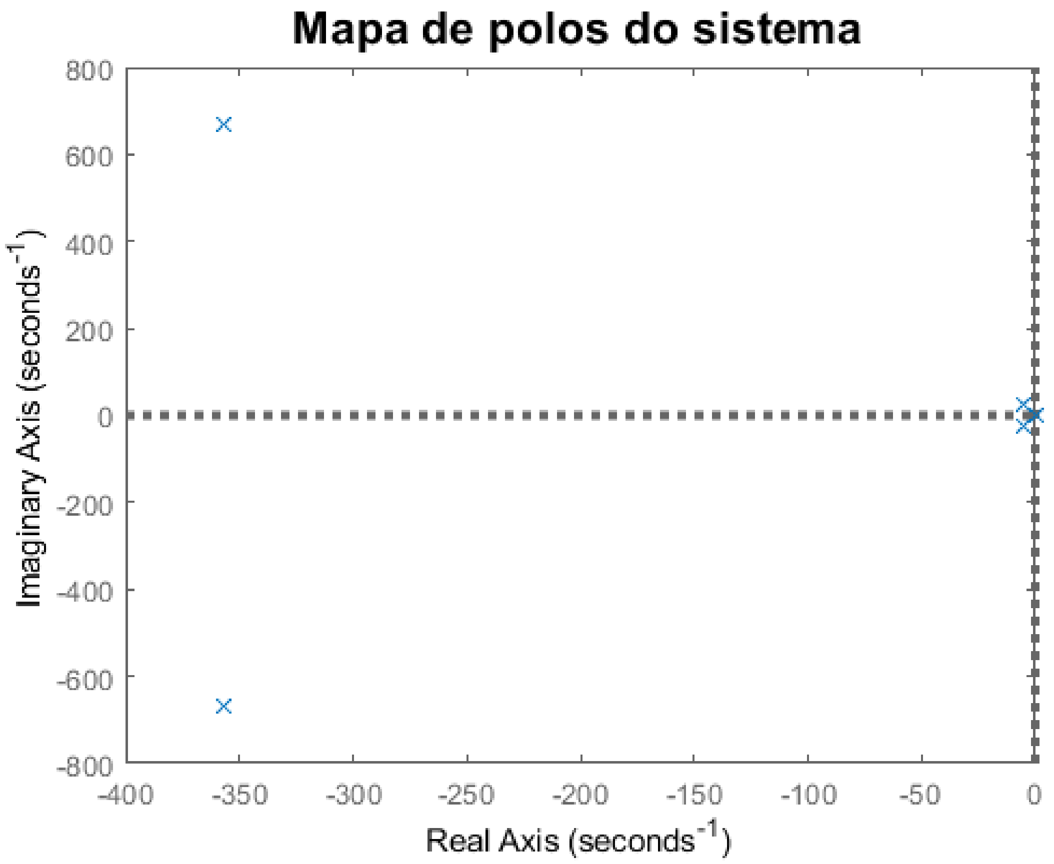
Que possibilita a construção da tabela de Routh-Hurwitz

s^4	1	$5,853 \cdot 10^5$	$3{,}375 \cdot 10^8$
s^3	$724{,}4$	$6,193 \cdot 10^4$	
s^2	$4,998 \cdot 10^4$	$3{,}375 \cdot 10^8$	
s^1	$1,301 \cdot 10^6$	0	
s^0	$3{,}375 \cdot 10^8$		

NÃO EXISTEM ELEMENTOS NEGATIVOS NA PRIMEIRA COLUNA E EXISTE POLO NA ORIGEM → **SISTEMA MARGINALMENTE ESTÁVEL**

ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Análise dos Polos



Raízes da equação característica são os polos:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -357,20 + 67,83i$$

$$s_3 = -357,20 - 67,83i$$

$$s_4 = -5 + 23,65$$

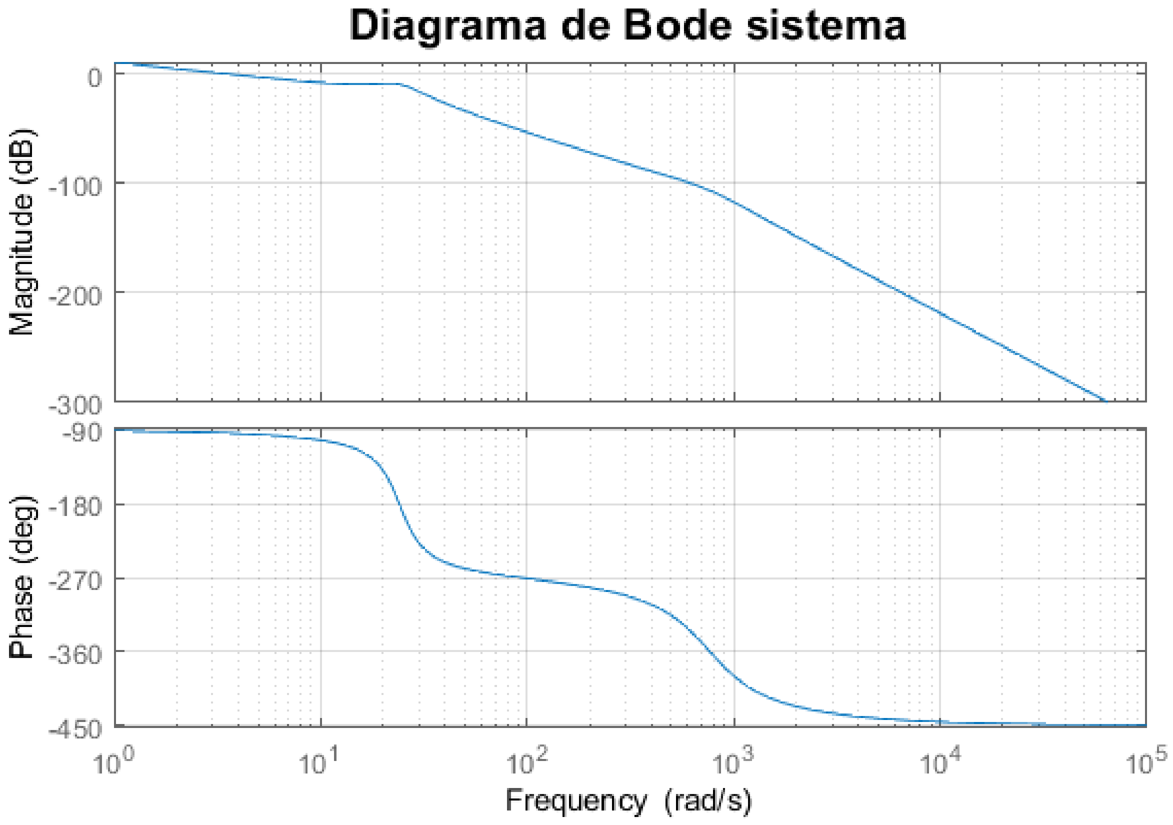
$$s_5 = -5 + 23,65$$

NÃO EXISTEM POLOS COM PARTE REAL POSITIVA E EXISTE POLO NULO → **SISTEMA MARGINALMENTE ESTÁVEL**

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Análise da Função de Transferência reescrita na forma de bode →

$$G(\omega j) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}} + \epsilon \frac{\omega}{\lambda} j\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\beta}} + \gamma \frac{\omega}{\beta} j\right)}$$



- Mostra de maneira clara as faixas de frequência influenciadas por cada polo ou par de polos
- Presença de uma inclinação de -20dB por década no trecho até 24,27 rad/s que atenua o pico de ressonância
- As diferenças nos fatores de amortecimentos dos dois pares de polos pode ser claramente observada pela diferença na inclinação das transições para -180 graus em volta das frequências naturais

RESPOSTA NO TEMPO

Matriz de Transição

Define-se matriz de transição de estados $\Phi(t)$ e a resolvente $\Phi(s)$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{k!} \longrightarrow y = C\left[\Phi(t)\cdot x_0 + \int_0^{\Delta t} \Phi(t-\tau)\cdot B \cdot u \cdot d\tau\right] + D\cdot u$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}; \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

Assim, fazendo a expansão em série de Taylor

$$\Gamma(\Delta t) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!}$$

Assim, é possível utilizar o conceito de matriz de transição para resolver o EE no domínio do tempo

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{k!}\right) x_0 + \left(\Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!}\right) \cdot B \cdot u$$

$$y(t) = C\left[\left(\sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{k!}\right) x_0 + \left(\Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!}\right) \cdot B \cdot u\right] + D\cdot u$$

RESPOSTA NO TEMPO

Matriz de Transição

Utilizando os parâmetros da valvula em estudo, têm-se as seguintes matrizes de transição e a matriz do termo forçante

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,7796 & 0,0006 & 0 & 0 & 0 \\ -374,5739 & 0,3164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0010 & 0 \\ 0,0010 & 0 & 0 & 0,9997 & 0,0010 \\ 1,8561 & 0,0008 & 0 & -0,5814 & 0,9898 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,9209 & 0,0004 & 0 & 0 & 0 \\ -220,3896 & 0,6493 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0005 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0 & 0,9999 & 0,0005 \\ 0,9680 & 0,0003 & 0 & -0,2912 & 0,9949 \end{bmatrix}$$

RESPOSTA NO TEMPO

Impulso

Entrada Impulso

- Tal impulso na válvula tira rapidamente o carretel da posição de equilíbrio, de modo que ar pressurizado entra no compartimento A do cilindro.

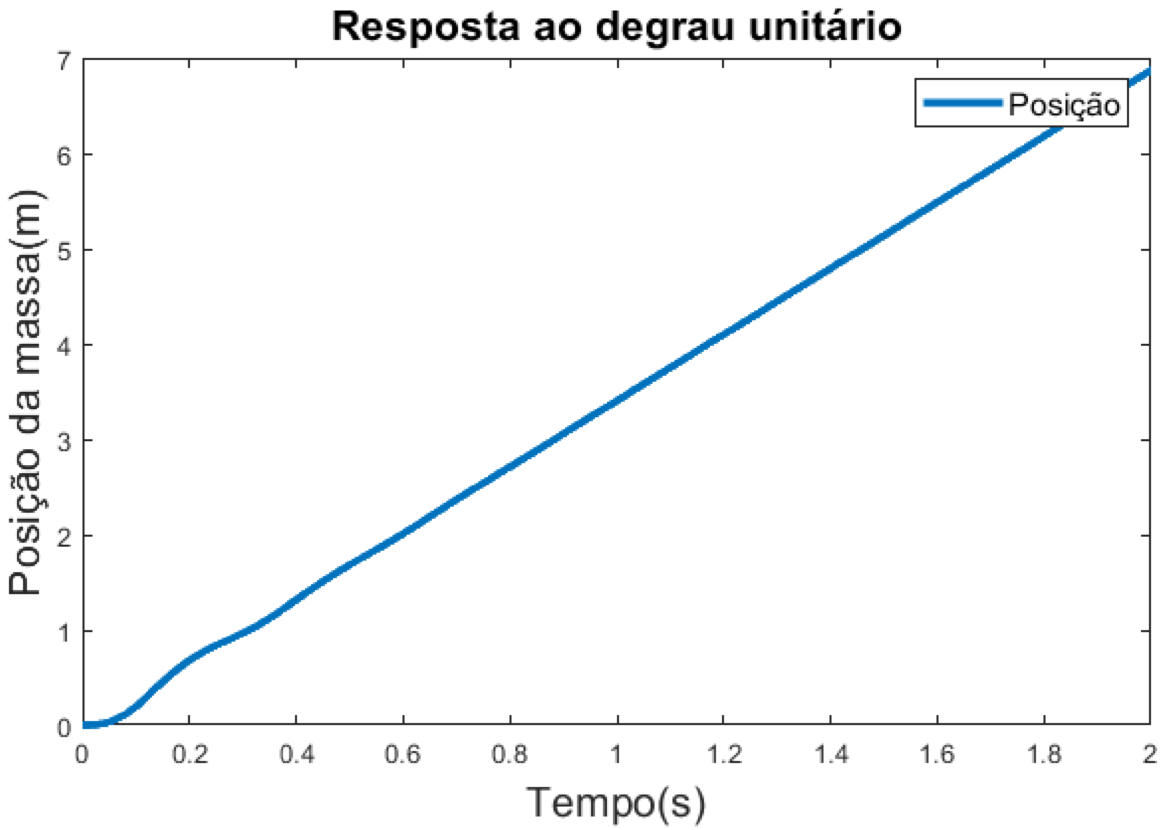
- Quando as pressões de ambos os cilindros se igualam, o cilindro ainda possui energia cinética, de modo que ocorre um sobressinal de aproximadamente 51,5%.

- A aproximação do sistema de quinta ordem para um de segunda e um integrador é válida, mantendo a exatidão dos resultados com 4 algarismos significativos.

RESPOSTA NO TEMPO

Degrau

Entrada Degrau Unitário



- Característica de uma admissão constante de ar no cilindro
- Resultados que não condizem com uma válvula real, já que a posição da massa variou de maneira constante e sem restrição a valores que extrapolam as características físicas do modelo.

RESPOSTA NO TEMPO

Degrau – emulação da condição real

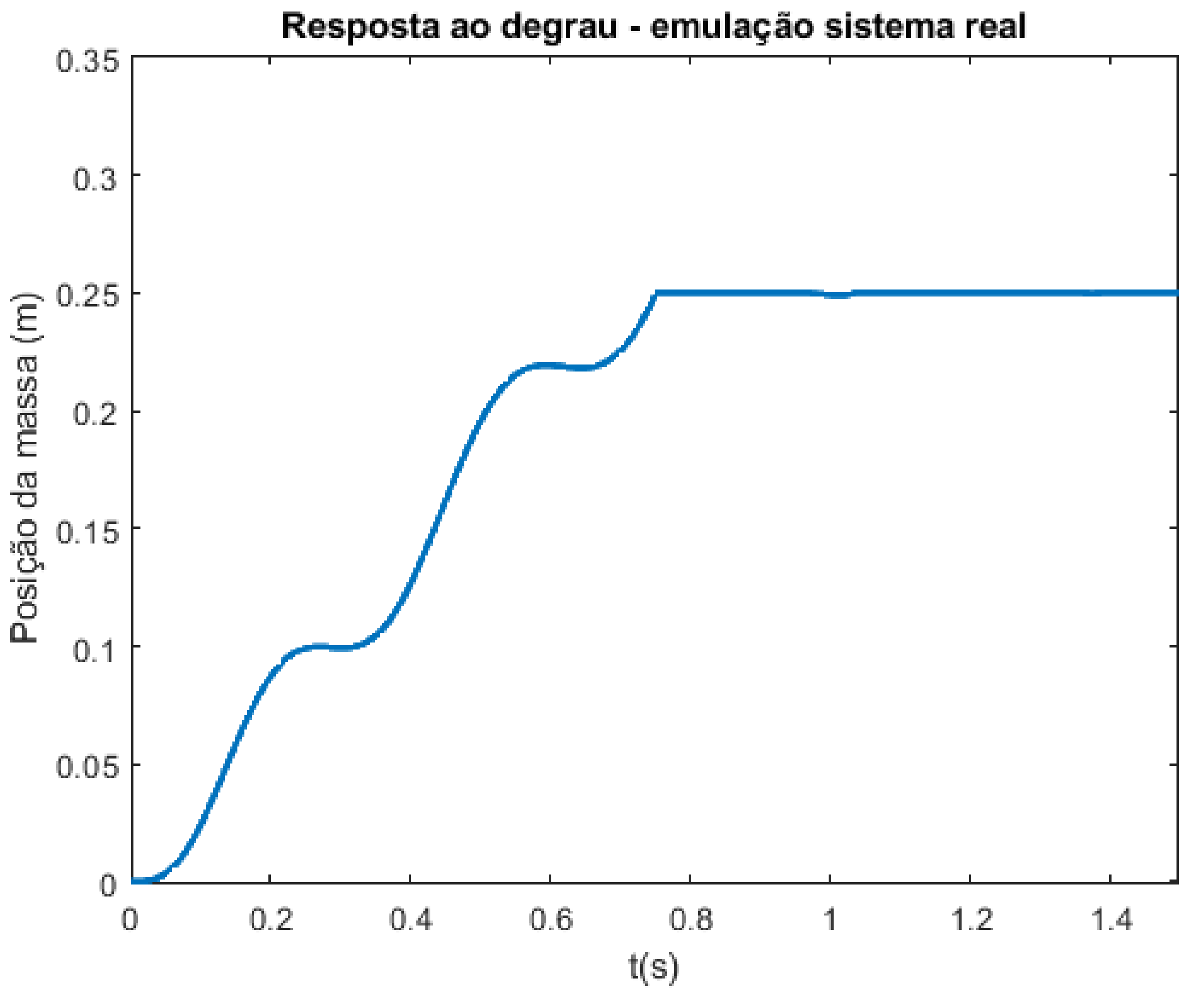
$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \frac{1}{M}(\dot{F}_{\Delta P} - K_3\dot{x}) \\ \dot{x}_s \\ -\lambda x_s - \epsilon\dot{x}_s + \lambda u \\ \dot{P}_A \\ \dot{P}_B \end{bmatrix} \qquad x_0 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ P_0/2,\ P_0/2]^T$$

$$\dot{P}_A = \frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0(V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A P_0 K_2 x_s}{\rho_0(V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A A_A \dot{x}}{V_{0A} + A_A x}$$

$$\dot{P}_B = -\frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0(V_{0B} + A_B x)} + \frac{P_B P_0 K_2 x_s}{\rho_0(V_{0B} + A_B x)} + \frac{P_B A_B \dot{x}}{V_{0B} + A_N x}$$

$$\dot{F}_{\Delta P} = \dot{P}_A A_A - \dot{P}_B A_B$$

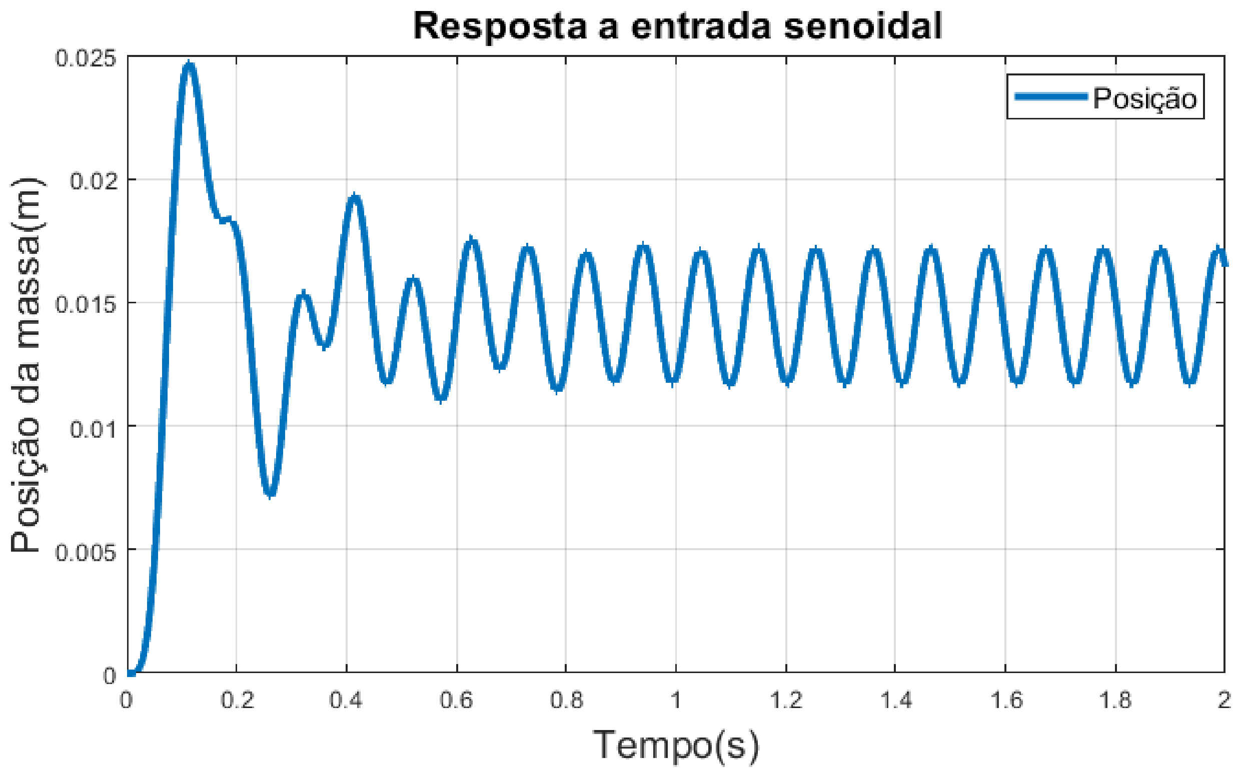
Entrada Degrau de 10% da válvula aberta



RESPOSTA NO TEMPO

Resultados

Entrada Senoidal de 60 Hz

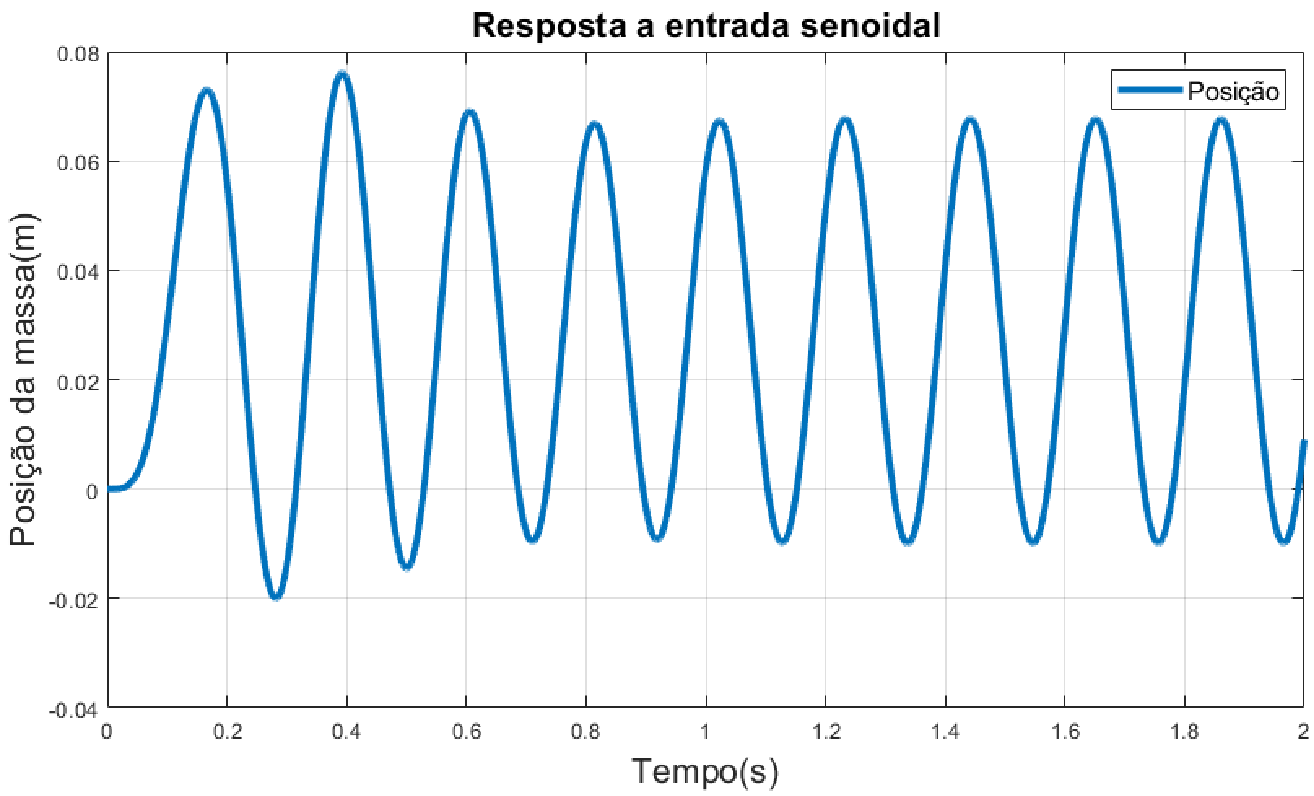


- Nova posição de equilíbrio instável condicionada pela admissão de ar
- amplitude da oscilação é de aproximadamente 0,0055 m

RESPOSTA NO TEMPO

Resultados

Entrada Senoidal de 30 Hz

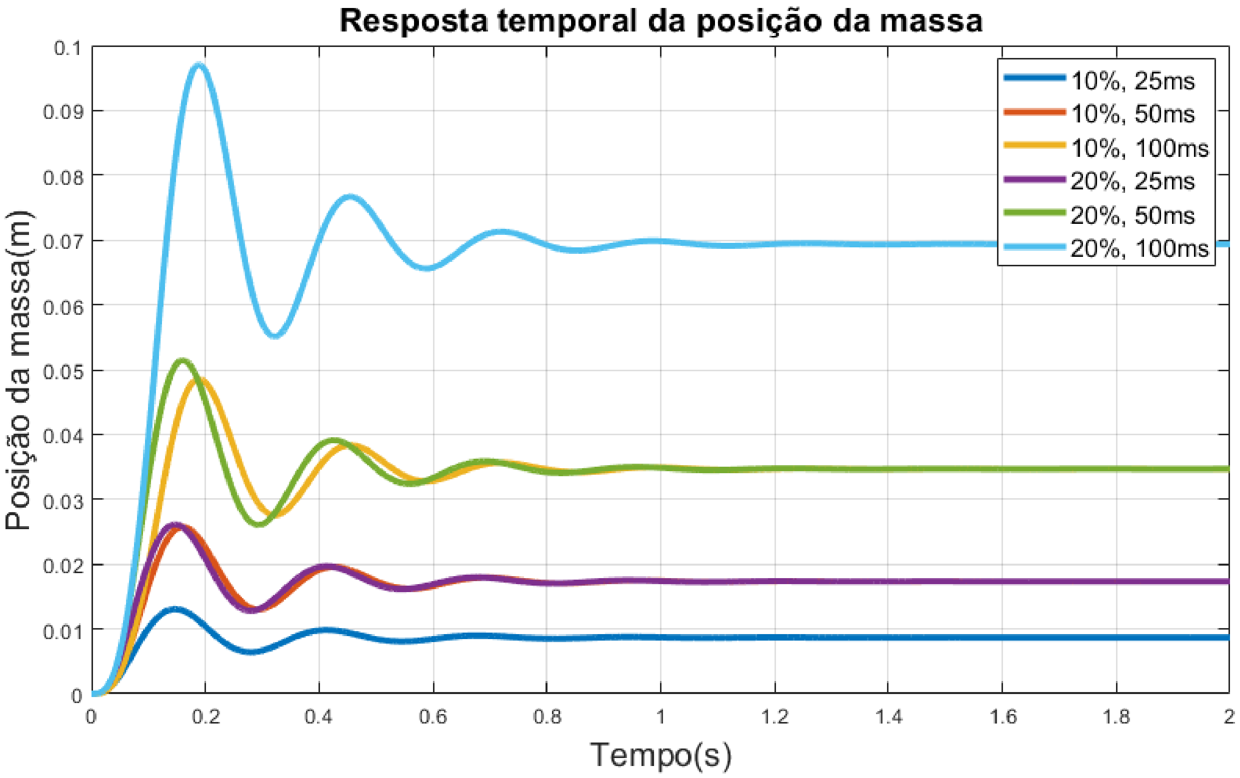


- amplitude da oscilação é de aproximadamente 0,0775m
- Comparando com a amplitude de oscilação da referência, de 0,5, encontra-se um ganho de 0.011 e 0.155, ou em decibéis, -39dB e -16dB, respectivamente

RESPOSTA NO TEMPO

Resultados

Estudo da Razão e Tempo de Abertura da Válvula



- O comportamento do sistema é muito semelhante ao observado para o impulso
- Destaca mais uma característica dos sistemas lineares, de que sua resposta é uma convolução do sinal de entrada

CONCLUSÃO

- Modelagem matemática do sistema
  - Toda a modelagem dos componentes foi realizada individualmente pela frente pneumática e mecânica
  - Modelagem de fluxo é extremamente complexa > Necessita de simplificações e embasamento empírico

- Resposta do sistema no domínio da frequência
  - Três níveis de decaimento, correspondente aos polos encontrados – Em fase e em magnitude

- Resposta do sistema no domínio do tempo
  - Equivalência entre a resolução analítica e a computacional > Análise do tempo de acomodação e do sobressinal por meio do diagrama de bode foram parelhos aos encontrados na resposta de uma entrada do tipo impulso
  - Problemas com a entrada degrau > Válvula permanece aberta > Massa se desloca para o infinito

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEATER, P. Pneumatic Drives. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 9783540694700.

- ZISSER, E. Position Control of a Pneumatic Actuation System By Position Control of a Pneumatic Actuation System. n. February, 2013.

- FLEURY, A. d. T. Sistemas Pneumaticos e Hidraulicos na Automacao. 44 p. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pme2371/ControledeSistemasHidraulicosFleury1.pdf>.

- NAJJARI, B. et al. Position control of an electro-pneumatic system based on PWM technique and FLC. ISA Transactions, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 647–657, 2014. ISSN 00190578. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2013.12.023>.

- KAWAKAMI, Y.; AKAO, J.; KAWAI, S. Some considerations on the high-speed driving of pneumatic cylinders. Journal of Fluid Control, 1988.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- HILDEBRANDT, A.; NEUMANN, R.; SAWODNY, O. Optimal system design of SISO-servopneumatic positioning drives. IEEE Transactions on Control Systems Technology, v. 18, n. 1, p. 35–44, 2010. ISSN 10636536.

- AL-IBRAHIM, A. M. Transient air temperature and pressure measurements during the charging and discharging processes of an actuating pneumatic cylinder. [S.l.: s.n.], 1991.

- QI, H.; BONE, G. M.; ZHANG, Y. Position Control of Pneumatic Actuators Using Three-Mode Discrete-Valued Model Predictive Control. Actuators, v. 8, n. 3, p. 56, 2019. ISSN 2076-0825.

- VALDIERO, A. C. et al. Nonlinear mathematical modeling in pneumatic servo position applications. Mathematical Problems in Engineering, v. 2011, 2011. ISSN 15635147.

- NAJAFI, F.; FATHI, M.; SAADAT, M. Dynamic modelling of servo pneumatic actuators with cushioning. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 42, n. 7-8, p. 757–765, 2009. ISSN 02683768.

- RAMÍREZ, I. Design of a tracking controller of a siso system of pneumatic servopositioning. Ingeniería y Desarrollo, v. 36, n. 1, p. 74–96, 2018. ISSN 01223461.

Obrigado