

PEDRO MORETTO DI PIETRO - 9853123

**MODELAGEM DE UM ATUADOR PNEUMÁTICO
ASSOCIADO A UMA VÁLVULA DE TRÊS VIAS
PARA POSICIONAMENTO LINEAR DE UMA
MASSA**

São Paulo
Janeiro de 2021

PEDRO MORETTO DI PIETRO - 9853123

**MODELAGEM DE UM ATUADOR PNEUMÁTICO
ASSOCIADO A UMA VÁLVULA DE TRÊS VIAS
PARA POSICIONAMENTO LINEAR DE UMA
MASSA**

Trabalho apresentado à disciplina PME3380
- Modelagem de Sistemas Dinâmicos, mi-
nistrada pelo Departamento de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da USP.

São Paulo
Janeiro de 2021

RESUMO

O presente trabalho apresenta o estudo acerca do posicionamento de uma massa por meio de um atuador pneumático. Tal estudo tem sua relevância no fato de que os atuadores pneumáticos são dispositivos que possuem diversos tipos de aplicações na indústria, fazendo com que o tema possa ser explorado em estudos futuros. Dentre as principais aplicações dos atuadores destaca-se o controle de válvulas e posicionamento de componentes em linha de montagem.

O estudo modela um atuador pneumático e o analisa quanto a sua estabilidade e resposta para diferentes tipos de entrada. Assim, dada a complexidade desenvolvida ao longo da modelagem, a simulação do sistema foi inteiramente realizada utilizando-se o software MATLAB® para auxiliar nas rotinas de cálculo matemático e a análise das respostas do sistema realizadas no domínio do tempo e da frequência.

Palavras-Chave – Atuador pneumático. Modelagem.

LISTA DE FIGURAS

1	Modelo físico do sistema completo	4
2	Modelo físico da válvula de três vias	5
3	Modelo físico do pistão	5
4	Relação entre posição do carretel e a condutância sônica	10
5	Diagrama de blocos - domínio da frequência	20
6	Diagrama de blocos - domínio do tempo	20
7	Mapa de polos e zeros	22
8	Diagrama de Bode - Malha Aberta	25
9	Diagrama de Bode - Malha Fechada	26
10	Resposta da posição da massa a um impulso	29
11	Resposta da posição da massa a um degrau	30
12	Emulação da condição real de resposta ao degrau	32
13	Resposta da posição da massa a uma senóide de 60Hz	33
14	Resposta da posição da massa a uma senóide de 30Hz	33
15	Posição da massa em para diversas razões e tempo de abertura da válvula .	34

LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros do Sistema	17
2	Tabela de Routh-Hurwitz	21

NOMENCLATURA

\ddot{x}	Aceleração do pistão
\ddot{x}_s	Aceleração do carretel da válvula de três vias
\dot{m}_{ar}	Vazão mássica de ar
\dot{x}	Velocidade do pistão
\dot{x}_s	Velocidade do carretel da válvula de três vias
Γ	Matriz do termo forçante
ω	Frequência
ω_b	Frequência de corte
ω_d	Frequência de oscilação amortecida
ω_n	Frequência natural de oscilação
ω_{ns}	Frequência natural da válvula de três vias
Φ	Matriz de transição
Ψ	Coefficiente de fluxo de massa
ρ	Massa específica
ρ_0	Massa específica de referência
σ	Constante de tempo
ζ_s	Fator de amortecimento da válvula de três vias
A	Área do bocal
A_A	Área à esquerda do barril do cilindro
A_B	Área à direita do barril do cilindro
b	Razão crítica de pressões

C	Condutância sônica
D	Diâmetro interno do cilindro
d	Diâmetro do eixo preso ao pistão
$F_{\Delta P}$	Força no pistão devido à diferença de pressões
k	Razão entre os calores específicos à pressão e temperatura constantes
K_1	Constante da válvula que relaciona vazão à diferença de pressões
K_2	Constante que relaciona vazão mássica com posição normalizada do carretel
K_3	Coefficiente de atrito viscoso do pistão
K_v	Constante da válvula que relaciona a condutância sônica (C) à posição do carretel (x_s)
L	Comprimento útil interno do cilindro
M	Massa
M_r	Sobresinal
P_1	Pressão à montante do bocal
P_2	Pressão à jusante do bocal
P_A	Pressão à esquerda do barril do cilindro
P_B	Pressão à esquerda do barril do cilindro
P_0	Pressão inicial
P_{atm}	Pressão atmosférica
P_{res}	Pressão no reservatório
R	Constante universal dos gases
T_0	Temperatura de referência
T_1	Temperatura à montante do bocal
t_p	Tempo de pico
t_s	Tempo de acomodação

u	Sinal de entrada do sistema
V	Volume
V_A	Volume à esquerda do barril do cilindro
V_B	Volume à direita do barril do cilindro
V_{0A}	Volume inicial à esquerda do barril do cilindro
V_{0B}	Volume inicial à direita do barril do cilindro
v_{pistao}	Velocidade do pistão
x	Posição do pistão
x_s	Posição do carretel da válvula de três vias

CONTEÚDO

Nomenclatura	v
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Objetivo	1
1.3 Revisão Bibliográfica	1
2 Modelo Físico	4
2.1 Válvula de três vias	4
2.2 Pistão	5
3 Hipóteses simplificadoras	6
4 Modelo Matemático	8
4.1 Válvula de três vias	8
4.1.0.1 Pneumática	8
4.1.0.2 Mecânica	11
4.2 Pistão	12
4.2.0.1 Pneumática	12
4.2.0.2 Mecânica	14
4.3 Sistema completo	15
4.3.1 Parâmetros do sistema	17
4.3.2 Espaço de estados	18
4.3.3 Função de transferência	19
4.3.4 Diagrama de blocos	19

5	Análise do sistema em malha aberta	21
5.1	Análise de estabilidade	21
5.1.1	Critério de Routh-Hurwitz	21
5.1.2	Análise dos pólos	21
5.2	Dinâmica do sistema de segunda ordem reduzido	23
5.3	Resposta em frequência	24
5.4	Resposta no tempo	27
5.4.1	Matriz de Transição	27
5.4.2	Resposta ao impulso	28
5.4.3	Resposta ao degrau	30
5.4.4	Resposta à entrada senoidal	32
5.4.5	Análise de combinações de intensidade e duração de pulsos	34
6	Conclusões	36
	Referências	37
	Apêndice A – Análise termo a termo - Bode	38

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Atuadores pneumáticos são amplamente utilizados em diversos segmentos da indústria, já que devido às suas características construtivas, eles possuem custos de aquisição e manutenção baixos quando comparados aos atuadores hidráulicos e elétricos. No entanto, a maioria dos atuadores pneumáticos são projetados somente para atuação em duas posições: retraído ou estendido. Desse modo, seu uso é restrito a funções como prensagem e conformação, movimentação de peças e abertura e bloqueio fluxo de fluidos.

Sendo assim, tendo em vista a vantagem competitiva alcançada pelos atuadores pneumáticos no critério custo, é interessante o desenvolvimento de mecanismos que possibilitem a utilização de tais equipamentos em tarefas que exigem um nível maior de controle, como por exemplo controle de vazão em plantas fluídicas.

1.2 Objetivo

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um modelo de atuador pneumático acoplado a uma válvula de três vias e analisar seu comportamento a uma série de sinais de entrada. Desse modo, espera-se entender as características dinâmicas do sistema e suas limitações para possibilitar o desenvolvimento de um controlador capaz de controlar a posição do atuador dinamicamente e, assim, estender a gama de aplicações dos atuadores pneumáticos.

1.3 Revisão Bibliográfica

Propor um modelo adequado a fim de descrever a o comportamento do atuador pneumático requer conhecer o sistema por completo. Para que isso seja possível, são necessárias informações sobre a influência de cada um dos componentes e suas características físicas. Assim, a consulta de uma bibliografia consolidada mostra-se essencial no momento de projeto.

De acordo com Beater (2007 [1]) os sistemas pneumáticos apresentam grandes vantagens em relação aos demais principalmente por conta dos seguintes aspectos: são baratos, possuem um aspecto construtivo simples e oferecem força e velocidades elevadas para sistemas que não demandam grande precisão. Já Zisser (2013 [2]), mostra também que os atuadores pneumáticos são vantajosos em relação aos atuadores elétricos na medida em que os pneumáticos possuem uma taxa de energia por peso muito superior aos dos atuadores elétricos além de poderem ser utilizados diretamente em componentes mecânicos, com uma fácil aplicação de força para controle.

Ao adentrar na parte de modelagem do sistema, como será evidenciado mais adiante, diferentes fontes foram utilizadas para caracterizar o modelo físico proposto. Como será posteriormente explicado, o modelo proposto é subdividido em duas diferentes partes: válvula de três vias e pistão. Cada uma destas partes, por sua vez, é subdividida para análise pneumática e mecânica.

Para a análise pneumática da válvula de três vias foi utilizada a expressão encontrada por St Venant e Wantzel (1839, apud BEATER, 2007 [1], p. 30), que relaciona a vazão mássica, pressão no reservatório, área do bocal, temperatura e constante universal do gás e o coeficiente de fluxo de massa. Em Fleury (2005, [3]), obteve-se também a expressão para cálculo do coeficiente de fluxo de massa.

Ademais, Beater (2007, [1]) evidencia que para a grande maioria dos equipamentos pneumáticos, ajustes empíricos são necessários para se encontrar uma expressão para a vazão de massa. Assim, as equações com parâmetros ajustáveis dadas por Sanville (1971, apud BEATER, 2007 [1], p. 41) são utilizadas para se obter a vazão mássica. Por fim, para sistemas não lineares Schwenzer (1983, apud BEATER, 2007 [1], p. 252) propôs uma simplificação para se adotar uma relação linear entre a vazão e a diferença de pressões.

Em relação à parcela mecânica da válvula de três vias, o modelo proposto por Najjari (2014 [4]) foi estudado. O carretel é movimentado por uma força externa ao mesmo tempo em que é resistido por uma mola e por forças de atrito. Tal modelo, entretanto, não foi adotado neste trabalho devido à grande dificuldade de encontrar valores de constante de mola, coeficiente de atrito e massa do carretel de válvulas comerciais. Sendo assim, o trabalho de Beater (2007, [1]) para uma válvula de $8 \cdot 10^{-3} m^3/s$ foi considerado mais adequado para o presente estudo. Com isso, é possível obter a função de transferência da posição do carretel da válvula, ao mesmo tempo em que é obtida a equação diferencial do sistema.

Para análise pneumática do pistão, os trabalhos de Kawakami et al (1988 [5]) e Gottert

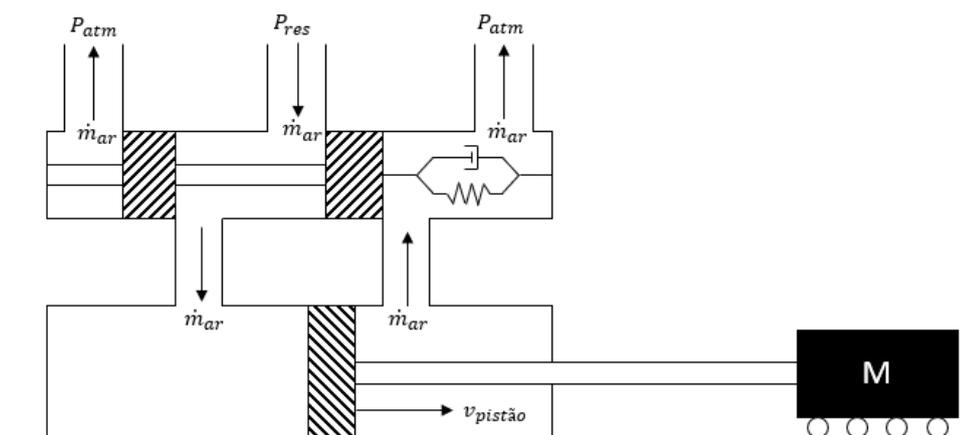
(2004, apud BEATER, 2007 [1], p. 253) foram utilizados. Tais estudos propõem que o gás tenha comportamento isotérmico, mantendo a temperatura do reservatório constante.

Por fim, a análise mecânica do pistão é baseada no trabalho de Zisser (2013, [2]). Aplica-se o teorema do movimento do baricentro ao pistão e à massa para relacionar a variação da força devido à diferença de pressão.

2 MODELO FÍSICO

O modelo físico é o primeiro passo em direção à modelagem do sistema. Com base nele, torna-se possível compreender a interação entre os diferentes componentes do sistema completo, além das características específicas de cada um. Assim, são analisados separadamente o mecanismo pneumático de acionamento, especificamente uma válvula de três vias, e o mecanismo de posicionamento da massa, realizado por um sistema de pistão. Quando acoplados, formam o conjunto proposto na Figura 1, na qual também estão exemplificados o fluxo de ar no conjunto e o deslocamento do pistão para uma dada posição do carretel da válvula de três vias.

Figura 1: Modelo físico do sistema completo



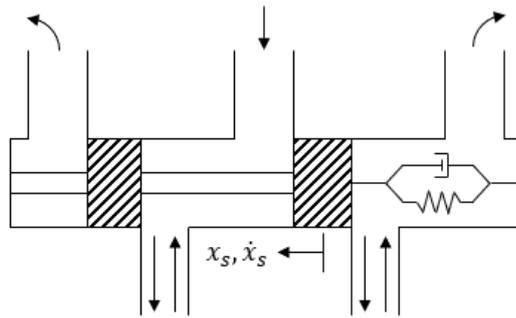
Fonte: Autoria própria

2.1 Válvula de três vias

A válvula de três vias, mostrada na Figura 2, consiste em um sistema pneumático que atua por meio de um câmara com cinco pontos de passagem de gás, reguladas por um carretel que, ao deslocar-se horizontalmente no interior da válvula, resulta na abertura das passagens. O funcionamento do sistema pneumático depende de uma linha de alimentação, responsável pela linha central da válvula, enquanto as outras duas vias superiores estão submetidas a pressão atmosférica. Em seu funcionamento, ao deslocar-se para a esquerda, sentido positivo do eixo x_s apresentado, a via inferior direita é submetida à pressão atmosférica, enquanto a via inferior esquerda é submetida a pressão de

alimentação, resultando na movimentação do pistão para a direita (condição mostrada na Figura 1). Dessa forma, as variáveis analisadas serão a posição e velocidade do eixo x_s, \dot{x}_s as quais possuem relação direta com a passagem de fluido para as câmaras do atuador pneumático.

Figura 2: Modelo físico da válvula de três vias

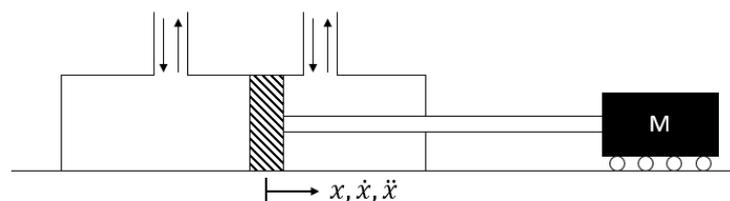


Fonte: Autoria própria

2.2 Pistão

O sistema do atuador pneumático, mostrado na Figura 3, tem como entrada e saída as passagens inferiores da válvula de três vias. No exemplo citado anteriormente, quando o carretel da válvula proporcional se desloca para a esquerda, a pressão na região esquerda ao pistão é aumentada segundo a linha de alimentação, enquanto a região à direita é submetida a pressão atmosférica, resultando em um movimento do pistão no sentido positivo do eixo x . Dessa forma, a análise do pistão será embasada nas relações de posição, velocidade e também aceleração (x, \dot{x}, \ddot{x}), possibilitando uma análise profunda sobre o mecanismo de posicionamento da massa. Além disso, ressalta-se que a massa em estudo é uma generalização, dado o foco do trabalho em modelar o atuador. Ela representa um componente a ser atuado em uma plante real, como por exemplo, uma haste de uma válvula controladora de vazão de seção variável ou uma peça a ser posicionada em uma linha de montagem, e tem valor igual $5kg$.

Figura 3: Modelo físico do pistão



Fonte: Autoria própria

3 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Para possibilitar a correta construção do modelo matemático e, assim, a continuação da modelagem do sistema, foram adotadas algumas hipóteses simplificadoras, as quais retiram efeitos considerados pouco influentes para o sistema analisado.

Pressão e temperatura de alimentação constantes: A linha de alimentação será modelada como um reservatório com pressão e temperatura em valores constantes, simulando um sistema de alimentação ideal e que não tenha variações de forma a interferir na atuação do sistema pneumático.

Transferência de calor desprezível entre o fluido e o ambiente: É considerado que o fluido não exerce troca de calor com o ambiente externo, limitando o volume de controle ao interior dos corpos analisados.

Temperatura do fluido constante ao longo do escoamento: Dadas as grandezas envolvidas, adota-se que o efeito do escoamento na temperatura do fluido é desprezível

Válvula direcional simétrica: De forma a simplificar a modelagem do conjunto, a válvula direcional considerada para o sistema é geometricamente simétrica.

Não há interseção na válvula: Durante a operação da válvula de três vias, uma mesma via nunca fica submetida simultaneamente a pressão de alimentação e a pressão atmosférica, assim como as duas vias em nenhum momento estão submetidas a uma mesma pressão. Dessa forma, é considerado que as vias de saída estão sempre submetidas a condições de pressões distintas.

As passagens de ar da válvula para o cilindro são curtas e não oferecem resistência significativa ao escoamento: Os dutos de escoamento, assim como o orifício de entrada e saída desses resultam em perdas consideradas desprezíveis.

Não há atrito seco: Sabendo que o atrito seco só teria influência no momento em que o carretel e o pistão saem da imobilidade, o efeito desse é mínimo e, assim, sua presença tem influência mínima nos resultados do sistema.

Pequenos deslocamentos em relação ao centro do pistão: O movimento do embolo do pistão foi restringido de forma a manter a amplitude máxima dentro do mecanismo em 20 centímetros, podendo assim ser considerado um pequeno deslocamento dado

o comprimento útil do cilindro de 50 centímetros.

Escoamento subsônico: Para os valores adotados na pressão de alimentação, o escoamento resultante do fluido se mantém em nível subsônico.

Vedação total entre os componentes da válvula e do pistão: De forma a desconsiderar possíveis perdas relativas a vedações imperfeitas e vazamento de pressão entre os dois lados do pistão, é considerado um sistema ideal, no qual não ocorrem fugas de fluido entre as diferentes câmaras.

Volume do êmbolo desprezível: Para a modelagem do sistema de pistão é considerado que o volume do êmbolo que divide as câmaras é desprezível, tendo como foco do volume de controle utilizado apenas o volume cilindro.

4 MODELO MATEMÁTICO

Inicialmente é analisada a válvula de três vias e um modelo para a vazão mássica de ar pelos seus orifícios é apresentado, assim como sua simplificação. Com isso é possível encontrar uma relação entre a posição do carretel e a vazão mássica para o cilindro de pressão.

Em seguida um modelo matemático para a movimentação do carretel é adotado, com base em uma função de transferência genérica de um sistema de segunda ordem subamortecido.

A segunda parte do desenvolvimento foca no pistão. Inicialmente é modelado o comportamento da pressão em cada uma das câmeras em relação às variáveis do sistema, e finalmente a diferença de pressões é relacionada com seu movimento.

As equações resultantes são manipuladas de forma a obter o sistema no espaço de estados, encontrando-se as matrizes **A**, **B**, **C** e **D**. A transformada de Laplace das equações que descrevem o sistema e sua posterior manipulação resultam finalmente na função de transferência do sistema.

4.1 Válvula de três vias

4.1.0.1 Pneumática

Nessa seção a vazão mássica de um fluido compressível por um orifício é estudada. Partindo das leis fundamentais da dinâmica de gases, para uma descarga livre de um reservatório com um bocal arredondado, St Venant e Wantzel (1839, apud BEATER, 2007 [1], p. 30) encontraram a relação:

$$\dot{m} = AP_1\Psi\sqrt{\frac{2}{RT_1}} \quad (4.1)$$

Onde P_1 é a pressão no reservatório, A é a área do bocal, T_1 é a temperatura do gás no reservatório, R é a constante universal dos gases e Ψ é um coeficiente de fluxo de massa,

dado por:

$$\Psi = \sqrt{\frac{k}{k-1} \left(\frac{P_2^{2/k}}{P_1} - \frac{P_2^{(k+1)/k}}{P_1} \right)} \quad (4.2)$$

Onde P_2 é a pressão à jusante do bocal e k é a razão entre calores específicos à pressão e temperatura constantes, respectivamente. A relação acima é também apresentada por Fleury [3], e só é válida para $\frac{P_2}{P_1} > \frac{1}{k+1}^{k/(k-1)} = 0,528$, chamada de razão crítica de pressões, em que a igualdade é válida no caso do ar, $k = 1,4$. Para relações de pressões menores, o escoamento torna-se sônico e bloqueado, e Ψ assume valor constante igual a 0,484. Uma redução adicional na razão de pressões em um escoamento bloqueado não altera sua vazão mássica.

Para a grande maioria dos orifícios encontrados em equipamentos pneumáticos, a condição de bocal arredondado não se aplica, e geralmente são necessários experimentos e ajustes empíricos para encontrar uma expressão para a vazão mássica (BEATER, 2007 [1]). Com isso, Sanville (1971, apud BEATER, 2007 [1], p. 41) propôs um modelo com parâmetros ajustáveis que posteriormente se tornou o padrão ISO 6358. Este modelo está apresentado nas equações:

$$\dot{m} = P_1 \rho_0 C \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{P_2}{P_1} - b}{1 - b} \right)^2}, \quad \text{para } \frac{P_2}{P_1} > b \quad (4.3)$$

$$\dot{m} = P_1 \rho_0 C \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}, \quad \text{para } \frac{P_2}{P_1} \leq b \quad (4.4)$$

Os termos com subscrito zero são relativos às condições de referência da norma, dadas por $T_0 = 293,15K$ e $\rho_0 = 1,185 \text{ kg/m}^3$.

Os parâmetros que caracterizam o componente são C e b , chamados respectivamente de condutância sônica e razão crítica de pressões. Para válvulas, o valor de b é usualmente menor que o valor teórico 0.528, pois elas podem ser consideradas como uma série de orifícios concatenados, e a associação em série de bocais diminui o b global por um fator de $n^{-1/3}$ (WIEDMANN, 1979, apud BEATER, 2007 [1], p. 50).

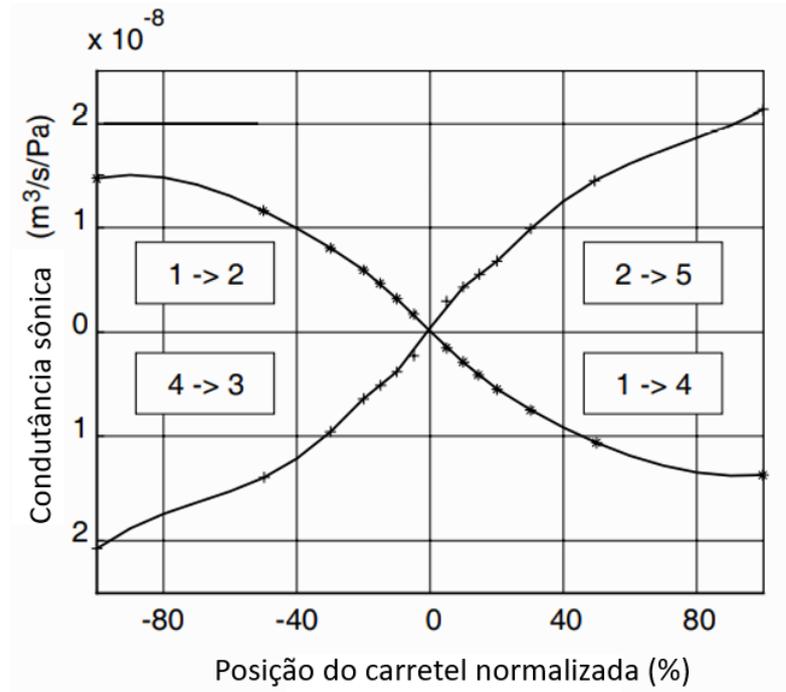
O modelo da equação (4.3) é não linear, com os parâmetros da válvula variando conforme a posição do carretel ($b = b(x_s)$ e $C = C(x_s)$). Como uma simplificação deste modelo, (SCHWENZER, 1983, apud BEATER, 2007 [1], p. 252) adota uma relação linear entre a vazão e a diferença de pressões dada por:

$$\dot{m} = C(x_s) \rho_0 K_1 (P_1 - P_2) \quad (4.5)$$

Onde K_1 é um coeficiente específico da válvula analisada.

A relação entre a condutância sônica e a posição do carretel normalizada de uma válvula de três vias $8 \cdot 10^{-3} m^3/s$ (ANR), analisada por Beater (2007 [1]), é mostrada na figura 4:

Figura 4: Relação entre posição do carretel e a condutância sônica



Fonte: Adaptado de Beater (2007 [1])

Nota-se que a relação é não linear, e não perfeitamente simétrica, com a válvula possibilitando maior fluxo de ar do reservatório para o pistão do que o contrário. No entanto, tal assimetria se destaca apenas para valores próximos do fim do curso do carretel, assim como a não linearidade da curva. Desse modo uma simplificação posterior do modelo de válvula que será adotada é a dependência linear da condutância sônica com a posição normalizada e válvula simétrica, representada por:

$$C(x_s) = K_v x_s \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.6) na equação (4.5) e assumindo que o gás no reservatório está na temperatura de referência, obtém-se finalmente o modelo para a vazão mássica na válvula conforme a equação:

$$\dot{m} = K_v K_1 \rho_0 (P_1 - P_2) x_s = K_2 (P_1 - P_2) x_s \quad (4.7)$$

4.1.0.2 Mecânica

Dentro da válvula proporcional o carretel é movimentado por uma força externa, e resistido por uma mola e por forças de atrito (NAJJARI, 2014 [4]). A força externa pode ser gerada por um solenoide ou outra válvula, e o atrito se apresenta difícil de modelar, com deformações temporárias dos anéis e componente estática e viscosa. Assim, o movimento real é não linear, apresentando velocidade de resposta e oscilação diferentes dependendo da amplitude do sinal de entrada, que no caso analisado será uma posição de referência normalizada. No entanto, para a condição de pequenas amplitudes do carretel, o sistema pode ser aproximado por um oscilador linear de segunda ordem.

Devido à dificuldade de encontrar valores de constante de mola, de coeficiente de atrito, e massa do carretel de válvulas comerciais, é mais conveniente representar este sistema diretamente por sua frequência natural ω_{ns} e coeficiente de amortecimento ζ_s , que podem ser fornecidos pelo fabricante ou medidos experimentalmente. Tais valores para a válvula de 480l/min estudada por Beater (2007 [1]) e mencionada na seção anterior são de $\omega_{ns} = 760\text{rad/s}$ e $\zeta_s = 0,47$.

Assim a função de transferência da posição do carretel da válvula proporcional com o sinal de entrada sendo a posição desejada normalizada é dada por:

$$\frac{X_s}{U} = \frac{\omega_{ns}^2}{s^2 + 2\zeta_s\omega_{ns}s + \omega_{ns}^2} \quad (4.8)$$

De modo análogo, a equação diferencial que representa a dinâmica do sistema é:

$$\ddot{x}_s + 2\zeta_s\omega_{ns}\dot{x}_s + \omega_{ns}^2x_s = \omega_{ns}^2u \quad (4.9)$$

Nota-se que a passagem de ar pelo orifício não influencia na posição do carretel pois a válvula é considerada simétrica, de modo que as áreas das passagens de entrada e saída na válvula são iguais, e as forças de pressão e viscosidade devido ao escoamento são iguais e opostas. Assim sendo, a parte mecânica da válvula é considerada desacoplada da sua parte pneumática.

4.2 Pistão

4.2.0.1 Pneumática

Nessa seção o comportamento da pressão dentro de cada compartimento do pistão é analisado com o objetivo de encontrar relações entre suas variações, a posição do pistão, e as outras variáveis do sistema.

Definindo-se os parâmetros do cilindro:

- V_A : Volume à esquerda do barril do cilindro;
- A_A : Área transversal interna do compartimento A;
- V_{0A} : Volume inicial à esquerda do barril do cilindro;
- V_B : Volume à direita do barril do cilindro;
- A_B : Área transversal interna do compartimento B;
- V_{0B} : Volume inicial à direita do barril do cilindro;
- x : Posição do cilindro, considerado zero quando aproximadamente no meio de seu curso.

Os volumes de cada compartimento podem ser representados por:

$$V_A = V_{0A} + A_A x, \quad V_B = V_{0B} - A_B x \quad (4.10)$$

Várias abordagens já foram analisadas para o comportamento termodinâmico do ar dentro de um cilindro atuado. Hildebrandt et al. (2010 [6]) considera o ar como gás perfeito passando por um processo politrópico. Al- Ibrahim (1991, [7]) encontrou que a temperatura do ar variava consideravelmente em um processo de enchimento e esvaziamento de um cilindro, mas não tanto quanto em um processo adiabático. Finalmente, Kawakami et al (1988 [5]) e Gottert (2004, apud BEATER, 2007 [1], p. 253) mostraram que para o projeto de controladores, o comportamento isotérmico do ar pode ser assumido. Desse modo, o gás será considerado como sempre à temperatura do reservatório, $T_0 = 293,15K$.

Partindo então definição de densidade e derivando, obtém-se:

$$\dot{m} = \dot{\rho}V + \rho\dot{V} \quad (4.11)$$

Da equação de gás ideal e sua derivada, para um processo isotérmico, tem-se:

$$\rho = \frac{\rho_0}{P_0} P \quad (4.12)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0}{P_0} \dot{P} \quad (4.13)$$

Derivando-se as equações (4.10), obtém-se:

$$\dot{V}_A = A_A \dot{x}, \quad \dot{V}_B = -A_B \dot{x} \quad (4.14)$$

O desenvolvimento subsequente será realizado apenas para o compartimento A, utilizando as relações (4.11) a (4.14). Substituindo a equação (4.14) na (4.11), encontra-se:

$$(\dot{m} - \dot{\rho}_A V_A) / \rho_A = A_A \dot{x} \quad (4.15)$$

Utilizando as relações (4.12), (4.13) e (4.10) em (4.15) obtém-se (4.17), que pode ser manipulada para ser uma expressão da variação de pressão no compartimento.

$$\left(\dot{m} - \frac{\rho_0}{P_0} \dot{P}_A (V_{0A} + A_A x) \right) \frac{P_0}{\rho_0 P_A} = A_A \dot{x} \Rightarrow \quad (4.16)$$

$$\dot{P}_A = \frac{\dot{m} P_0}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A A_A \dot{x}}{V_{0A} + A_A x} \quad (4.17)$$

A vazão mássica \dot{m} para dentro do compartimento A é dada pela equação (4.7). Considerando a pressão do reservatório como P_0 , a pressão de descarga como P_A e substituindo a expressão na equação (4.17), têm - se finalmente a equação para \dot{P}_A :

$$\dot{P}_A = \frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A P_0 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A A_A \dot{x}}{V_{0A} + A_A x} \quad (4.18)$$

Observando a equação (4.18), nota-se que \dot{P}_A é uma função não linear da posição do carretel, da posição e da velocidade do pistão, e da pressão no compartimento. Para continuar o desenvolvimento matemático, é necessário linearizar a função em torno de um ponto de equilíbrio. Definindo $x_{s0} = x_0 = \dot{x}_0 = 0$ e $P_{A0} = P_0/2$, aproximação utilizada por Beater em seu modelo (BEATER, 2007 [1], a linearização por expansão em primeira ordem do polinômio de Taylor se dá da seguinte maneira:

$$\dot{P}_A = \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x}) \quad (4.19)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x}) \approx \dot{P}_A(0, P_0/2, 0, 0) + \left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial x_s} \right|_{eq} (x_s - 0) + \\ \left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial P_A} \right|_{eq} (P_A - P_0/2) + \left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{eq} (x - 0) + \\ \left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{eq} (\dot{x} - 0) \quad (4.20) \end{aligned}$$

Calculando cada termo :

$$\dot{P}_A(0, P_0/2, 0, 0) = 0 \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial x_s} \right|_{eq} (x_s - 0) = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 V_{0A}} x_s \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial P_A} \right|_{eq} (P_A - P_0/2) = 0 \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{eq} (x - 0) = 0 \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{P}_A(x_s, P_A, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{eq} (\dot{x} - 0) = -\frac{P_A A_A}{2V_{0A}} \dot{x} \quad (4.25)$$

A dependência de \dot{P}_A com P_A e x desaparece ao linearizar a equação. Desse modo, a expressão linearizada para a taxa de variação de pressão no compartimento A é:

$$\dot{P}_A(x_s, \dot{x}) = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 V_{0A}} x_s - \frac{P_A A_A}{2V_{0A}} \dot{x} \quad (4.26)$$

Considerando que a vazão mássica para o compartimento B é o oposto da vazão mássica em A, e desenvolvendo as equações analogamente ao que foi feito de (4.15) a (4.26), obtém-se a expressão linearizada para a taxa temporal de variação de P_B , apresentada na equação (4.27):

$$\dot{P}_B(x_s, \dot{x}) = -\frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 V_{0B}} x_s + \frac{P_B A_B}{2V_{0B}} \dot{x} \quad (4.27)$$

4.2.0.2 Mecânica

O pistão e a massa presa à ele são acelerados pela força resultante devido à diferença de pressões, e resistidos por forças de atrito do barril do pistão em contato com a parede interna do cilindro. No trabalho de Zisser (2013 [2]) é utilizada uma abordagem baseada nas equações de Euler-Lagrange para o movimento do pistão, com a definição de uma

função potencial baseada no processo termodinâmico pelo qual o gás é submetido. Neste trabalho é utilizada a abordagem Newtoniana.

Aplicando o teorema do movimento do baricentro ao pistão e a massa, no sentido de movimento do pistão, tem-se:

$$M\ddot{x} = F_{\Delta P} - F_{Atrito} \quad (4.28)$$

Onde M é a soma das massas do pistão e da massa posicionada. O termo referente à diferença de pressões pode ser calculado por:

$$F_{\Delta P} = P_A A_A - P_B A_B \quad (4.29)$$

Derivando a equação (4.29), é possível então substituir nela as equações (4.27) e (4.26) de modo a obter a equação (4.31), que relaciona a variação da força devido à diferença de pressão em função de x_s e \dot{x} .

$$F_{\Delta P} = \dot{P}_A A_A - \dot{P}_B A_B \Rightarrow \quad (4.30)$$

$$F_{\Delta P} = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0} \left(\frac{A_A}{V_{0A}} + \frac{A_B}{V_{0B}} \right) x_s - \frac{P_0}{2} \left(\frac{A_A^2}{V_{0A}} + \frac{A_B^2}{V_{0B}} \right) \dot{x} \quad (4.31)$$

Para as forças de atrito, é adotado um modelo de atrito viscoso, linear com a velocidade. Desse modo, tem-se:

$$F_{Atrito} = K_3 \dot{x} \quad (4.32)$$

O valor do coeficiente K_3 é difícil de ser determinado. Qi et al (2019 [8]) utiliza coeficientes diferentes para velocidades positivas e negativas, da ordem de 20 Ns/m. Valdiero et al (2011 [9]) utiliza $K_3 = 46,5$. Um modelo criado por Eschmann (1992, apud BEATER, 2007 [1]) resulta em valores de K_3 da ordem de 50 Ns/m para diferença de pressões de 200 kPa e pistões de 0,032m a 0,1m de diâmetro.

Derivando a equação (4.28) e substituindo nela as equações (4.31) e (4.32) resulta na equação (4.33), que junto com a equação (4.9) descrevem o sistema estudado.

$$\ddot{x} = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 M} \left(\frac{A_A}{V_{0A}} + \frac{A_B}{V_{0B}} \right) x_s - \frac{P_0}{2M} \left(\frac{A_A^2}{V_{0A}} + \frac{A_B^2}{V_{0B}} \right) \dot{x} - \frac{K_3}{M} \ddot{x} \quad (4.33)$$

4.3 Sistema completo

Definindo as constantes para auxílio do cálculo:

$$\alpha = \frac{P_0^2 K_2}{2\rho_0 M} \left(\frac{A_A}{V_{0A}} + \frac{A_B}{V_{0B}} \right) \quad (4.34)$$

$$\beta = \frac{P_0}{2M} \left(\frac{A_A^2}{V_{0A}} + \frac{A_B^2}{V_{0B}} \right) \quad (4.35)$$

$$\gamma = \frac{K_3}{M} \quad (4.36)$$

$$\epsilon = 2\zeta_s \omega_{ns} \quad (4.37)$$

$$\lambda = \omega_{ns}^2 \quad (4.38)$$

O sistema dinâmico composto pela válvula e o pistão é totalmente definido pelas equações:

$$\ddot{x} = \alpha x_s - \beta \dot{x} - \gamma \ddot{x} \quad (4.39)$$

$$\ddot{x}_s = -\lambda x_s - \epsilon \dot{x}_s + \lambda u \quad (4.40)$$

Durante o desenvolvimento, o sistema foi linearizado em torno de uma posição de equilíbrio correspondente ao centro do pistão. Considerando que o comprimento útil interno do cilindro é de 0,5 m, deslocamentos acima de 0,25m não seriam possíveis. Limitou-se que movimentos com deslocamentos de mais de 10cm não seriam analisados nas seções subsequentes para manter o sistema próximo das condições de equilíbrio.

Além disso, como tanto a entrada do sistema como a posição do carretel na válvula são sinais normalizados, é incongruente impôr deslocamentos (e referências) acima do valor unitário. Dado que o modelo mecânico de válvula é válido apenas para pequenas amplitudes, restringiu-se x_s para valores menores que 0,5.

Finalmente é importante ressaltar que o sistema real no qual o modelo apresentado é baseado é altamente não linear - destaca-se escoamento não isotérmico, dinâmica do carretel variável em função da referência, zonas mortas, comportamento não-linear da vazão mássica na válvula, atrito seco no cilindro e fenômenos de stick-slip como algumas de suas características. Conseqüentemente, o modelo obtido é simplificado, com objetivo principal de desenvolvimento, análise, e posterior projeto de controlador, e que poderia servir apenas como base para uma implementação de controle do sistema real.

4.3.1 Parâmetros do sistema

Na Tabela 1, estão listados os parâmetros utilizados para a modelagem da planta, que foram adotados seguindo a bibliografia do trabalho.

Tabela 1: Parâmetros do Sistema

Parâmetro	Símbolo	Valor
Pressão do reservatório	P_0	600 kPa
Massa do pistão e movida	M	5 kg
Área transversal interna do compartimento A	A_A	$1,256 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Área transversal interna do compartimento B	A_B	$1,178 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Volume inicial do compartimento A	V_{0A}	$3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
Volume inicial do compartimento B	V_{0B}	$2,945 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
Densidade do gás no compartimento	ρ_0	$7,107 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de atrito viscoso no pistão	K_3	50 N s/m
Frequência natural do carretel	ω_{ns}	760 rad/s
Fator de amortecimento do carretel	ζ_s	0,47
Diâmetro interno do cilindro	D	$40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Diâmetro do eixo preso ao pistão (B)	d	$10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Comprimento útil interno do cilindro	L	0,5 m
Temperatura do ar no reservatório (referência)	T_0	295,15 K
Coefficiente de gás do ar	R	288 J/kgK
Coefficiente alpha	α	$2,026 \cdot 10^3$
Coefficiente beta	β	$5,843 \cdot 10^2$
Coefficiente gamma	γ	10
Coefficiente epsilon	ϵ	$7,144 \cdot 10^2$
Coefficiente lambda	λ	$5,776 \cdot 10^5$

Fonte: Elaboração própria

As relações auxiliares utilizadas para algumas das constantes definidas acima estão

apresentadas nas equações 4.41 a 4.45.

$$A_A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (4.41)$$

$$A_B = A_A - \frac{\pi D^2}{4} \quad (4.42)$$

$$V_{0A} = A_A L/2 \quad (4.43)$$

$$V_{0B} = A_B L/2 \quad (4.44)$$

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} \quad (4.45)$$

4.3.2 Espaço de estados

Definindo o vetor de estados como:

$$\mathbf{X} = [x_s, \dot{x}_s, x, \dot{x}, \ddot{x}]^T \quad (4.46)$$

E sua derivada:

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x}_s, \ddot{x}_s, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}]^T \quad (4.47)$$

Pode-se representar o sistema na forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u \quad (4.48)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}u \quad (4.49)$$

Onde as matrizes representativas do sistema são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{D} = 0 \quad (4.51)$$

Para a saída escalar $\mathbf{Y} = x$, posição da massa.

Substituindo as constantes pelo seus valores, que foram apresentados na Tabela 1, obtém-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5,78 \cdot 10^5 & -7,10 \cdot 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2,03 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -5,80 \cdot 10^2 & -10,0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,78 \cdot 10^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

4.3.3 Função de transferência

Para encontrar a função de transferência do sistema, inicialmente aplica-se a transformada de Laplace com condições iniciais nulas nas equações (4.39) e (4.40) resultando em:

$$s^3 X = \alpha X_s - \beta s X - \gamma s^2 X \quad (4.53)$$

$$s^2 X_s = -\lambda X_s - \epsilon s X_s + \lambda U \quad (4.54)$$

Isolando X_s da equação (4.54), substituindo em (4.53), e manipulando, encontra-se então a função de transferência do sistema, com a entrada sendo uma posição de referência normalizada, e a saída sendo a posição da massa M:

$$\frac{X}{U} = \frac{\alpha \lambda}{s(s^2 + \gamma s + \beta)(s^2 + \epsilon s + \lambda)} \quad (4.55)$$

Observando a função de transferência da equação (4.55), destaca-se que o sistema pode ser identificado como dois sistemas de segunda ordem e um integrador em série .

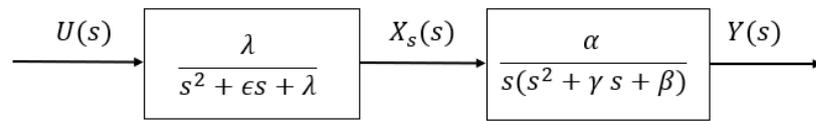
4.3.4 Diagrama de blocos

Outra forma de representação da dinâmica de um sistema amplamente utilizada na literatura são os diagramas de blocos. Tal representação gráfica, no domínio do tempo, explicita de modo claro as relações entre as variáveis de estado.

No domínio da frequência, ressalta a integração entre vários subsistemas, cada um com sua função de transferência, e é extremamente útil na área de controle devido à simplicidade de retratar sistemas de malha fechada e diferentes posicionamentos de controladores, sensores, e fluxo de sinais.

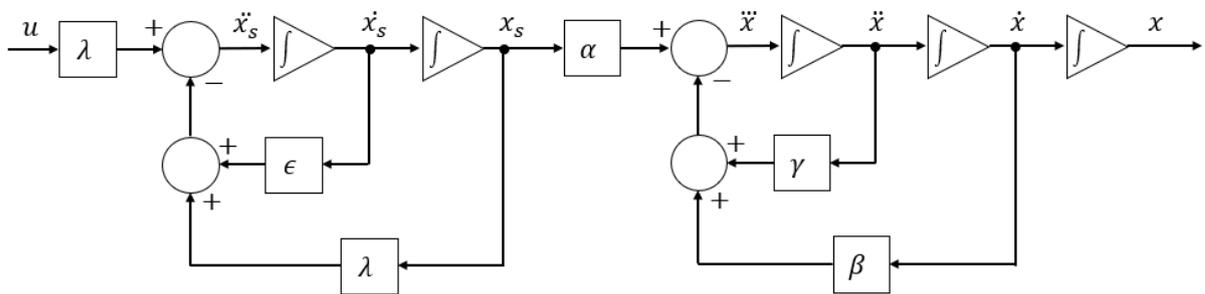
Os diagramas de blocos, na frequência e no tempo, estão apresentados nas figuras 5 a 6, respectivamente.

Figura 5: Diagrama de blocos - domínio da frequência



Fonte: Autoria própria

Figura 6: Diagrama de blocos - domínio do tempo



Fonte: Autoria própria

5 ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

5.1 Análise de estabilidade

5.1.1 Critério de Routh-Hurwitz

Substituindo os parâmetros apresentados na Tabela 1 na função de transferência apresentada na Equação 4.55, obtém-se a equação característica do sistema no denominador:

$$\frac{1,17 \cdot 10^9}{s^5 + 724,4s^4 + 5,853 \cdot 10^5s^3 + 6,193 \cdot 10^6s^2 + 3,375 \cdot 10^8s} \quad (5.1)$$

Analisando-a, existem apenas coeficientes positivos, indicando que o sistema pode ser estável. Para verificar a hipótese de estabilidade do sistema, aplica-se o critério de Routh-Hurwitz conforme apresentado na Tabela 2. É evidente que há um polo em $s = 0$, de modo que a equação analisada na tabela é a (5.1) dividida por s .

Tabela 2: Tabela de Routh-Hurwitz

s^4	1	$5,853 \cdot 10^5$	$3,375 \cdot 10^8$
s^3	724,4	$6,193 \cdot 10^4$	
s^2	$4,998 \cdot 10^4$	$3,375 \cdot 10^8$	
s^1	$1,301 \cdot 10^6$	0	
s^0	$3,375 \cdot 10^8$		

Fonte: Autoria própria

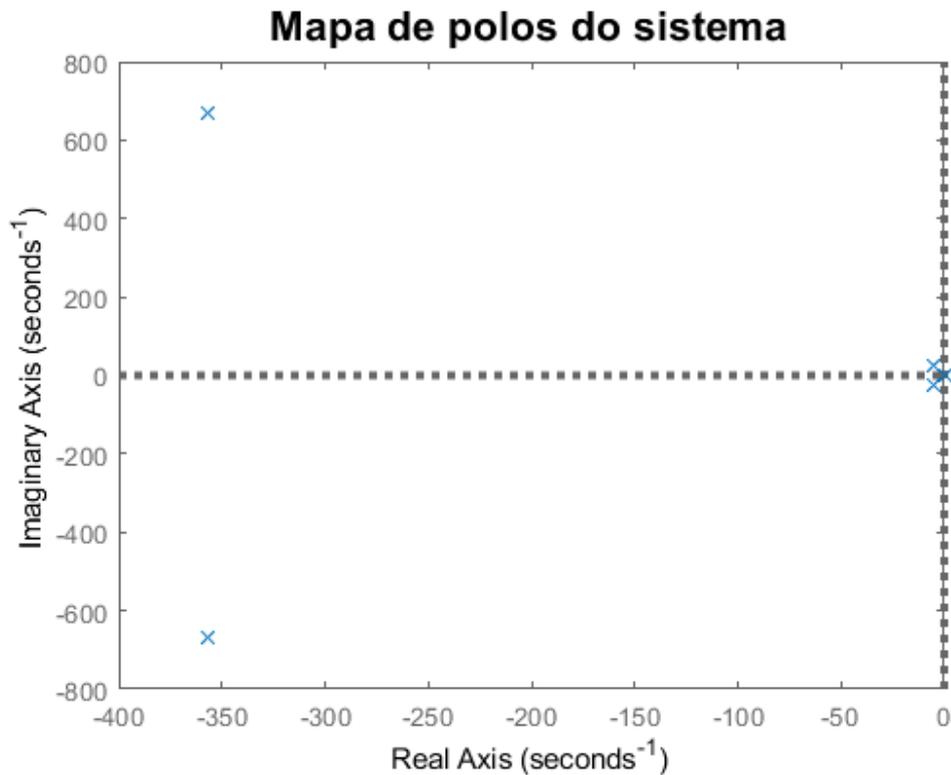
Como não existem elementos negativos na primeira coluna e existe um polo na origem, conclui-se que o sistema é marginalmente estável.

5.1.2 Análise dos pólos

Os pólos correspondem a valores da frequência complexa s para os quais a função de transferência tende a infinito, e podem ser determinados encontrando as raízes da equação característica do sistema ou os autovalores da matriz \mathbf{A} do sistema. Para avaliação da estabilidade do sistema, inicialmente foi traçado o mapa de polos e zeros, mostrado na

Figura 7. Nele, pode-se observar que não há pólos no semiplano direito, correspondente à um sistema estável. Além disso, o sistema não possui zeros no semiplano positivo, sendo de fase mínima.

Figura 7: Mapa de polos e zeros



Fonte: Autoria própria

Os valores dos polos são:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -357,2 + 670,8j$$

$$s_3 = -357,2 - 670,8j$$

$$s_4 = -5 + 23,65j$$

$$s_5 = -5 - 23,65j$$

Não havendo polos com parte real positiva e verificando a presença de um polo nulo, pode-se afirmar que o sistema é marginalmente estável, confirmando o resultado obtido pelo método de Routh-Hurwitz.

5.2 Dinâmica do sistema de segunda ordem reduzido

Como explicitado no desenvolvimento matemático e verificado ao identificar seus polos, o sistema em questão é de quinta ordem, com dois pares de polos complexos conjugados e um na origem.

O cálculo das características da resposta dinâmica de um sistema de ordem elevada é complexo, e nesses casos lança-se mão de algoritmos de integração numérica para prevê-las e possivelmente para o projeto de um controlador.

No entanto, se o sistema possuir um par de polos dominantes, sua resposta pode ser aproximada, com certo grau de exatidão, para a resposta de um sistema de segunda ordem, cujas relações entre localização dos polos ou coeficientes da função de transferência e parâmetros de sua resposta são conhecidos e prontamente calculáveis.

Tomando os polos do sistema, nota-se que a constante de tempo σ ou $\zeta\omega_n$ do sistema da válvula é mais de 50 vezes menor que a constante do movimento do pistão, de modo que o movimento do segundo é muito mais lento e influente na resposta completa. Assim os polos dominantes são:

$$s_{d1} = -5 + 23,65j$$

$$s_{d2} = -5 - 23,65j$$

É evidente que há também o polo na origem. Para que a análise do sistema de segunda ordem reduzido possa ser realizada, define-se que a entrada do sistema original a ser comparada será um impulso, cuja representação da resposta no domínio da frequência é a própria função de transferência. Assim, uma entrada degrau para o sistema reduzido (representada por uma divisão por s) é matematicamente equivalente à uma entrada impulso para o sistema original com polos dominantes e polo na origem.

Partindo dos polos dominantes, é imediato que a frequência de oscilação amortecida do sistema é $\omega_d = 23,65rad/s$ e que a constante de tempo é $\sigma = 5s^{-1}$.

Partindo de tais valores, é possível calcular a frequência natural de oscilação ω_n , o fator de amortecimento ζ , o tempo de acomodação (para intervalo de 2%) t_s , o tempo de pico t_p e o sobressinal M_r da resposta (para entrada degrau), dados pelas equações (5.2)

e (5.6):

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2} = 24,17 \text{ rad/s} \quad (5.2)$$

$$\zeta = \sigma/\omega_n = 0,207 \quad (5.3)$$

$$t_s = 4/\zeta\omega_n = 0,8 \text{ s} \quad (5.4)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0,13 \text{ s} \quad (5.5)$$

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 51,4\% \quad (5.6)$$

Finalmente, para entrada impulso, é possível determinar analiticamente o valor de regime permanente da posição através do Teorema do Valor Final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5.7)$$

Para a função de transferência do sistema têm-se então:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1,17 \cdot 10^9}{s^4 + 724,4s^3 + 5,853 \cdot 10^5 s^2 + 6,193 \cdot 10^6 s + 3,375 \cdot 10^8} = 3,32 \text{ m} \quad (5.8)$$

Este valor é final que o sistema é levado ao ser excitado por uma entrada impulso unitário. Como tal valor de posição extrapola não só o limite de pequenas oscilações adotado como também as próprias dimensões físicas do cilindro, será utilizado em seção posterior a resposta ao impulso dividida por um fator corretivo (equivalente à dividir a própria entrada impulso, devido à linearidade).

5.3 Resposta em frequência

Para avaliar a resposta em frequência do sistema, pode-se analisar sua função de transferência, dada pela equação (4.55). Ela pode ser reescrita na forma de Bode, utilizando $s = \omega j$, segundo a equação abaixo:

$$G(\omega j) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\omega j} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + \epsilon \frac{\omega}{\lambda} j\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + \gamma \frac{\omega}{\beta} j\right)} \quad (5.9)$$

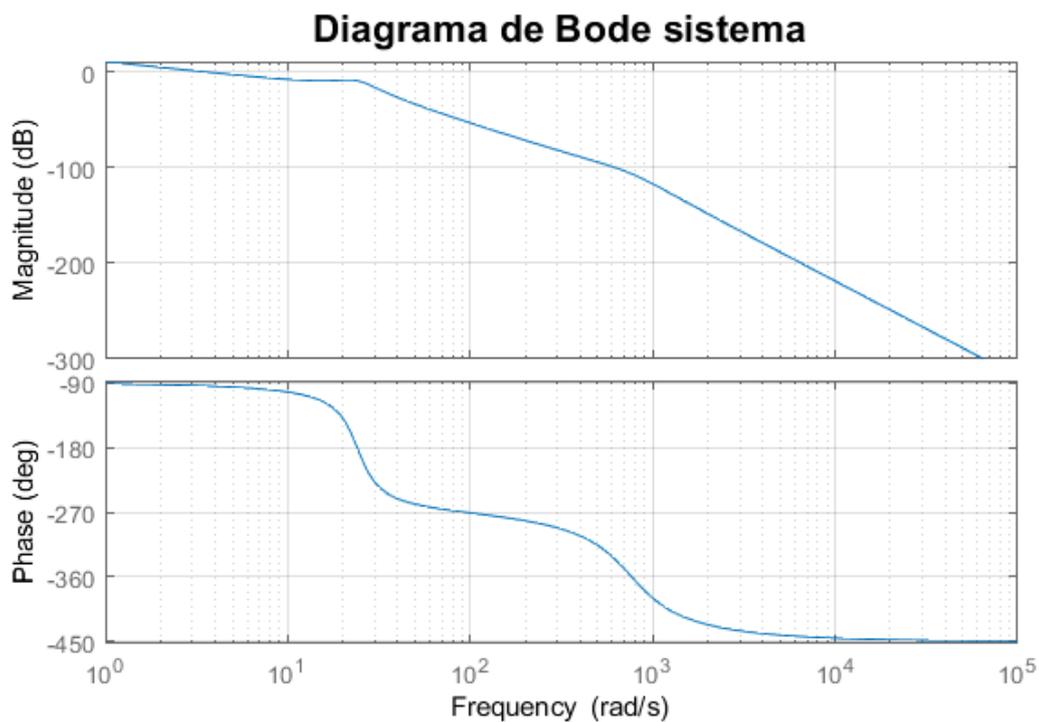
Cada termo da função de transferência representada acima contribui para o comportamento dinâmico do sistema e conseqüentemente no diagrama de Bode, em magnitude e em frequência. A análise termo a termo da função de transferência para a resposta em frequência está disponível no Apêndice A.

Como o comportamento do sistema é a superposição das assíntotas de cada um dos termos analisados, conclui-se que das frequências mais baixas até 24,27 rad/s, a magnitude cai 20dB por década, passando por 10,8 dB quando $\omega = 1\text{rad/s}$. A fase se inicia em -90° e diminui para -270° para frequências maiores que 24,27rad/s.

A partir dessa frequência, o ganho cai 60 dB por década e a fase se mantém. Em $\omega = 567,8\text{rad/s}$ a magnitude passa por mais um pico (em relação ao valor já acumulado dos outros termos) e a partir da frequência de 760 rad/s, a magnitude cai 100 dB por década e a fase diminui mais 180° , se aproximando assintoticamente -450° .

Para confirmar a resposta em frequência estimada e as características do sistema, foi gerado numericamente o diagrama de Bode, apresentado na Figura 8.

Figura 8: Diagrama de Bode - Malha Aberta



Fonte: Autoria própria

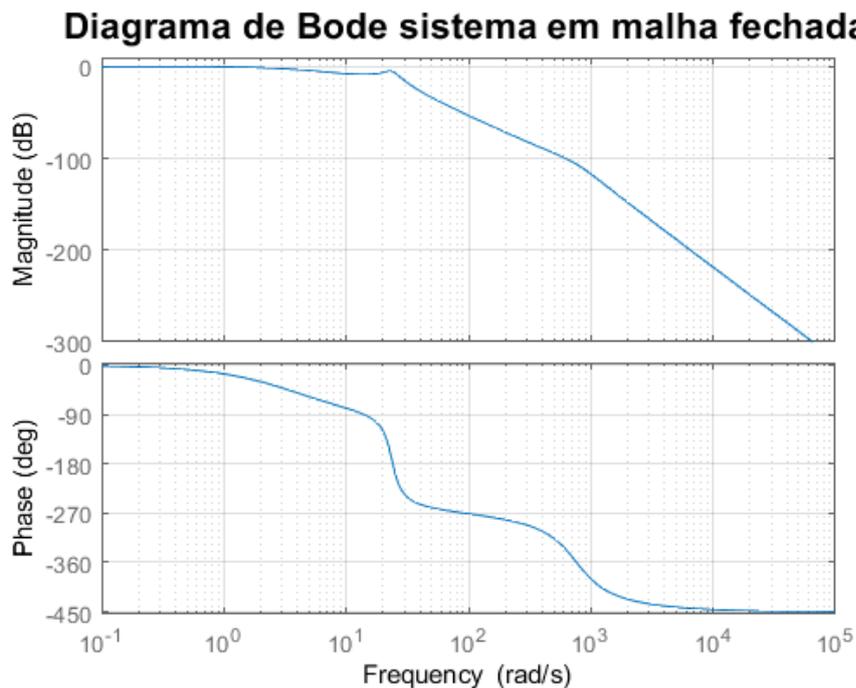
A observação do diagrama corrobora a análise termo a termo realizada no Apêndice A. Pode-se afirmar que o gráfico de Bode mostra de maneira clara as faixas de frequência influenciadas por cada termo da equação (5.9), iniciando a curva de magnitude (da esquerda para a direita) com inclinação de 20 dB por década até 24,27 rad/s, depois com inclinação de 60 dB por década até 760 rad/s, e finalmente com queda de 100 dB por década.

O mesmo pode ser dito para a curva de frequência, que se inicia a -90° , e possui dois degraus onde diminui 180° cada, finalizando a -450° para frequências muito superiores a 760 rad/s .

Nota-se finalmente que a presença de uma inclinação de -20 dB por década no trecho até $24,27 \text{ rad/s}$ de certo modo atenua o pico de ressonância, que se mostra semelhante a um patamar, e a inclinação antes de 760 rad/s , aliada aos efeitos da própria escala logarítmica, totalmente oculta a presença de um pico em $567,8 \text{ rad/s}$. Além disso, as diferenças nos fatores de amortecimentos dos dois pares de pólos pode ser claramente observada pela diferença na inclinação das transições para -180° em volta das frequências naturais, apresentando-se mais íngreme para fatores menores.

Outra análise que pode ser feita através do diagrama de Bode é sua largura de banda, que é definida pela faixa de frequências em que o sistema em malha fechada é capaz de seguir um sinal de forma eficaz. Kuo (1982 [10]) afirma que a frequência de corte ω_b de um sistema em malha fechada, que delimita a largura de banda, ocorre quando o ganho é 3 dB menor que o ganho na frequência 0. Desse modo fechou-se a malha com uma alimentação direta e unitária, através do comando *feedback* do *MATLAB*, e traçou-se novamente o diagrama de Bode, mostrado na Figura 9, que indica a largura de banda $0 \leq \omega \leq 3,8 \text{ rad/s}$.

Figura 9: Diagrama de Bode - Malha Fechada



Fonte: Autoria própria

5.4 Resposta no tempo

5.4.1 Matriz de Transição

Para a obtenção da resposta temporal do sistema a uma determinada entrada, pode-se optar pelo método das matrizes de transição e de convolução. Embora essas sejam possíveis de serem determinadas de maneira analítica, determinando as funções temporais de resposta, essa abordagem é especialmente interessante pela possibilidade de uso de métodos numéricos para a obtenção da solução, de forma a aproveitar o poder computacional para evitar problemas analíticos complexos e demandantes em termos de tempo.

Definindo-se a matriz de transição de estados como $\Phi(t) = e^{At}$, tem-se:

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (5.10)$$

E sendo $\Phi(s)$ a matriz resolvente:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}; \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (5.11)$$

Analicamente, obtém-se a resposta do sistema:

$$y = C \left[\Phi(t) \cdot x_0 + \int_0^{\Delta t} \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot u \cdot d\tau \right] + D \cdot u \quad (5.12)$$

Para obtenção da solução numérica utilizando a matriz de transição, utiliza-se a definição de exponencial de matriz e expande-se a integral na forma de uma somatória, considerando $u = cte$ no intervalo $\Delta t = t - 0$, por meio da expansão de série de Taylor:

$$\int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot u \cdot d\tau \approx \Gamma(\Delta t) \cdot B \cdot u \quad (5.13)$$

Dessa forma, temos:

$$\Gamma(\Delta t) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!} \quad (5.14)$$

Assim, é possível utilizar o conceito matriz de transição de estados para resolver o espaço de estados no domínio do tempo, da seguinte maneira:

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{k!} \right) x_0 + \left(\Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!} \right) \cdot B \cdot u \quad (5.15)$$

$$y(t) = C \left[\left(\sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{k!} \right) x_0 + \left(\Delta t \cdot \sum_{k=0}^{n=1} \frac{A^k t^k}{(k+1)!} \right) \cdot B \cdot u \right] + D \cdot u \quad (5.16)$$

Para o sistema da válvula pneumática em estudo, as matrizes de transição Φ e a matriz do termo forçante Γ são:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,7796 & 0,0006 & 0 & 0 & 0 \\ -374,5739 & 0,3164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0010 & 0 \\ 0,0010 & 0 & 0 & 0,9997 & 0,0010 \\ 1,8561 & 0,0008 & 0 & -0,5814 & 0,9898 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,9209 & 0,0004 & 0 & 0 & 0 \\ -220,3896 & 0,6493 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0005 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0 & 0,9999 & 0,0005 \\ 0,9680 & 0,0003 & 0 & -0,2912 & 0,9949 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

5.4.2 Resposta ao impulso

O primeiro comportamento analisado foi a resposta ao impulso. Na Figura 10, está mostrada a resposta temporal da posição da massa a uma fração de $\frac{1}{60}$ de um impulso unitário na abertura da válvula solenoide.

Figura 10: Resposta da posição da massa a um impulso



Fonte: Autoria própria

Tal impulso na válvula tira rapidamente o carretel da posição de equilíbrio, de modo que ar pressurizado entra no compartimento A do cilindro. Em cerca de 4 constantes de tempo do sistema do carretel (aproximadamente 11 milissegundos), o carretel já retornou à origem e não há mais escoamento de ar para dentro do cilindro, no entanto, ainda há uma diferença de pressão entre os compartimentos, que acelera o pistão no sentido negativo de seu gradiente.

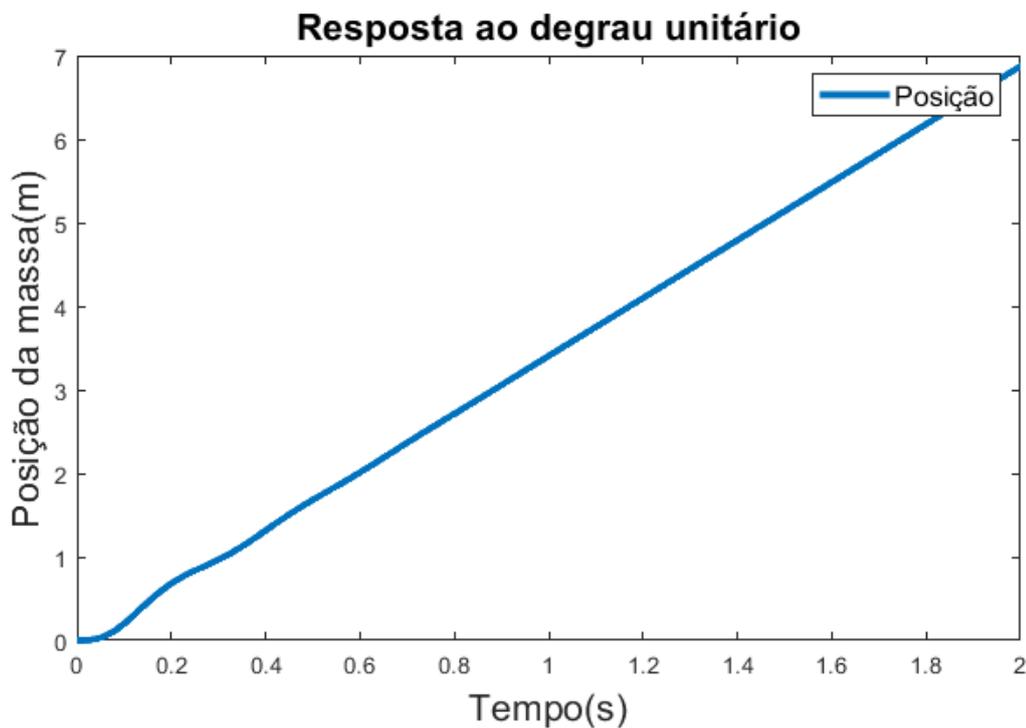
Quando as pressões de ambos os cilindros se igualam, o cilindro ainda possui energia cinética, de modo que ocorre um sobressinal de aproximadamente 51,5%. O ar, como gás compressível, age como uma mola, causando oscilações no pistão, que dissipa sua energia pelo atrito viscoso com as paredes internas do cilindro, até atingir 98% de seu movimento em aproximadamente 0,71 s.

A posição final do pistão, em regime permanente, é de 0,0578 m. As características de sobressinal e tempo de acomodação simuladas do sistema correspondem com exatidão às calculadas na seção 5.2, e a posição em regime permanente, à 1 sessenta avos da calculada. Conclui-se que a aproximação do sistema de quinta ordem para um de segunda e um integrador é válida, mantendo a exatidão dos resultados com 4 algarismos significativos.

5.4.3 Resposta ao degrau

A condição analisada na Figura 11 foi a resposta a uma entrada degrau unitária, correspondente à uma admissão constante de ar no compartimento A e expulsão do ar em B, após o regime transitório. Essa situação rapidamente extrapola os limites do modelo físico adotado, já que o modelo não contempla o limite físico real do atuador, não sendo representativo para esse tipo de entrada.

Figura 11: Resposta da posição da massa a um degrau



Fonte: Autoria própria

Para contemplar uma situação mais próxima ao comportamento real do atuador sujeito a uma admissão constante de ar no compartimento A, foi desenvolvida a simulação do modelo não-linear do atuador. Essa simulação é necessária devido a entrada degrau gerar uma resposta que extrapola a hipótese simplificadora de pequenas oscilações, fundamental para a linearização do problema. Destaca-se, no entanto, que será feito somente o estudo não linear para a equação que rege o pistão, já que a hipótese de pequenas oscilações na válvula de três vias continua valendo.

Desse modo, foi utilizada a equação 4.18 e sua análoga para o compartimento B, obtendo-se o seguinte vetor de estado do modelos não linear e sua derivada:

$$\mathbf{X} = [x, \dot{x}, \ddot{x}, x_s, \dot{x}_s, P_A, P_B]^T \quad (5.19)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \frac{1}{M}(\dot{F}_{\Delta P} - K_3\dot{x}) \\ \dot{x}_s \\ -\lambda x_s - \epsilon\dot{x}_s + \lambda u \\ \dot{P}_A \\ \dot{P}_B \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Onde:

$$\dot{P}_A = \frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A P_0 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0A} + A_A x)} - \frac{P_A A_A \dot{x}}{V_{0A} + A_A x} \quad (5.21)$$

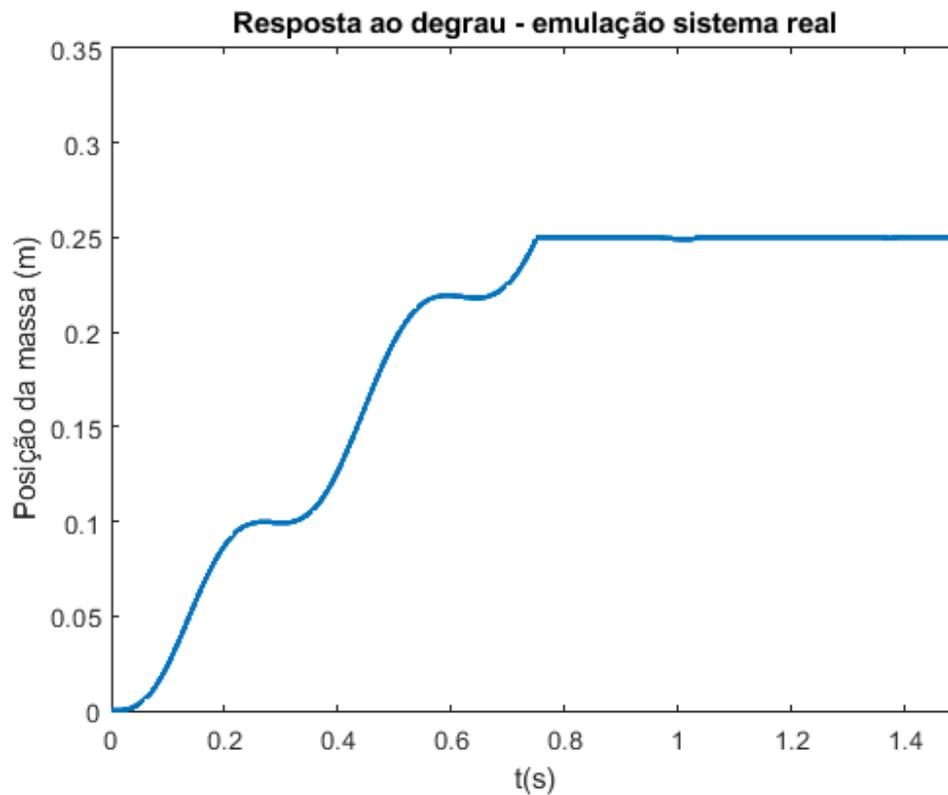
$$\dot{P}_B = -\frac{P_0^2 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0B} + A_B x)} + \frac{P_B P_0 K_2 x_s}{\rho_0 (V_{0B} + A_B x)} + \frac{P_B A_B \dot{x}}{V_{0B} + A_B x} \quad (5.22)$$

$$\dot{F}_{\Delta P} = \dot{P}_A A_A - \dot{P}_B A_B \quad (5.23)$$

De posse dessas equações, foi implementado o método de Runge-Kutta de 4^a ordem, com passo $h = 0,001$, restringindo a variável x ao valor máximo de $0,25m$, que é a posição correspondente ao atuador completamente estendido. Dessa maneira, também foi feita a hipótese simplificadora de que o choque entre o êmbolo e a parede do atuador é completamente inelástico.

O sistema não linear simulado com condições iniciais $x_0 = [0, 0, 0, 0, 0, P_0/2, P_0/2]^T$, e degrau de 10% na abertura da válvula de três vias resultou na resposta mostrada na Figura 12. Verifica-se que o êmbolo atinge o batente após $0,75s$ e também que o comportamento oscilatório foi mais acentuado no caso não linear em comparação com o modelo linear da Figura 11.

Figura 12: Emulação da condição real de resposta ao degrau



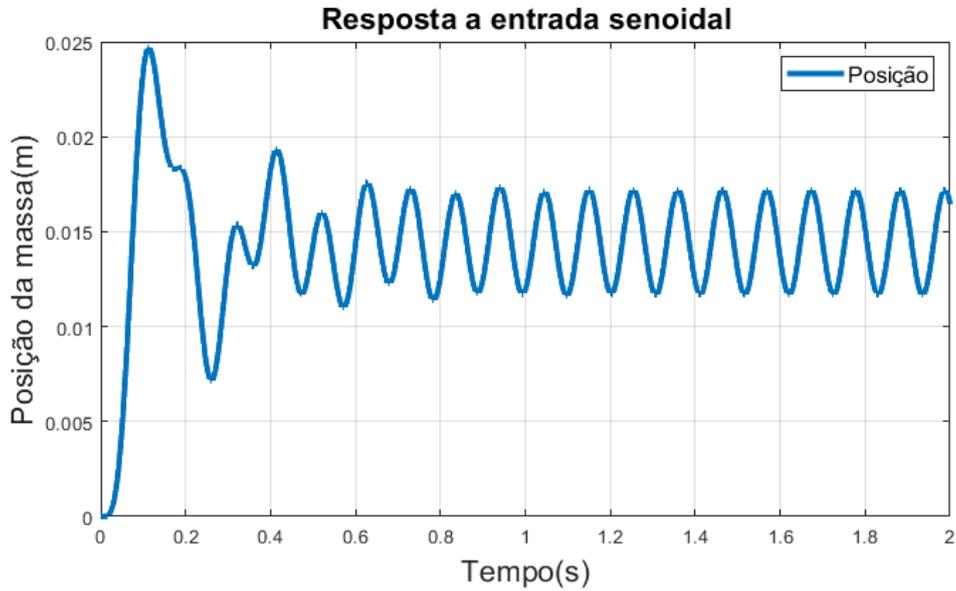
Fonte: Autoria própria

5.4.4 Resposta à entrada senoidal

Outras entradas analisadas foram senoides de frequência 30rad/s e 60 rad/s, entre os dois picos de ressonância do sistema. A simulação foi realizada para avaliar o comportamento do sistema a uma entrada oscilatória, e sua relação com o diagrama de Bode apresentado. A resposta para a entrada senoidal com frequência de 60 rad/s e deslocamento máximo de 25% do carretel está mostrado na Figura 13.

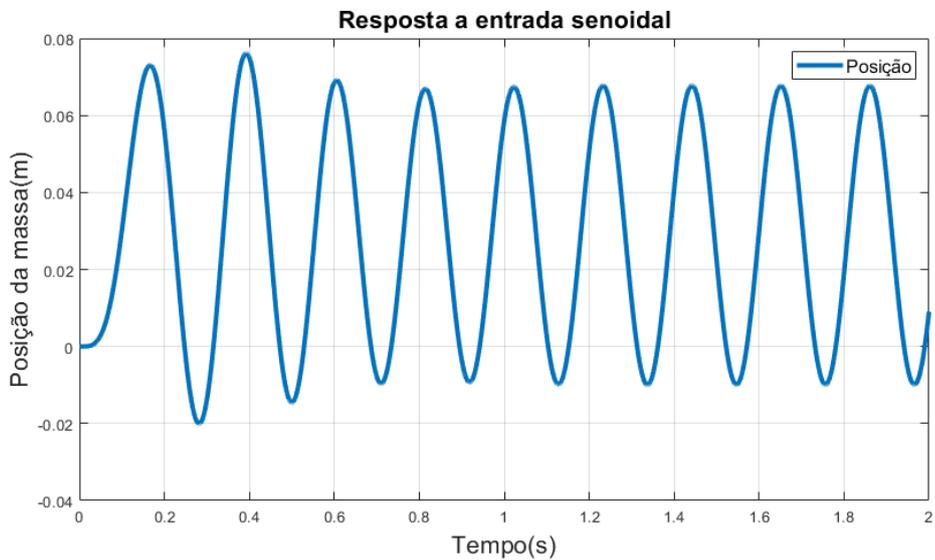
O comportamento para o mesmo deslocamento de carretel de 25% porém frequência de oscilação de 30 Hz é mostrado na figura 14.

Figura 13: Resposta da posição da massa a uma senóide de 60Hz



Fonte: Autoria própria

Figura 14: Resposta da posição da massa a uma senóide de 30Hz



Fonte: Autoria própria

A análise da resposta a senoide mostra novamente uma nova posição de equilíbrio condicionada pela admissão de ar. Além disso, atesta-se que em regime permanente, o sistema oscila com a mesma frequência da entrada, porém com amplitude diferente e defasagem.

Na Figura 13, após o regime transitório, é possível determinar que a amplitude da os-

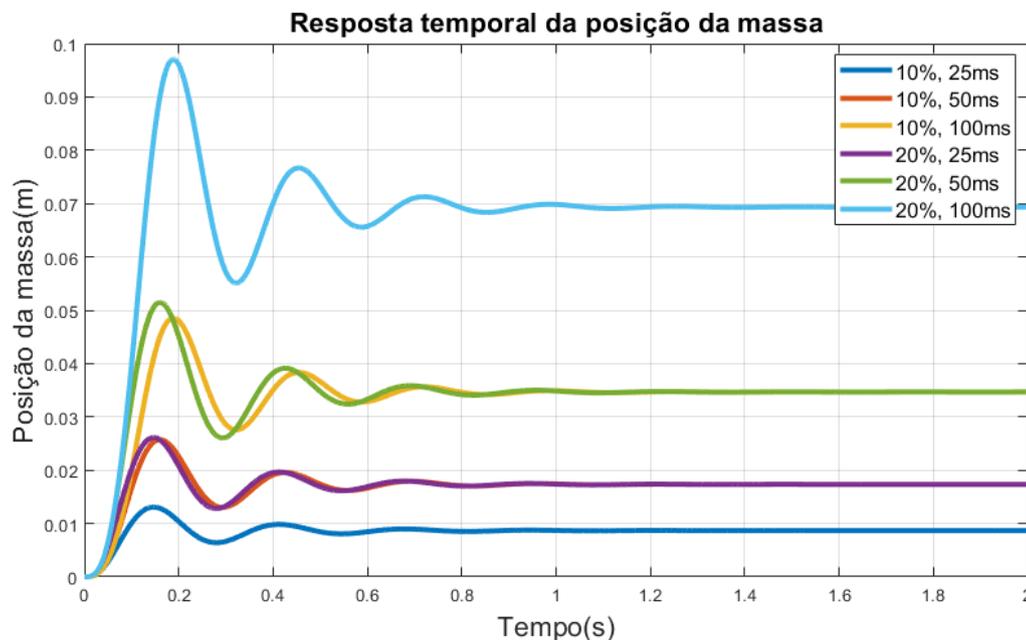
cilação é de aproximadamente 0,0055 m, enquanto na Figura 14 ela é de aproximadamente 0,0775 m. Comparando com a amplitude de oscilação da referência, de 0,5, encontra-se um ganho de 0.011 e 0.155, ou em decibéis, -39dB e -16dB, respectivamente. Conferindo o gráfico de Bode, Figura 8, observa-se que tais magnitudes de fato correspondem às frequências de 60 e 30 rad/s.

Outro fenômeno interessante é o fato e que o pistão não oscila em torno da sua origem, mas sim ao redor de um ponto deslocado positivamente no cilindro. Isso se deve ao transitório do movimento da válvula, que enquanto não atinge regime permanente acumula ar a mais no compartimento A e conseqüentemente desloca o ponto de oscilação do pistão.

5.4.5 Análise de combinações de intensidade e duração de pulsos

Por fim, foi estudado o comportamento do sistema para pulsos de diferentes durações e amplitudes, isso pode-se considerado um caso comum no sistema físico, onde por um certo período de tempo a posição de referência do carretel muda, possibilitando o escoamento e a movimentação do pistão.

Figura 15: Posição da massa em para diversas razões e tempo de abertura da válvula



Fonte: Autoria própria

Foram testados três períodos de pulso : 25ms, 50 ms, e 100 ms, e três sinais de entrada (referências para o carretel).

O comportamento do sistema é muito semelhante ao observado para o impulso, tendo em vista que o segundo é um caso limite do primeiro, quando o período tende a zero e a entrada a infinito.

Tal simulação destaca mais uma característica dos sistemas lineares, de que sua resposta é uma convolução do sinal de entrada, sendo esta convolução uma integral que, em última análise, mede a área embaixo de uma curva. Desse modo, situações em que o produto entre a entrada e período eram iguais apresentaram resposta em regime permanente igual.

Uma explicação física para tal resultado seria que pela válvula ser linear e desacoplada do cilindro, o produto da entrada (e desse modo vazão mássica) e o período resultam sempre em uma mesma massa de ar transferida para o compartimento, que resulta então na mesma posição do cilindro uma vez em regime permanente.

6 CONCLUSÕES

Para correta modelagem do sistema foram necessárias duas abordagens distintas sobre cada um dos componentes presentes, uma pneumática e uma mecânica. Além disso, dada a não-linearidade da parcela pneumática, foi fundamental estudar o sistema somente para pequenas oscilações em torno do equilíbrio, tanto para o pistão quanto para a válvula, resultando em um problema de 5^a ordem.

Da perspectiva das respostas do sistema, a resposta em frequência ratifica os polos encontrados, apresentando de forma bem clara os três diferentes níveis de decaimento, tanto para a análise de fase quanto para a de magnitude.

Já a resposta no tempo apresentou resultados condizentes com o que era esperado para o comportamento do sistema, destacando a mudança na posição de equilíbrio causada pela entrada impulso. Ademais, um ponto positivo a ser ressaltado para os resultados é a concordância entre as respostas para o domínio do tempo e a resolução analítica do sistema. Tal constatação é possível pela comparação entre a análise matemática do diagrama de Bode e a resposta para o sistema de uma entrada do tipo impulso, obtendo equivalência em parâmetros como o tempo de acomodação e o sobressinal encontrados.

Por fim, reforça-se que o modelo linear desenvolvido não foi suficiente para ilustrar o comportamento do sistema a uma entrada degrau. Dessa forma, para avaliar a resposta do conjunto a essa entrada foi necessário simular o modelo antes da linearização e associá-lo a um limitador de valor para a posição do pistão, que emula um batente real.

REFERÊNCIAS

- 1 BEATER, P. *Pneumatic Drives*. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 9783540694700.
- 2 ZISSER, E. Position Control of a Pneumatic Actuation System By Position Control of a Pneumatic Actuation System. n. February, 2013.
- 3 FLEURY, A. d. T. *Sistemas Pneumaticos e Hidraulicos na Automacao*. 44 p. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pme2371/ControledeSistemasHidraulicosFleury1.pdf>>.
- 4 NAJJARI, B. et al. Position control of an electro-pneumatic system based on PWM technique and FLC. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 647–657, 2014. ISSN 00190578. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2013.12.023>>.
- 5 KAWAKAMI, Y.; AKAO, J.; KAWAI, S. Some considerations on the high-speed driving of pneumatic cylinders. *Journal of Fluid Control*, 1988.
- 6 HILDEBRANDT, A.; NEUMANN, R.; SAWODNY, O. Optimal system design of SISO-servopneumatic positioning drives. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 18, n. 1, p. 35–44, 2010. ISSN 10636536.
- 7 AL-IBRAHIM, A. M. *Transient air temperature and pressure measurements during the charging and discharging processes of an actuating pneumatic cylinder*. [S.l.: s.n.], 1991.
- 8 QI, H.; BONE, G. M.; ZHANG, Y. Position Control of Pneumatic Actuators Using Three-Mode Discrete-Valued Model Predictive Control. *Actuators*, v. 8, n. 3, p. 56, 2019. ISSN 2076-0825.
- 9 VALDIERO, A. C. et al. Nonlinear mathematical modeling in pneumatic servo position applications. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2011, 2011. ISSN 15635147.
- 10 KUO, B. *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall, 1982. ISBN 9780130548177. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=s89SAAAAMAAJ>>.

APÊNDICE A – ANÁLISE TERMO A TERMO - BODE

- Primeiro termo - Constante de Bode, com valor de 3,4676. Determina o ganho de "corrente contínua" do sistema, que no diagrama é $20\log(|3,4676|) = 10,8$. Como a constante é positiva, a fase não é alterada (horizontal em zero).
- Segundo termo - Um polo único na origem resulta em um decaimento de 20dB por década, com a curva cruzando o ganho de corrente contínua para a frequência de 1 rad/s. A divisão por j resulta na rotação em -90 graus de um número complexo, de modo que a fase seja de -90° .
- Terceiro termo - Termo de segunda ordem, correspondente à um par de polos complexos conjugados com frequência natural de $\sqrt{\lambda} = 760\text{rad/s}$ e fator de amortecimento de $760\epsilon/(2\lambda) = 0,47$. Antes da frequência natural, o ganho e a frequência não se alteram. Para frequências maiores que a natural, o ganho decai 40dB por década e a fase diminui 180 graus. Como o fator de amortecimento é menor que 0,707, há um pico de ressonância em $\omega_{r1} = 760\sqrt{1 - 2 \cdot 0,47^2} = 567,8\text{rad/s}$. O aumento de ganho no pico é de $M_{r1} = -20\log(2 \cdot 0,47\sqrt{1 - 0,47^2}) = 1,62\text{dB}$.
- Quarto termo - Termo de segunda ordem, correspondente à um par de polos complexos conjugados com frequência natural de $\sqrt{\beta} = 24,2\text{rad/s}$ e fator de amortecimento de $24,2\gamma/(2\beta) = 0,21$. Antes da frequência natural, o ganho e a frequência não se alteram. Para frequências maiores que a natural, o ganho decai 40dB por década e a fase diminui 180 graus. Da mesma maneira do termo anterior há um pico de ressonância em $\omega_{r2} = 24,2\sqrt{1 - 2 \cdot 0,21^2} = 23,2\text{rad/s}$ e o aumento de ganho no pico é de $M_{r2} = -20\log(2 \cdot 0,21\sqrt{1 - 0,21^2}) = 7,85\text{dB}$.