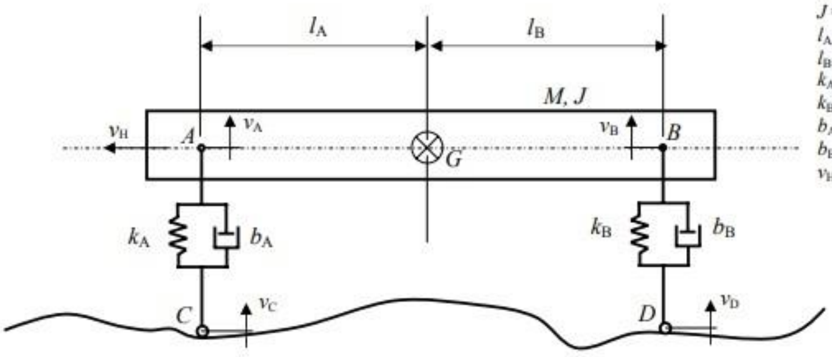
Escola Politécnica da USP

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury e Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Aluno: Guilherme Müller da Silva – NºUSP: 935.1008

Problema físico:



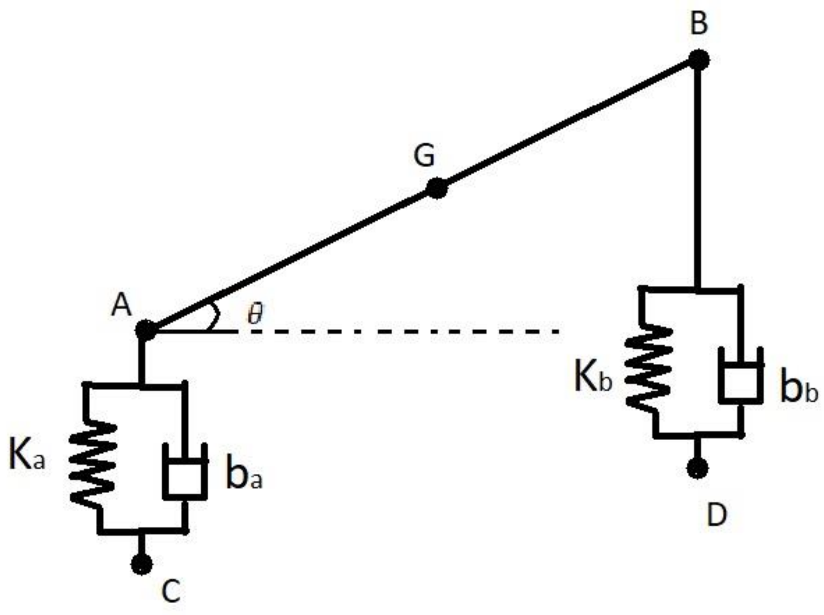
$M = 200$ kg;
$J = 512$ kgm^2;
$l_A = 0{,}8$ m;
$l_B = 0{,}8$ m;
$k_A = 10.000$ N/m;
$k_B = 10.000$ N/m;
$b_A = 200$ Ns/m;
$b_B = 200$ Ns/m;
$v_H = 10$ m/s;

Modelo da dinâmica vertical:
A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de G (v_H) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:
- velocidade vertical v_G do centro de massa G.
- velocidade angular ω de AB em torno de G.
- elongação x_A da mola de rigidez k_A.
- elongação x_B da mola de rigidez k_B.

Entradas: velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos C e D.
Saídas: velocidade vertical v_G do centro de massa G e velocidade angular ω de AB em torno de G.

Hipóteses simplificadoras:
- Movimento apenas no plano da página.
- AC e BD permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que $sen\alpha \cong tan\alpha \cong \alpha$ e $cos\alpha \cong 1$).

Problema esquematizado:



Determinação das interdependências das posições:

$$X_a = X_G - l_A * \theta \Rightarrow V_a = V_G - l_A * w + V_C \ (Eq. 1)$$

Analogamente:

$$X_b = X_G + l_B * \theta \Rightarrow V_b = V_G + l_B * w + V_D \ (Eq. 2)$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{a}} = Q_e \ (Eq. 3)$$

$$L = T - V \ (Eq. 4)$$

Equações da função de Raylegh, energia potencial e energia cinética, respectivamente:

$$R = b_a * \frac{\dot{X_a}^2}{2} + b_b * \frac{\dot{X_b}^2}{2} \ (Eq. 5)$$

$$V = K_a * \frac{X_a{}^2}{2} + K_b * \frac{X_b{}^2}{2} \ (Eq. 6)$$

$$T = \frac{M * V_G{}^2}{2} + J * \frac{w^2}{2} \ (Eq. 7)$$

Substituindo as Eq.1 e Eq.2 nas Eq.7, Eq.6 e, posteriormente, substituindo-as na Eq. 4, obtemos:

$$L = \frac{M * V_G{}^2}{2} + J * \frac{w^2}{2} - \left(K_a * \frac{X_a{}^2}{2} + K_b * \frac{X_b{}^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{M * V_G{}^2}{2} + J * \frac{w^2}{2} - \left(K_a * \frac{(X_G - l_A * \theta)^2}{2} + K_b * \frac{(X_G + l_B * \theta)^2}{2} \right)$$

Calculando parcelas da equação de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G} = M * V_G \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_G}\right) = M * \dot{V}_G$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_G} = -(K_a * X_G + K_b * X_G)$$

Substituindo a Eq.1 e Eq.2 na Eq.5:

$$R = b_a * \frac{(X_G - \dot{l}_A * \theta)^2}{2} + b_b * \frac{(X_G + \dot{l}_B * \theta)^2}{2}$$

Calculando mais uma parcela da equação de Lagrange:

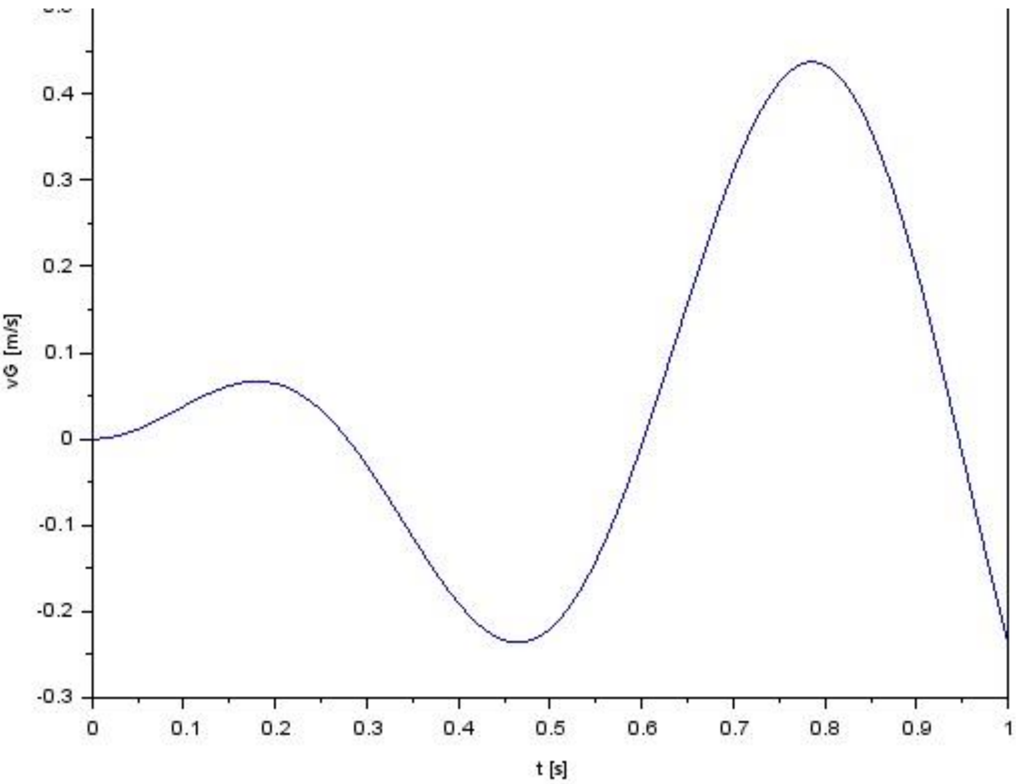
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{X}_G} = b_a * (V_G - l_A * w + V_C) + b_b * (V_G + l_B * w + V_D)$$

Substituindo todas as parcelas na equação de Lagrange e isolando $\dot{V}_G$, obtemos:

$\dot{V}_G = \frac{1}{M}(-K_a X_a - K_b X_b$.......

Resultados:

Velocidade do Centro de massa X Tempo:



Velocidade angula X Tempo: