

Carolina Carvalho Silva - 10705933

- Exercícios 10/11 -

$$1 - \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a)

↳ Por autovalores:

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -12 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(-4-\lambda) + 24 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 96}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}i}{2}$$

Autovalores com parte imaginária e parte real negativa \therefore o sistema é estável.

b)

↳ Função de transferência:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -12x_1 - 4x_2 + u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1 - x_1(0) = 2X_2 \\ sX_2 - x_2(0) = -12X_1 - 4X_2 + U \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{sX_1}{2} \quad \left| \quad \frac{s^2 X_1}{2} = -12X_1 - 2sX_1 + U \right.$$

$$X_1 (s^2 + 4s + 24) = 2U$$

$$\Rightarrow \frac{X_{u1}}{U} = \frac{2}{s^2 + 4s + 24} \quad \left| \quad \frac{X_{u2}}{U} = \frac{s}{s^2 + 4s + 24} \right.$$

Polos das Funções de Transferência:

$$p_1 = -2 - 2\sqrt{5}i$$

$$p_2 = -2 + 2\sqrt{5}i$$

~~Polos~~

Polos c/ parte imaginária
e parte real negativa

\therefore sistema estável

\hookrightarrow Comparando a solução genérica com a FT:

$$H(\omega_j) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_j}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$\frac{X_1}{U} = \frac{1}{12\left(\frac{\Delta^2}{24} + \frac{4\Delta}{24} + 1\right)}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{\omega_n^2} \Rightarrow \omega_n^2 = 24 \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{6} \text{ rad/s}$$

$$2\zeta\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_n^2 \cdot m$$

$$\Rightarrow k = 24 \text{ N/m}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{2 \cdot 2}{24\epsilon} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \Rightarrow c = \zeta 2\sqrt{km} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$c) \omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = 4,47 \text{ rad/s}$$

$$\text{Assim, } \frac{\omega}{\omega_n} = 1$$