Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista G – PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Turma 1

Professores: Agenor de Toledo Fleury;
Décio C. Donha

Aluno: Henrique Silva Barbeta

Número USP: 10769323

São Paulo

Sumário

1. Modelagem de 12 carro 3
2. Simulação do modelo de 12 carro 3
3. Análise de resposta em frequência 5
4. Simulação de sistema não linear 8
    4.1. Exemplo 8
    4.2. Exercício 8
5. Apêndice 8

1. Modelagem de $\frac{1}{2}$ carro

Para a modelagem matemática do sistema, primeiro utilizamos o **TMB**:

$$M\ddot{x}_G = (k_A x_A - k_B x_B) - \left(b_A\left[\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A\right] + b_B\left[\dot{x}_G - \dot{x}_D - \dot{\theta} l_B\right]\right)$$

Depois utilizamos o **TMQM**:

$$J\ddot{\theta} = (k_A x_A l_A - k_B x_B l_B) + \left(b_A l_A\left[\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A\right] - b_B l_B\left[\dot{x}_G - \dot{x}_D + \dot{\theta} l_B\right]\right)$$

A partir disso, usamos a representação em espaço de estados, que é dada por:

$$\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{matrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}; \; u = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}; \; y = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$$

Com isso, chegamos nas seguintes matrizes A, B, C e D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ k_A/_M & -k_B/_M & -(b_A + b_B)/_M & (b_A l_A + b_B l_B)/_M \\ k_A l_A/J & -k_B l_B/J & (b_A l_A - b_B l_B)/J & -(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)/J \end{bmatrix};$$

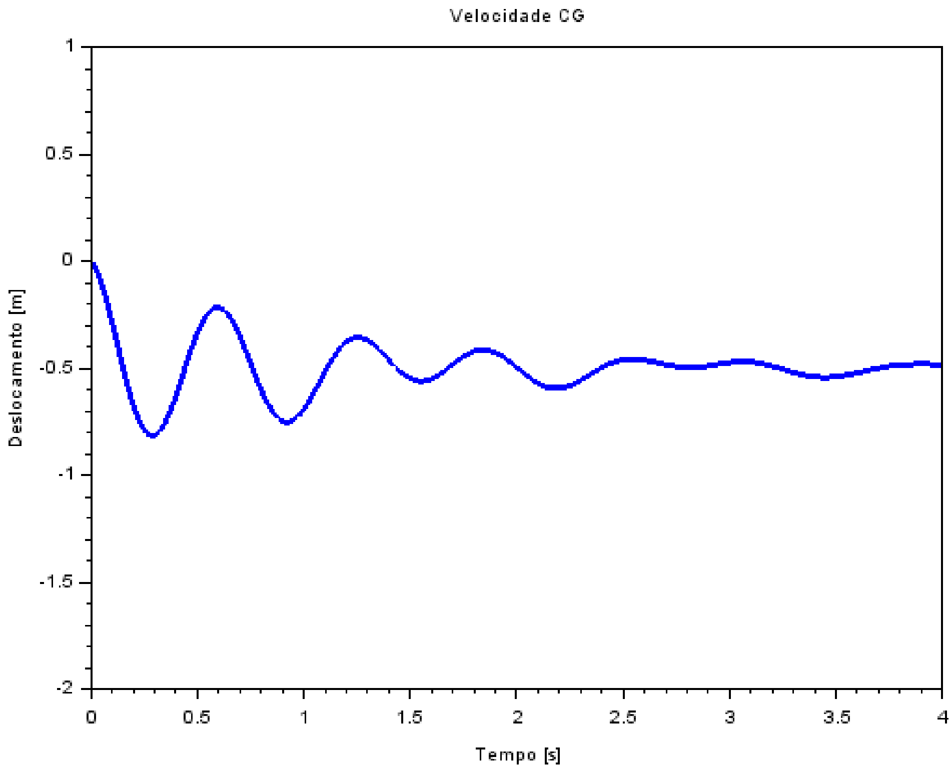
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -b_A/M & -b_B/M \\ b_A l_A/J & -b_B l_B/J \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

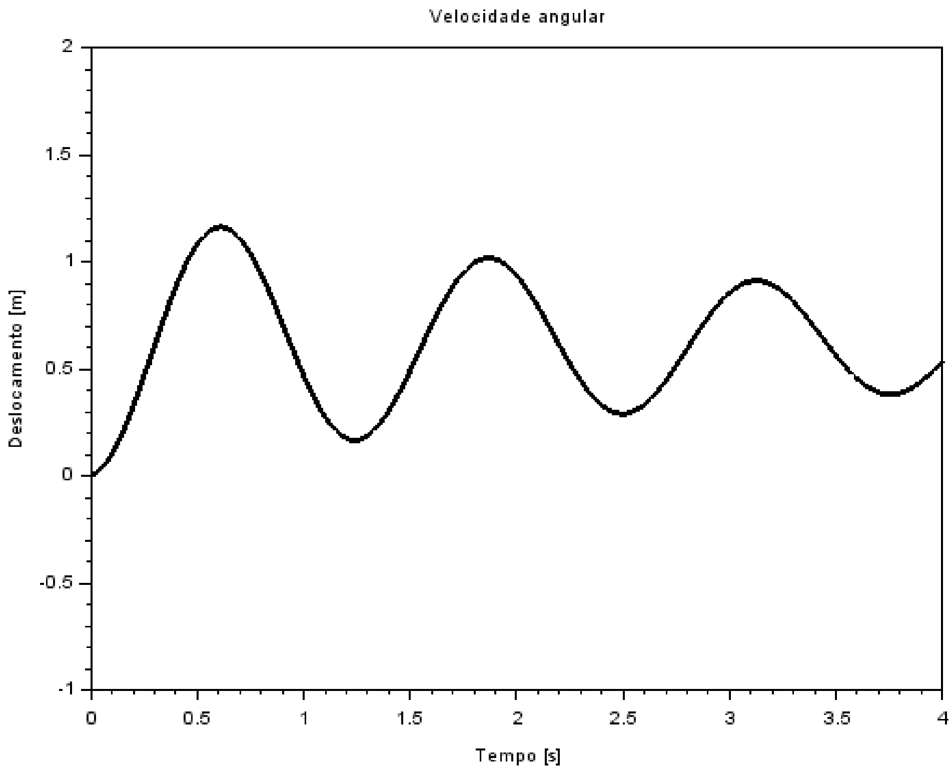
2. Simulação do modelo de $\frac{1}{2}$ carro

Agora, faremos o uso de uma entrada do tipo degrau. Esta entrada representa uma rampa que o carro está subindo. A diferença de tempo entre as rodas dianteiras e traseira, para alcançarem o início da rampa é dada por t_d, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$t_D = \frac{\Delta S}{v} = \frac{l_A + l_B}{v_H} = \frac{0{,}8 + 0{,}8}{10} = 0{,}16s$$

Para as primeiras entradas, obteve-se o seguinte, na simulação:





(A partir da propriedade de edição, foram mudados os extremos dos eixos nos gráficos).

Pelos resultados, vemos que ambas velocidades oscilam ao redor de um valor.

(Não foi possível rodar a função seno, pois estava dando erro)

3. Análise de resposta em frequência

Obteve-se os seguintes diagramas do Bode:

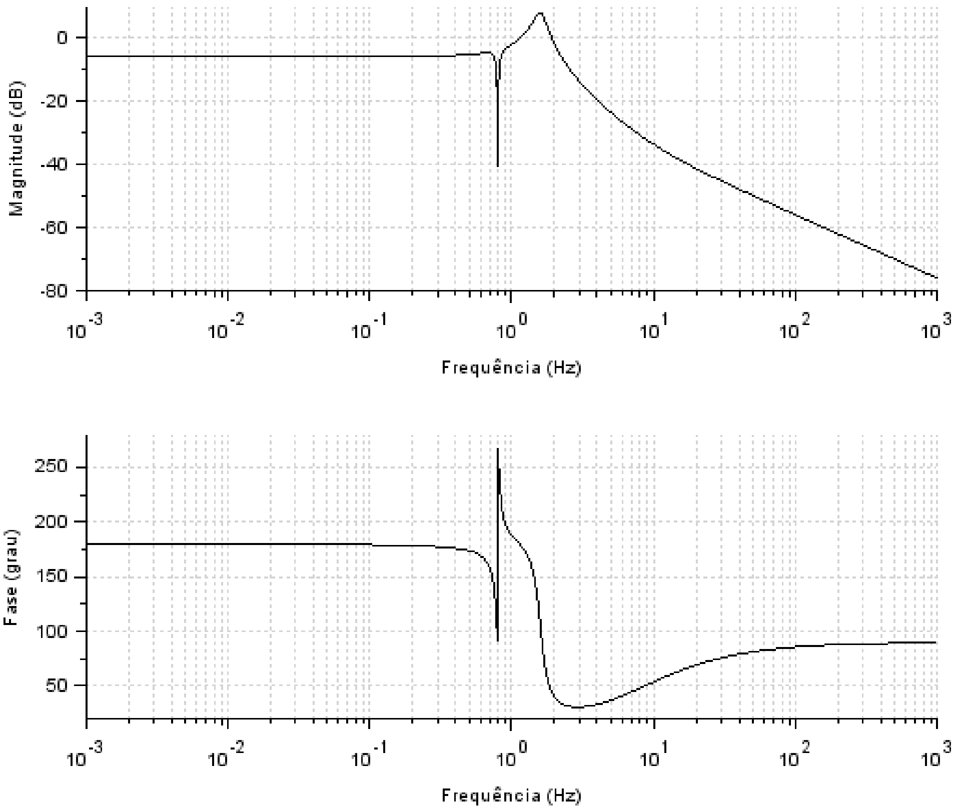


Figura 1- Diagrama de Bode para G11

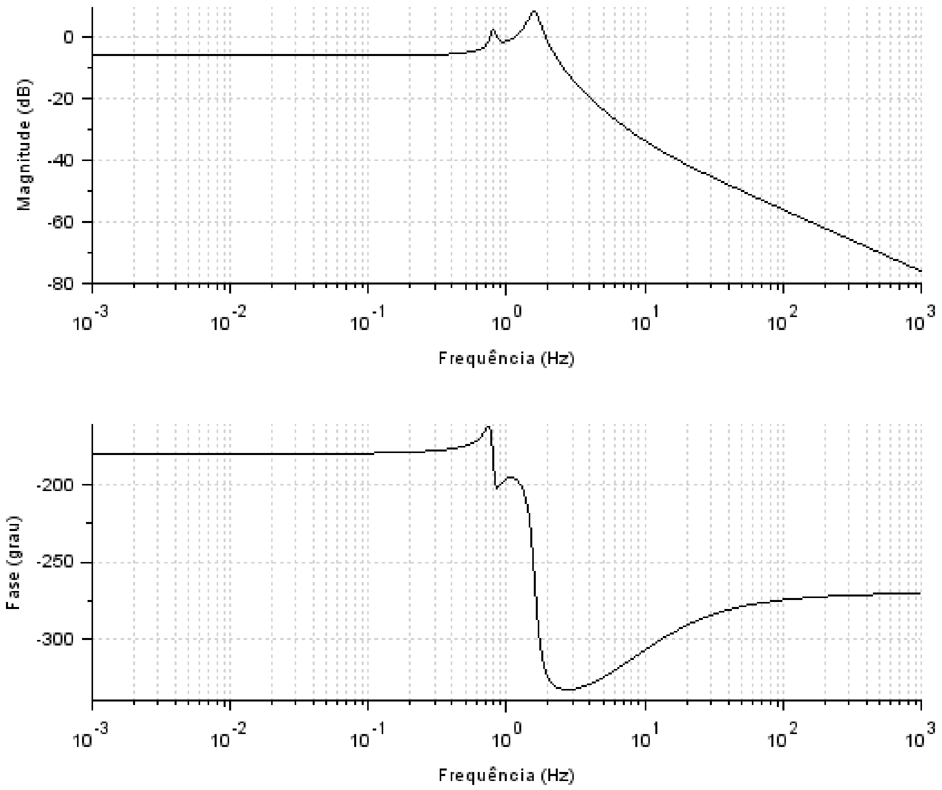


Figura 2- Diagrama de Bode para G12

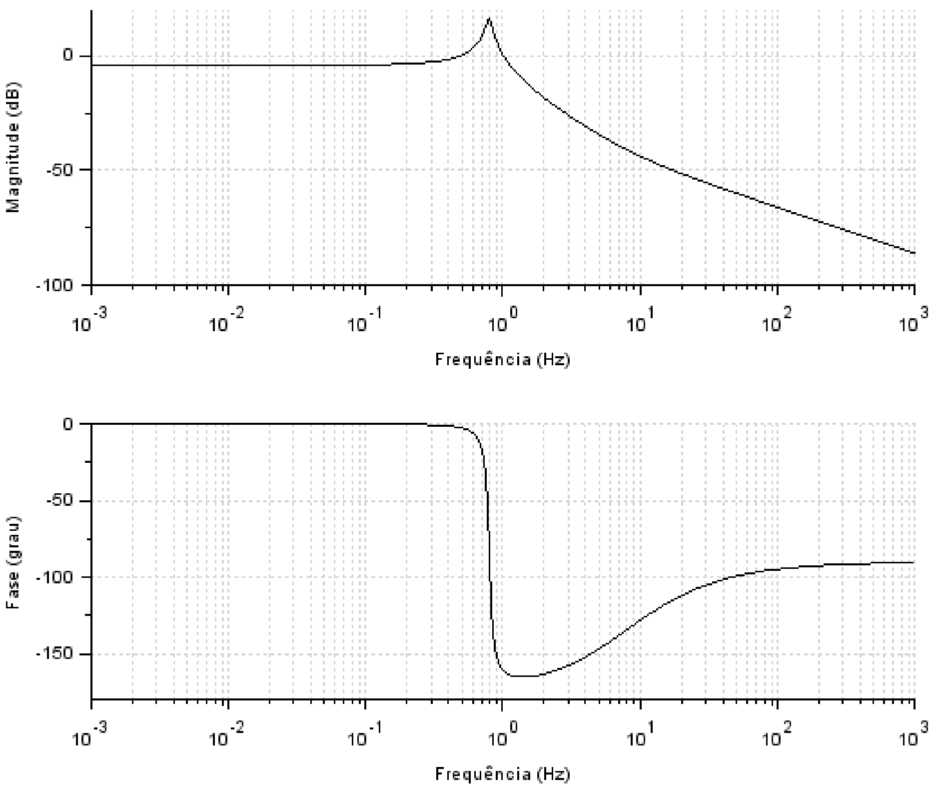


Figura 3- Diagrama de Bode para G21

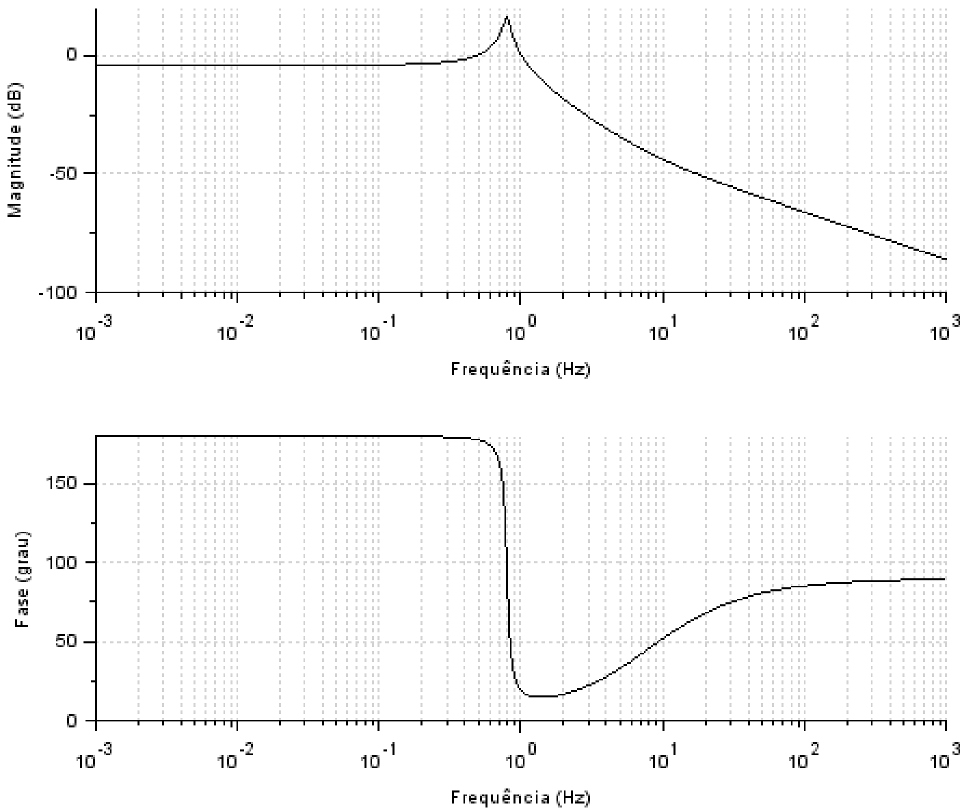


Figura 4- Diagrama de Bode para G22

Além dos diagramas, foi feita a simulação para encontrar a função transferência, o que resultou no seguinte:

```
--> exec('C:\Users\hsbar\Downloads\ListaG-parte1.sce', -1)

                       2    3                                2    3
     -1250 - 25s - 50s - s          -1250 - 75s - 51s - s
   ------------------------------  ------------------------------
                    2      3   4                        2      3   4
   2500 + 100s + 126s + 2.5s + s   2500 + 100s + 126s + 2.5s + s

   15.625 + 0.3125s                -15.625 - 0.3125s
   -----------------               ------------------
                2                                2
    25 + 0.5s + s                     25 + 0.5s + s
 ans  =
```

A partir disso conseguimos a equação característica e os polos:

$$s^4 + 2{,}5s^3 + 126s^2 + 100s + 2500$$

$$p_1 = -0{,}333003 \pm 4{,}985178$$
$$p_2 = -0{,}666997 \pm 9{,}985178$$

Tendo isso, podemos, a partir da equação $p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$, encontrar o que estamos procurando:

$$\omega_{n1} \approx \frac{5\text{rad}}{\text{s}};$$
$$\omega_{n2} \approx \frac{10\text{rad}}{\text{s}};$$
$$\zeta_1 \approx 0{,}067;$$
$$\zeta_2 \approx 0{,}067.$$

Assim, temos:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \rightarrow \begin{cases}\omega_{d1} = 4{,}99\text{rad/s} \\ \omega_{d2} = 9{,}98\text{rad/s}\end{cases}$$
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \rightarrow \begin{cases}\omega_{r1} = 4{,}98\text{rad/s} \\ \omega_{r2} = 9{,}95\text{rad/s}\end{cases}$$

4. Simulação de sistema não linear

4.1. Exemplo

4.2. Exercício

5. Apêndice

```
clear
M = 200;
J = 512;
la = 0.8;
lb = 0.8;
ka = 10000;
kb = 10000;
ba = 200;
bb = 200;
vh = 10;

A=[0,0,1, -la;..
 0,0,1,lb;...
 -ka/M,-kb/M,-(ba + bb)/M,(ba*la + bb*lb)/M;..
 ka*la/J,-kb*lb/J,(ba*la - bb*lb)/J,-(ba*(la^2) + bb*(lb^2))/J]

B=[1,0;..
 0,1;..
 -ba/M,-bb/M;..
 (ba*la)/J,(-bb*lb)/J]

 C=[0,0,1,0;..
```

```
 0,0,0,1]

D=[0,0;..
 0,0]
G = syslin('c',A,B,C,D)
Gs = ss2tf(G)
X0 = [0; 0; 0; 0]
t = 0:0.01:4
t2 = 0:0.1:10
td = 1.6/vh;

tipo = 'unitaria'
u = zeros (2, length(t));
u2 = zeros (2, length(t2));
u3 = zeros (2, length(t2));
if tipo == 'unitaria' then
 u(1,:) = 1 //vc
 for i = 1:length(t)
 if t(i) >= td then // vd
 u(2:1) = 1
 end
 end

end
x0 = [0 0 0 0]
[y , x] = csim (u , t , G , X0)

if tipo == 'unitaria' then
 f1 = scf(1)
 plot(t,y(1,:), 'b', 'linewidth',3)
 xtitle ('Velocidade CG', 'Tempo [s]', 'Deslocamento [m]')

 f2 = scf(2)
 plot(t,y(2,:), 'k', 'linewidth',3)
 xtitle ('Velocidade angular', 'Tempo [s]', 'Deslocamento [m]')

 disp(Gs)

 f3 = scf(3)

 bode(G(1,1))

 f4 = scf(4)
 bode(G(1,2))
```

```
 f5 = scf(5)
 bode(G(2,1))

 f6 = scf(6)
 bode(G(2,2))
end
```