ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS

LISTA 7

Aluno:
Caio Shohei Uemura Fujinaka 8040879

Docentes:
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury
Prof. Dr. Décio Crisol Donha

São Paulo, SP
2020

I. Exercício I: Obtenha o modelo de ½ carro conforme os parâmetros abaixo. O modelo deverá ser simulado para entradas degrau conforme condições estabelecidas.

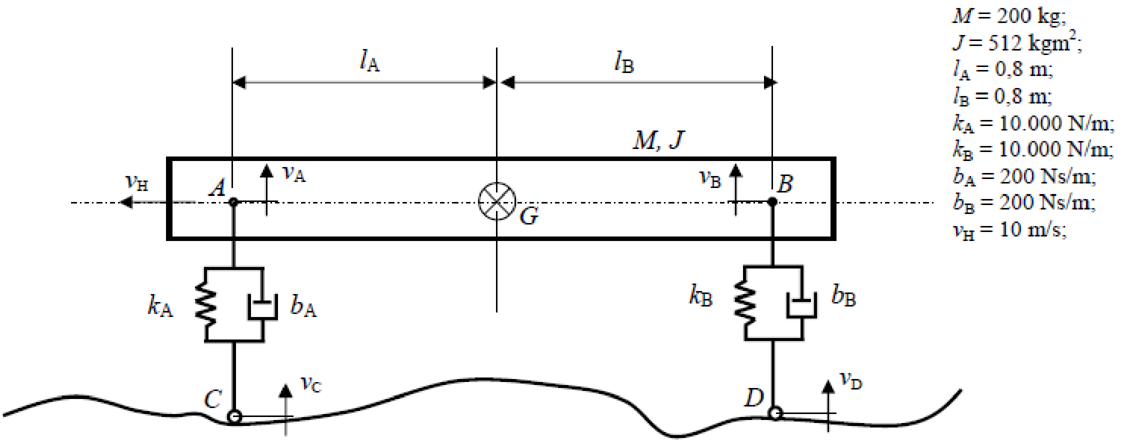

Figura 1: Modelo físico e parâmetros do problema.

O sistema apresentado possui dois graus de liberdade sendo eles a posição do baricentro e a posição angular da massa.

Para a análise do sistema são adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Movimento bidimensional;
- Os segmentos AC e BD se deslocam apenas na vertical;
- Comportamento linear das molas e amortecedores;
- Deslocamento angular pequeno, sendo adotado aproximação para pequenos ângulos;

Aplicando o TMA e o TMB obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -b_A L(\dot{X}_G - \dot{\theta} L - \dot{X}_C) + b_B L(\dot{X}_G + \dot{\theta} L - \dot{X}_D)$$

$$\ddot{\theta} - k_A L(X_G - \theta L - X_C) + k_B L(X_G + \theta L - X_D) - b_A L(\dot{X}_G - \dot{\theta} L - \dot{X}_C) + b_B L(\dot{X}_G + \dot{\theta} L - \dot{X}_D) = 0$$

As quais podem ser representadas na forma de espaço de estados conforme a seguinte consideração:

Vetor de estados $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Vetor de entradas $u = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$

Vetor de saídas $y = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Dessa forma obtemos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -k_A/_M & -k_B/_M & -(b_A + b_B)/_M & (b_A l_A - b_B l_B)/_M \\ k_A l_A/_J & -k_B l_B/_J & (b_A l_A - b_B l_B)/_J & -(b_A {l_A}^2 + b_B {l_B}^2)/_J \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ b_A/_M & b_B/_M \\ -b_A l_A/_J & b_B l_B/_J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}[-kx_1 - bx_2 - u] \end{cases}$$

II. Exercício II: Simulação do modelo de ½ carro.

Simulação 1: Entrada do tipo degrau e condições abaixo:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

O obstáculo físico representado pela entrada degrau pode ser considerado um aclive constante positivo, uma subida com inclinação fixa.

A entrada v_D ocorre t_D segundos após a entrada v_C onde $\mathrm{t}_D = (l_A + l_B)/v_H = 0{,}16s$, esse atraso ocorre por ser o tempo necessário para que o ponto D alcance a localização onde o ponto C recebeu o estímulo.

As simulações são apresentadas abaixo:

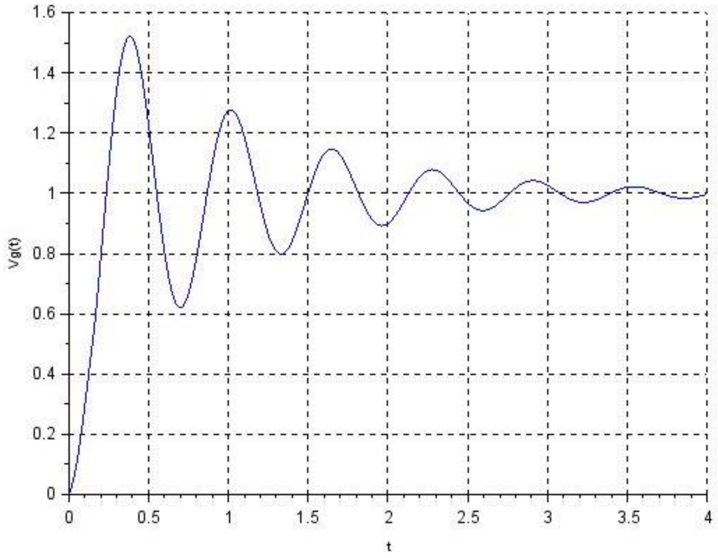

Figura 2: Velocidade do Baricentro (v_G) para entrada degrau.

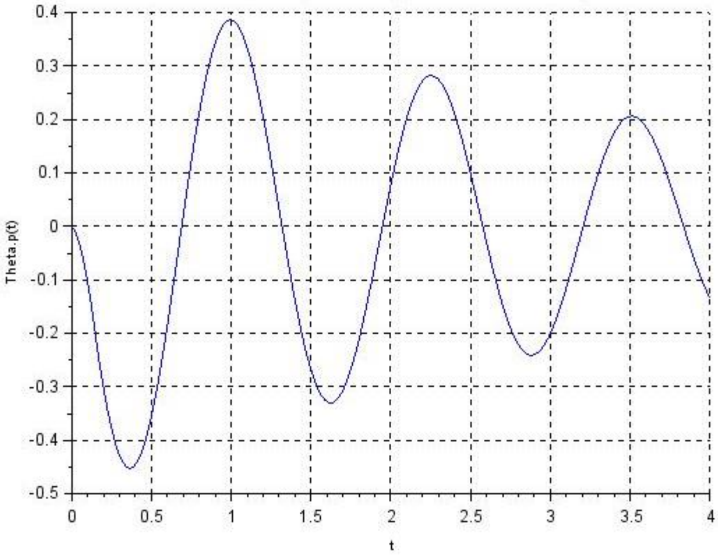

Figura 3: Velocidade Angular (ω) para entrada degrau.

Simulação 2: Entradas do tipo seno em fase:

$$v_C = v_D = \text{sen}(9{,}8995t)$$

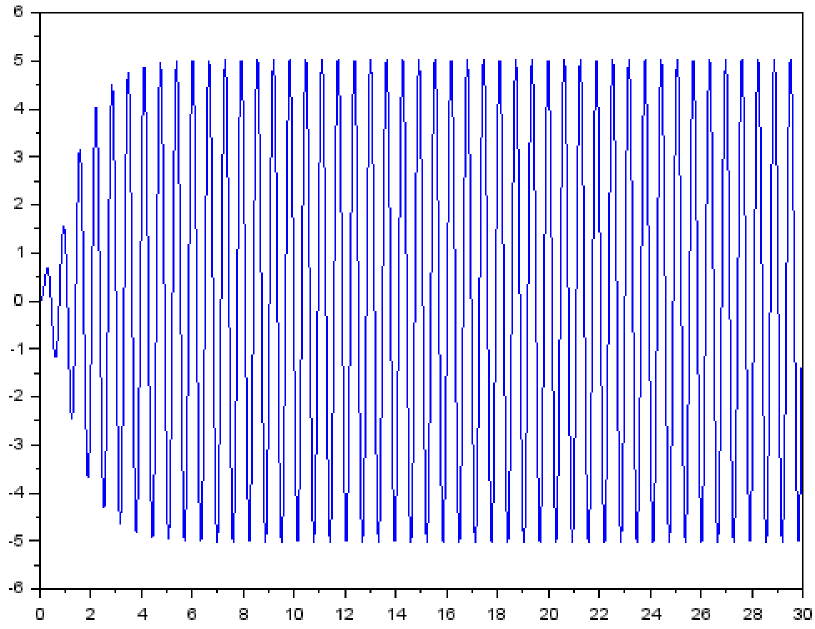

Figura 4: Velocidade do Baricentro (v_G) para entrada seno em fase.

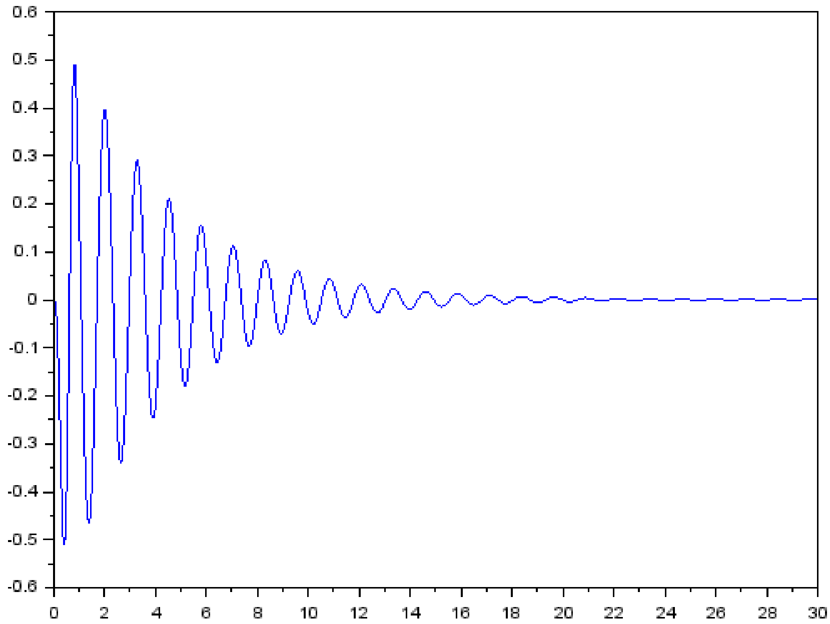

Figura 5: Velocidade Angular (ω) para entrada seno em fase.

Dos gráficos apresentados observa-se que a velocidade do baricentro cresce de forma exponencial até determinada amplitude apresentando a estabilização na sequência, já a velocidade angular de mantém constante pois as entradas estão em fase.

Simulação 3: Entradas do tipo seno em fases opostas:

$$v_C = -v_D = \text{sen}(4{,}9875t)$$

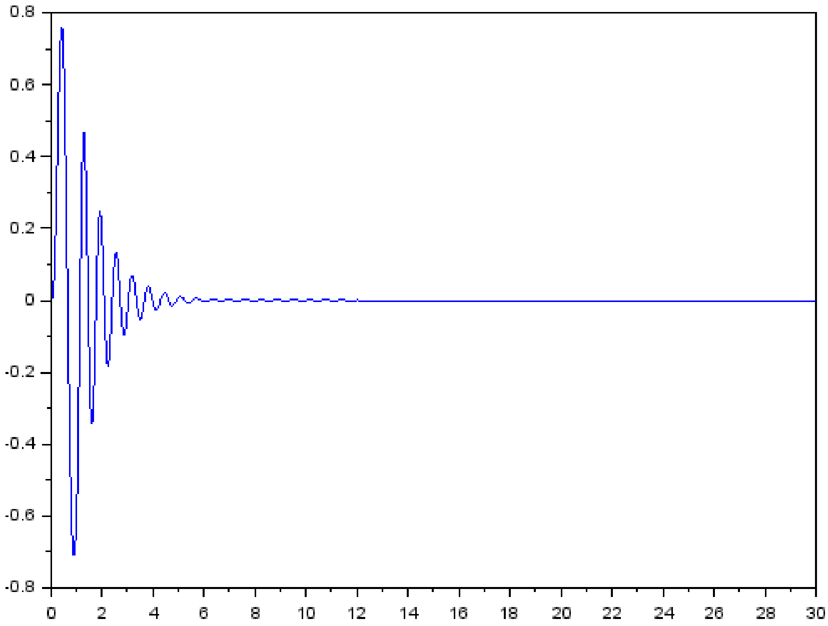

Figura 6: Velocidade do Baricentro (v_G) para entrada seno em fases opostas.

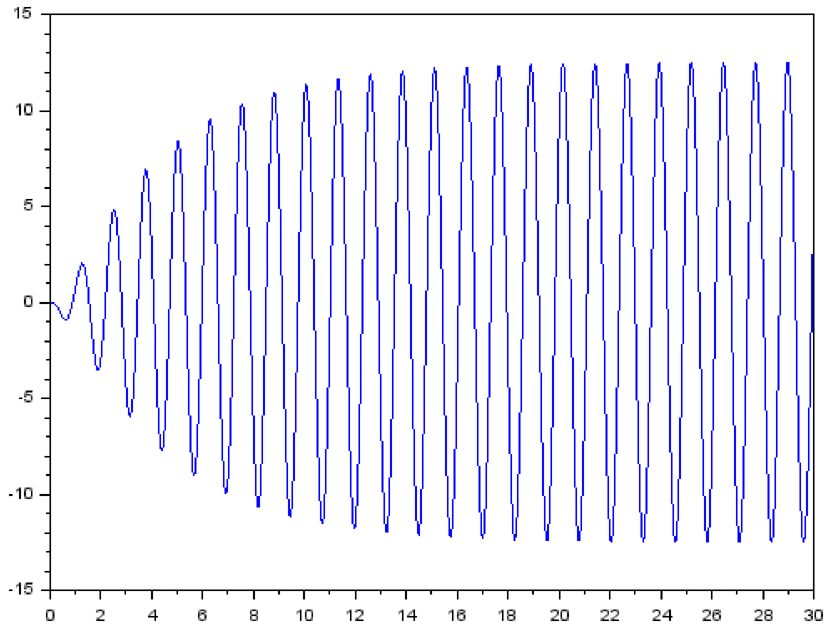

Figura 7: Velocidade Angular (ω) para entrada seno em fases opostas.

Os gráficos acima apontam uma inversão de comportamento quando comparados com os gráficos de entrada seno em fase.

Calcule os coeficientes de amortecimento, as frequências naturais, as frequências naturais amortecidas e as frequências de ressonância.

Através da equação $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ obteve-se $\omega_1 = 5\, rad\ /s$ e $\omega_2 = 10\, rad\ /s$.

Calcula-se na sequência as frequências no caso amortecido e de ressonância:

$$\omega_{d1} = 5{,}00\,\frac{rad}{s}\text{ e} \qquad \omega_{d2} = 9{,}95\,\frac{rad}{s}$$

$$\omega_{r1} = 5{,}00\,\frac{rad}{s}\text{e} \qquad \omega_{r2} = 9{,}90\,\frac{rad}{s}$$

III. Exercício III: Análise de resposta em frequência.

Com os dados obtidos anteriormente são calculadas as funções de transferência:

$$\boldsymbol{G_1 = \frac{50+s}{100+2s+s^2} = G_2 = \frac{50+s}{100+2s+s^2}}$$

$$\boldsymbol{G_3 = \frac{-15.625+0.3125s}{25+0.5s+s^2} = -G_4 = -(\frac{15.625-0.3125s}{25+0.5s+s^2})}$$

Na sequência os diagramas de bode são apresentados:

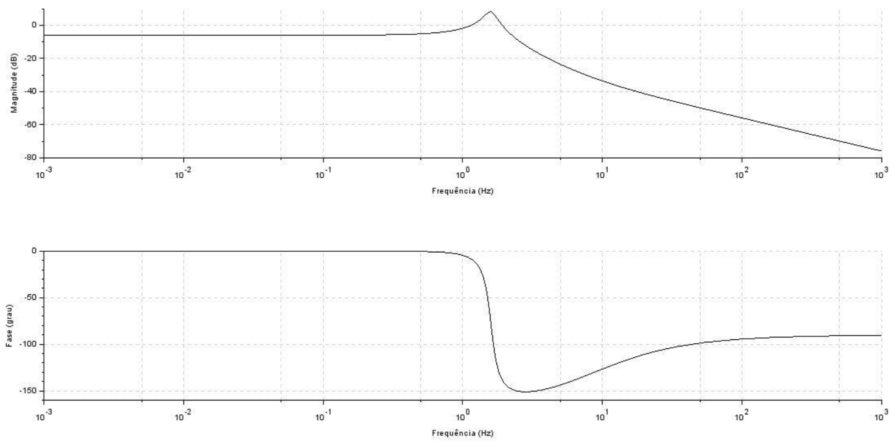

Figura 8: Diagrama de bode considerando entrada e saída sobre a mesma suspensão.

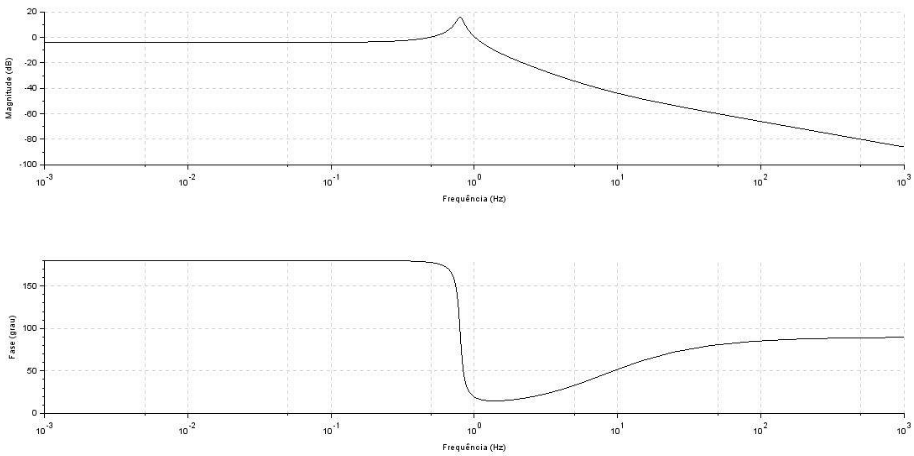

Figura 9: Diagrama de bode considerando entrada e saída em suspensões distintas.