Lista G

Lucas Souza Vieira
PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Novembro de 2020

1 Obtenção do modelo de 1/2 carro

Primeiramente, utilizam-se as relações cinemáticas de corpo rígido para determinar as velocidades v_A e v_B em função das variáveis do vetor de estados. Isso é feito, ainda na forma vetorial, nas equações (1). Das hipóteses simplificadoras do enunciado, sabe-se que AC e BD permanecem na vertical. Desprezam-se as componentes vetoriais na direção horizontal e escrevem-se as equações cinemáticas de velocidade na direção vertical em formato escalar em (2). As enlongações das molas A e B são escritas em (3).

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (A - G) \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (B - G) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v_A &= v_G - \omega l_A \cos\theta \\ v_B &= v_G + \omega l_B \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_A &= x_G - l_A \sin\theta \\ x_B &= x_G + l_B \sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

As equações diferenciais da dinâmica são obtidas pelas equações de Lagrange. Para aplicação destas, definem-se $\dot{x}_G = v_G$ e $\omega = \dot{\theta}$. As equações (4), (5) e (6) representam a energia cinética, a energia potencial e a função de dissipação de Rayleigh do sistema. O Lagrangeano é dado por (7).

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \tag{4}$$

$$V = \frac{1}{2} k_A (x_G - l_A \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k_B (x_G + l_A \sin\theta)^2 \tag{5}$$

$$R = \frac{1}{2} b_A (\dot{x}_G - \dot{\theta} l_A \cos\theta - v_C)^2 + \frac{1}{2} b_B (\dot{x}_G + \dot{\theta} l_B \cos\theta - v_D)^2 \tag{6}$$

$$L = T - V \tag{7}$$

Primeiramente, aplicando as equações de Lagrange na coordenada generalizada x_G:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) = M\ddot{x}_G$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = -k_A(x_G - l_A \sin\theta) - k_B(x_G + l_B \sin\theta)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = b_A(\dot{x}_G - l_A\dot{\theta}\cos\theta - v_C) + b_B(\dot{x}_G + l_B\dot{\theta}\cos\theta - v_D)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_G} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = 0 \tag{8}$$

Utilizando os termos em derivadas parciais computados, utilizamos (8) para escrever a uma das equações acopladas do sistema. Linearizando, tomando $\omega = \dot{\theta}$ e $v_G = \dot{x}_G$ e lembrando das expressões (3) para as enlongações da mola, chega-se à equação (9).

$$M\dot{v}_G + k_A x_A + k_B x_B + (b_A + b_B)v_G + (b_B l_B - b_A l_A)\omega = b_A v_C + b_B v_D \tag{9}$$

Para a coordenada θ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = k_A l_A \cos\theta(x_G - l_A \sin\theta) - k_B l_B \cos\theta(x_G + l_B \sin\theta)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -b_A l_A \cos\theta(\dot{x}_G - l_A\dot{\theta}\cos\theta - v_C) + b_B l_B \cos\theta(\dot{x}_G + l_B\dot{\theta}\cos\theta - v_D)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \tag{10}$$

Procedendo da mesma maneira que para a coordenada anterior, relacionam-se os termos em derivadas parciais segundo (10). Escrevendo a equação resultante nas variáveis de estado, vem a equação (11).

$$J\dot{\omega} - k_A l_A x_A + k_B l_B x_B + (b_B l_B - b_A l_A)v_G + (b_A {l_A}^2 + b_B {l_B}^2)\omega = -b_A l_A v_C + +b_B l_B v_D \tag{11}$$

Podemos escrever as equações diferenciais do sistema dinâmico na forma de espaço de estados em sistema linear. Para um vetor de estados $\mathbf{x} = [x_A \ x_B \ v_G \ \omega]^T$ e de entradas $\mathbf{u} = [v_C \ v_D]$, o sistema linear do tipo escrito em (12) decorre se escrevermos as matrizes do sistema linear segundo (13) a (16).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -k_A/M & -k_B/M & -(b_A + b_B)/M & -(b_B l_B - b_A l_A)/M \\ k_A l_A/J & -k_B l_B/J & -(b_B l_B - b_A l_A)/J & -(b_B {l_B}^2 + b_A {l_A}^2)/J \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_A/M & b_B/M \\ -b_A l_A/J & b_B l_B/J \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Conhecidas as matrizes do sistema linearizado, tem-se o modelo matemático bem definido. Resta apenas simular numericamente e estudar os resultados.

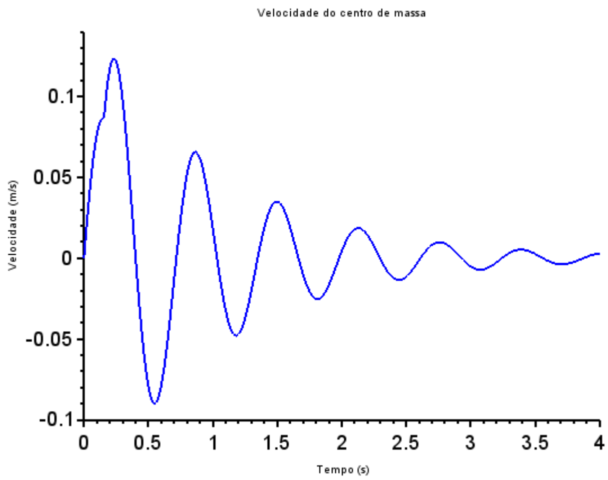
2 Simulação do modelo de 1/2 carro

A primeira simulção do sistema é feita para uma entrada degrau. Um obstáculo físico real que poderia ser representado por esse tipo de entrada é uma subida de inclinação constante. Dado o comprimento do chassi, a roda D sofre um atraso em relação à roda C até que atinja a rampa. Por isso, é preciso que D se desloque por um intervalo de tempo t_D até atingir o mesmo ponto na via que C já atingira. Considerando velocidade constante v_H do carro, fica fácil determinar t_D segundo (17). Para os parâmetros escolhidos no enunciado, calcula-se $t_D = 0,16 \ s$.

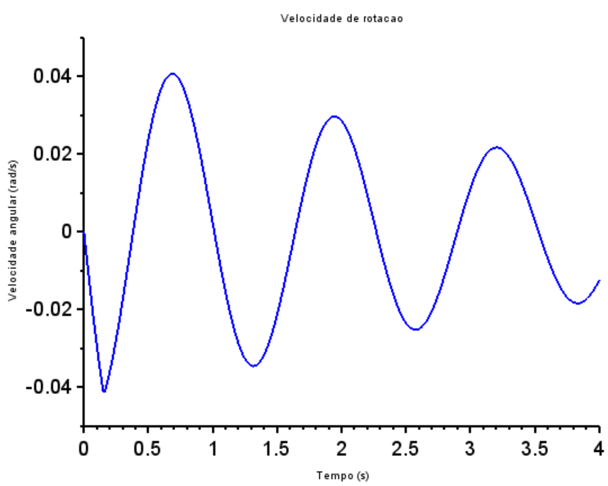
$$t_D = \frac{l_A + l_B}{v_H} \tag{17}$$

A Figura 1 apresenta os resultados da simulação para entrada degrau. Como se pode verificar o distúrbio da rampa é sentido primeiro pela roda C, de modo que, inicialmente, o meio carro tenha velocidade angular negativa e o centro de massa se desloque para cima. Em $t = t_D = 0,16\ s$, há um ponto de "quina"nos gráficos, no qual a derivada fica mal definida. É nesse ponto que a roda traseira atinge o início da rampa e, só então, sofre a entrada do degrau unitário. Em virtude do amortecimento, os movimentos tem suas amplitudes reduzidas com a evolução do tempo.

Figura 1: Saídas simuladas para entrada degrau



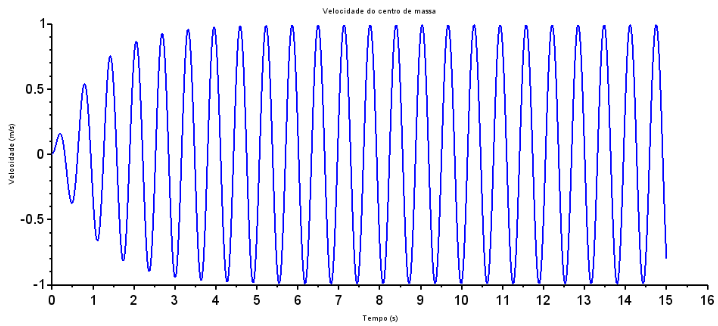
(a) Velocidade do centro de massa



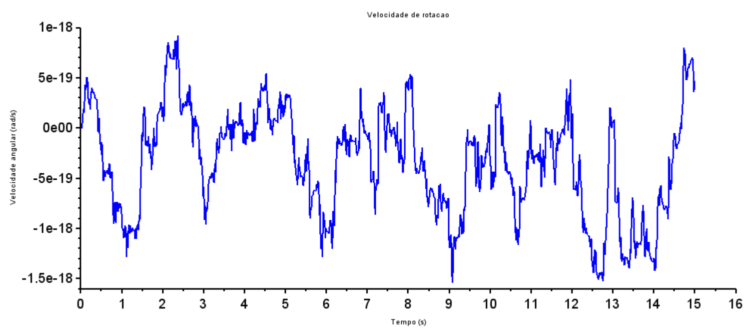
(b) Velocidade angular

A Figura 2 apresenta os resultados da simulação para $v_C = v_D = \sin(9,8995t)$. As rodas oscilam em fase, inexistindo, portanto, velocidade angular. Assim, apenas a velocidade do centro de massa oscila em torno da posição de equilíbrio ($v_G = 0$), incialmente com amplitude crescente até que esta se estabilize em valor máximo próximo de um valor unitário. A velocidade angular, apresenta variações da ordem de $10^{-18}\ rad/s$ devido à instabilidades numéricas inerentes ao método de integração. Contudo, interpretando os resultados, ela é nula, como já se esperava.

Figura 2: Saídas simuladas para entrada senoidal de frequência 9,8995 rad/s



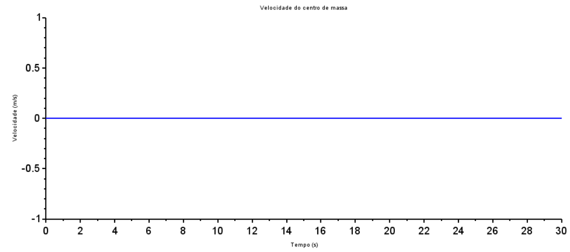
(a) Velocidade do centro de massa



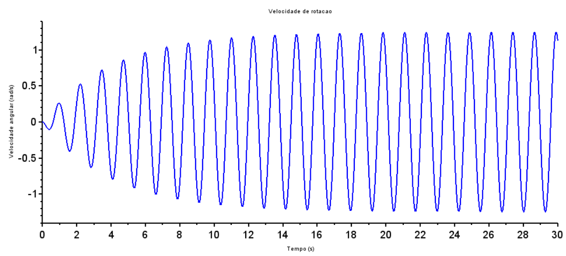
(b) Velocidade angular

A Figura 3 apresenta o resultado da siulação para $v_C = -v_D = \sin(4,9875t)$. Nesse exemplo, as rodas estão oscilando em oposição de fase, de tal sorte que o centro de massa do meio carro não se movimente com relação ao referencial inercial. Desta vez, a velocidade v_G permanece nula em toda a simulação, enquanto ω oscila em torno de sua posição de equilíbrio ($\omega = 0$) com amplitude crescente até esta se estabilize próxima da unidade. Nota-se também que o número de oscilações por unidade de tempo da variável de estado oscilatória deste exemplo é menor que o anterior. Isso é facilmente constatável devido à frequência de entrada menor para este caso.

Figura 3: Saídas simuladas para entrada senoidal de frequência 4,9875 rad/s



(a) Velocidade do centro de massa



(b) Velocidade angular

Como pede o enunciado, são calculados as frequências naturais não-amortecidas e amortecidas do sistema, bem como seus fatores de amortecimento. Isso é facilmente calculado tomando os polos do sistema. Sendo este um sistema de quarta ordem, temos dois pares de polos complexos conjugados $(s_1, \bar{s}_1)$ e $(s_2, \bar{s}_2)$. As equações que permitem efetuar esses cálculos são apresentadas de (18) a (20). A Tabela 1 resume os resultados para as constantes pedidas.

Tabela 1: Polos e constantes do sistema

Polo	**Re**(s_i)	**Im**(s_i)	$\boldsymbol{\omega_n}$	$\boldsymbol{\zeta}$	$\boldsymbol{\omega_d}$
s_1	-1	9,94988	10	-0,1	9,94988
$\bar{s_1}$	-1	-9,94988			
s_2	-0,25	4,99375	5	-0,05	4,99375
$\bar{s_2}$	-0,25	-4,99375			

$$\omega_n = \sqrt{s \cdot \bar{s}} = |s| \tag{18}$$

$$\zeta = \frac{Re(s)}{\omega_n} \tag{19}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{20}$$

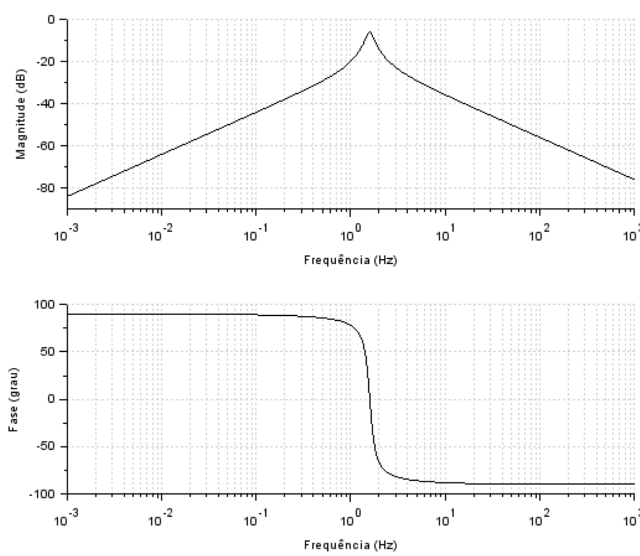
3 Análise de resposta em frequência

As funções de transferência, determinadas numericamente, são apresentadas na equação (21). Como se pode perceber, os polos $(s_1, \bar{s}_1)$ são as raízes do polinômio no denomidador das funções da primeira linha da matriz $G(s)$. Os outros polos se verificam na segunda linha.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 + 2s + 100} & \dfrac{s}{s^2 + 2s + 100} \\ \dfrac{-0,3125s}{s^2 + 0,5s + 25} & \dfrac{0,3125s}{s^2 + 0,5s + 25} \end{bmatrix} \tag{21}$$

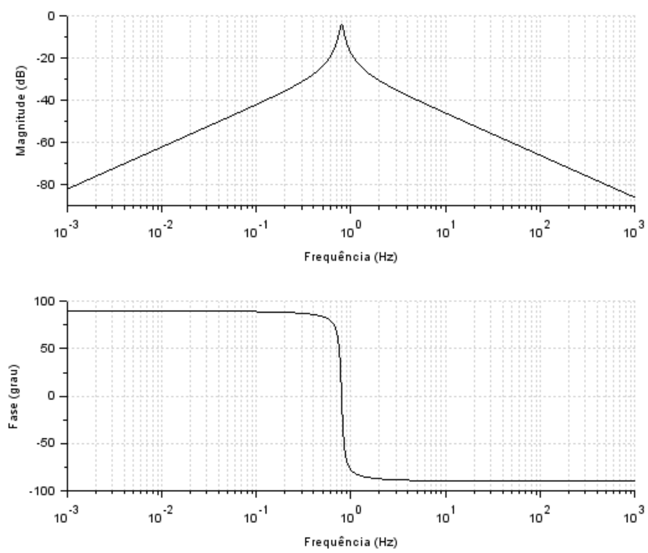
Todos os zeros da função de transferência estão posicionados na origem do plano-s. Somando isso aos polos apresentados na Tabela 1, percebe-se que o sistema apresenta fase mínima. Os diagramas de Bode para as funções de transferência da primeira linha são iguais. O mesmo quase vale, entre si, para as funções da segunda linha a menos de um sinal. Assim, os diagramas de Bode para a velocidade do centro de massa são os mesmos para entrada v_C ou entrada v_D. Para a velocidade angular, os diagramas de Bode para uma ou outra entrada diferirão apenas quanto à fase (180°) devido à diferença de sinal. As análises contudo se mantém as mesmas, então é apresentado apenas um dos diagramas para ω.

Figura 4: Diagrama de Bode da velocidade do centro de massa v_G



A Figura 4 apresenta o diagrama de Bode para a saída v_G. Em baixas frequências, a amplitude aumenta cerca de 20 dB por década devido ao fator derivativo à primeira potência no numerador das funções de transferência na primeira linha de $G(s)$. Esse fator também justifica a fase de 90° em baixas frequências. Há ressonância devido ao termo de segunda ordem no denominador. Calculando a frequência de ressonância em Hertz ($f_1 = \omega_{d,1}/(2\pi)$), obtém-se $f_1 \approx 1,584\ Hz$. Esse valor é coerente com o máximo verificado no diagrama de amplitude e coincide com a mudança de fase de 180° para a mesma frequência de ressonância. Para altas frequências, a amplitude cai 20 dB por década, com fase $-90°$.

Figura 5: Diagrama de Bode da velocidade angular ω



A Figura 5 apresenta o diagrama de Bode para a saída ω. O comportamento das curvas do diagrama é o mesmo verificado no anterior. O termo derivativo no numerador das funções da segunda linha de $G(s)$ faz com que a fase seja de 90°. O termo de segunda ordem no denominador faz com que haja ressonância ($f_2 = \omega_{d,2}/(2\pi)$) para $f_2 \approx 0,795\ Hz$ e, consequentemente, uma mudança de fase de 180°. Para baixas frequências, ocorre comportamento assintótico de aumentdo de 20 dB por década para a amplitude. Para altas, vale o análogo de decaimento de 20 dB por década.

Apêndice

Código utilizado para simulação numérica do modelo de meio carro:

```
clear;

M = 200; // kg
J = 512; // kgm2
lA = 0.8; // m
lB = 0.8; // m
kA = 10000; //N/m
kB = 10000; //N/m
bA = 200; //Ns/m
bB = 200; //Ns/m
vH = 10; //m/s
td = (lA + lB)/vH; // Tempo de resposta entre rodas
caso = 3; // Escolha de qual o caso simulado
```

```

// Instante final de simulacao para cada caso
if caso == 1 then
    tf = 4.;
elseif caso == 2 then
    tf = 15.;
else
    tf = 30.;
end

step = 0.01; // Passo de simulacao
t = 0.:step:tf; // Vetor de instantes discretos de tempo

// Inicializacao dos vetores de entrada
vC = zeros(1,length(t));
vD = zeros(1,length(t));
// Funcoes para a entrada dependendo do caso escolhido
if caso == 1 then // Degrau
    for i=1:length(t)
        vC(i) = 1.;
        if t(i)<td then
            vD(i) = 0.;
        else
            vD(i) = 1.;
        end
    end
elseif caso == 2 then // Senoidal de freq angular 9.8995 rad/s
    vC = sin(9.8995*t);
    vD = vC;
    u(1,:) = vC;
    u(2,:) = vD;
else // Senoidal de freq angular 4.987 rad/s
    vC = sin(4.987*t);
    vD = -vC;
    u(1,:) = vC;
    u(2,:) = vD;
end

u = [vC;vD]; // Matriz com a evolucao temporal das entradas

// Integrador para sistema linear usando Runge-Kutta de 4a ordem
function [y,x]=integrador(A,B,C,D,u,t,x0)
    // Seguindo a notacao usada no enunciado da lista F:
    //t: vetor de instantes de tempo (tamanho 1 N )     fornecido pelo
   usu rio da fun  o.
    //x: matriz com as solu  es das equa  es diferenciais (tamanho
   n N)     sa da da fun  o.
    //u: matriz com o vetor de entradas em cada instante (tamanho m N)
       fornecida pelo usu rio da fun  o.
    //y: matriz com o vetor de sa das em cada instante (tamanho p N)
     sa da da fun  o.
    //x0: vetor com os estados no instante inicial (tamanho n 1)
   fornecido pelo usu rio da fun  o.
    //A: matriz n n     fornecida pelo usu rio da fun  o.
```

```
    //B: matriz n m     fornecida pelo usu rio da fun   o.
    //C: matriz p n     fornecida pelo usu rio da fun   o.
    //D: matriz: p m     fornecida pelo usu rio da fun   o

    // Parametros de dimensao das matrizes do sistema
    N = length(t); // Numero de iteracoes temporais
    n = length(x0); // Numero de variaveis do vetor de estados
    m = length(u(:,1)); // Numero de entradas do sistema

    // Escrita das equacoes diferenciais dx_{i}/dt = f_{i}(t,x,u) na forma matricial
    // A cada instante discreto t_{j}, os fatores k s o avaliados com base na funcao f
    function [xp]=f(tj,xj,uj)
        xp = A*xj+B*uj;
    endfunction

    x(:,1) = x0; // Aplicacao das condicoes iniciais do problema
    for j=2:N;
        h = t(j)-t(j-1); // Passo temporal de integracao (pode nao ser constante)
        // Avaliacao dos fatores k em t_{j-1}
        k1 = h*f(t(j-1),x(:,j-1),u(:,j-1));
        k2 = h*f(t(j-1)+h/2, x(:,j-1) + k1/2, 0.5*(u(:,j-1)+u(:,j)));
        k3 = h*f(t(j-1)+h/2, x(:,j-1) + k2/2, 0.5*(u(:,j-1)+u(:,j)));
        k4 = h*f(t(j-1)+h, x(:,j-1) + k3, u(:,j));
        // Atualizacao do vetor x no instante t_{j}
        x(:,j) = x(:,j-1) + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        // Calculo da saide em t_{j} a partir de x agora conhecido em t_{j}
        y(:,j) = C*x(:,j)+D*u(:,j);
    end
endfunction

// Matrizes do sistema linear
A = [0 0 1 -lA; 0 0 1 lB; -kA/M -kB/M -(bA+bB)/M -(bB*lB-bA*lA)/M ; kA*lA/J -kB*lB/J -(bB*lB-bA*lA)/J -(bB*lB^2 + bA*lA^2)/J];
B = [ 0 0;0 0;bA/M bB/M;-bA*lA/J bB*lB/J];
C = [0 0 1 0; 0 0 0 1];
D = [0 0; 0 0];

x0 = [0;0;0;0]; // Condicoes iniciais nulas

meiocarro = syslin('c',A,B,C,D); // Sistema linear
G = ss2tf(meiocarro); // Matriz de funcoes de transferencia
[y,x] = integrador(A,B,C,D,u,t,x0); // Integracao numerica das equacoes

s = spec(A);
wn1 = abs(s(1));
zeta1 = real(s(1))/wn1;
wd1 = wn1*sqrt(1-zeta1^2);
wn2 = abs(s(3));
zeta2 = real(s(3))/wn2;
wd2 = wn2*sqrt(1-zeta2^2);
```

```

// Plot dos resultados
//scf(0);
//xset('thickness',2)
//xset('font size',4)
//plot2d(t,y(1,:),2)
//xtitle('Velocidade do centro de massa','Tempo (s)','Velocidade (m/s)')
//
//scf(1);
//xset('thickness',2)
//xset('font size',4)
//plot2d(t,y(2,:),2)
//xtitle('Velocidade de rotacao','Tempo (s)','Velocidade angular (rad/s)')

scf(2);
bode(G(1,1));

scf(3);
bode(G(1,2));

scf(4);
bode(G(2,1));

scf(5);
bode(G(2,2));
```