

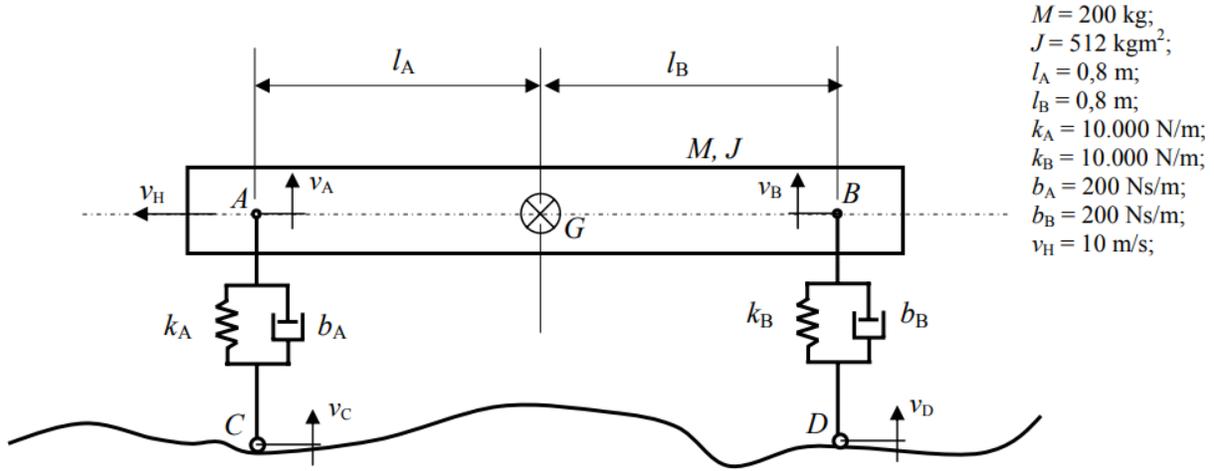
# PME3380 - Lista G

Enzo Zugliani

3 de dezembro de 2020

## 1. Obtenha o modelo de 1/2 carro:

Figura 1: Modelo de meio carro



O modelo de meio carro linearizado pode ser representado pelas equações (1) a (4). Seu desenvolvimento está apresentado no anexo A.

$$\dot{V}_G = -\frac{k_A}{M}x_A - \frac{k_B}{M}x_B - \left(\frac{b_A}{M} + \frac{b_B}{M}\right)V_G + \left(\frac{b_A l_A}{M} - \frac{b_B l_B}{M}\right)\omega + \frac{b_A}{M}V_C + \frac{b_B}{M}V_D \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{l_A k_A}{J}x_A - \frac{l_B k_B}{J}x_B + \left(\frac{l_A b_A}{J} - \frac{l_B b_B}{J}\right)V_G - \left(\frac{b_A l_A^2}{J} - \frac{b_B l_B^2}{J}\right)\omega - \frac{b_A l_A}{J}V_C + \frac{b_B l_B}{J}V_D \quad (2)$$

$$\dot{x}_A = V_G - l_A \omega - V_C \quad (3)$$

$$\dot{x}_B = V_G + l_B \omega - V_D \quad (4)$$

Para o vetor de estados  $\mathbf{x} = [x_A \ x_B \ V_G \ \omega]^T$ , e o vetor de entradas  $\mathbf{u} = [V_C \ V_D]^T$ , as matrizes representativas do sistema no espaço de estados são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & +l_B \\ -\frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & -\left(\frac{b_A}{M} + \frac{b_B}{M}\right) & \left(\frac{b_A l_A}{M} - \frac{b_B l_B}{M}\right) \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \left(\frac{l_A b_A}{J} - \frac{l_B b_B}{J}\right) & -\left(\frac{b_A l_A^2}{J} + \frac{b_B l_B^2}{J}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{b_A l_A}{J} & \frac{b_B l_B}{J} \end{bmatrix} \quad (5)$$

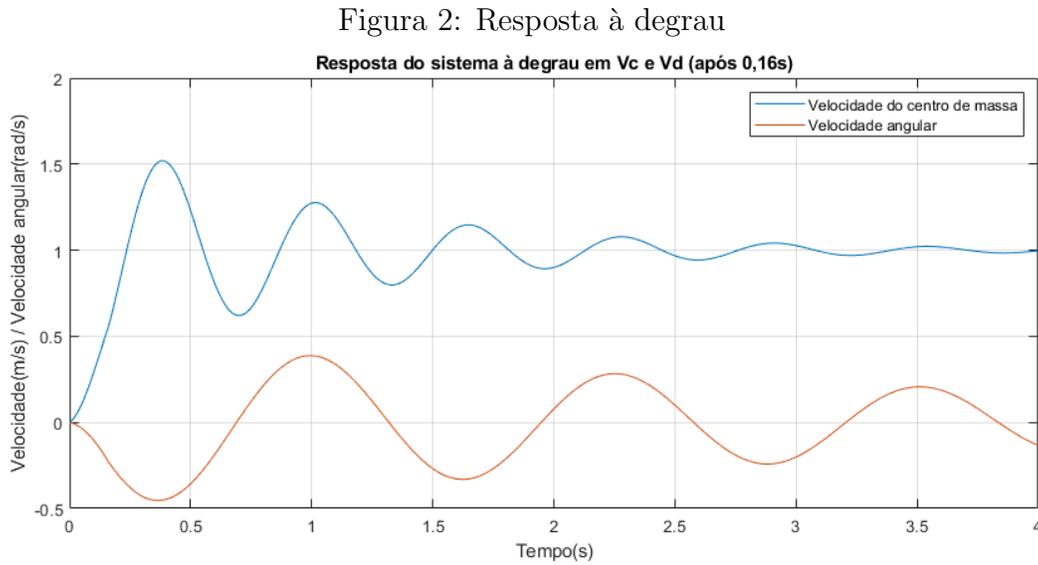
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

**2. Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo degrau. Considere condições iniciais nulas e tempo de simulação de 4 segundos.**

Considerando a seguinte entrada:

$$V_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad V_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases} \quad (7)$$

Onde  $t_d = (l_A + l_B)/V_H = 0,16s$  A resposta do sistema está apresentada na figura 2:



Este tipo de entrada corresponde ao carro iniciar a subir uma rampa com ângulo de inclinação  $\arctan(1/10)$ .  $V_D$  tem seu degrau depois de  $V_C$  pois o carro primeiro atinge a rampa com as rodas da frente, e depois as de trás. Nota-se que a velocidade do centro de massa se estabiliza em 1, condizente com a entrada imposta.

A primeira simulação com entrada senoidal, onde  $V_C = V_D = \text{sen}(9,8995t)$ , está apresentada na figura 3. Já a simulação com  $V_C = -V_D = \text{sen}(4,9875t)$  está apresentada na figura 4.

Figura 3: Primeira entrada senoidal

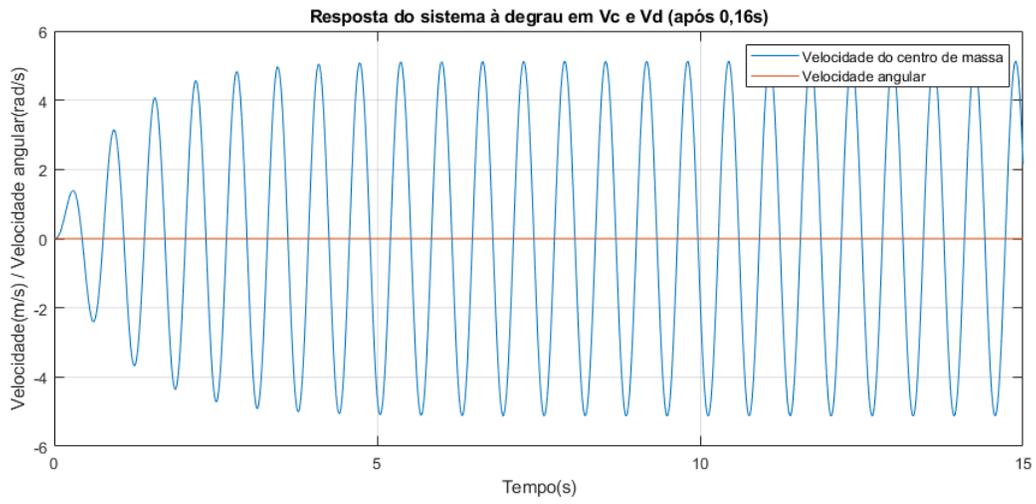
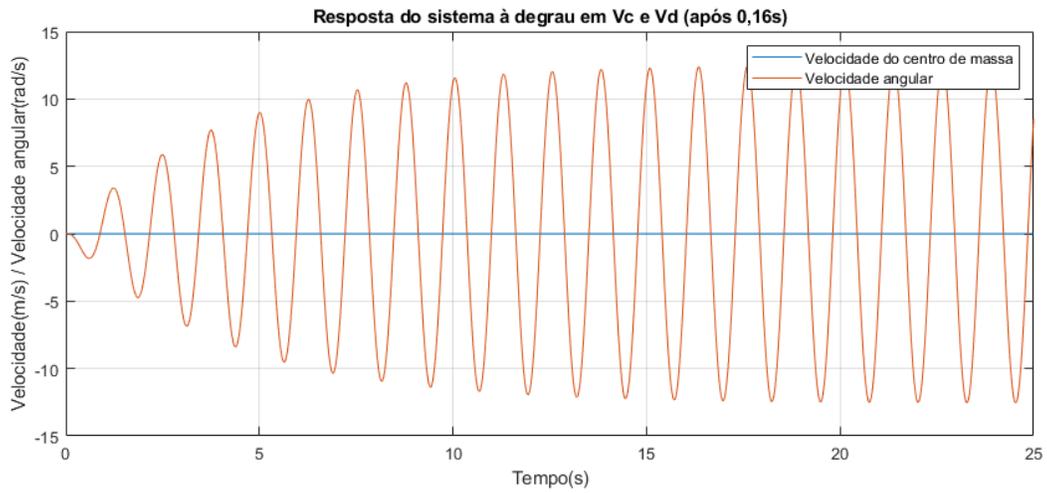


Figura 4: Segunda entrada senoidal



- Utilizando  $\omega = 2rad/s$

Figura 5: Entrada senoidal não alternada, 2 rad/s

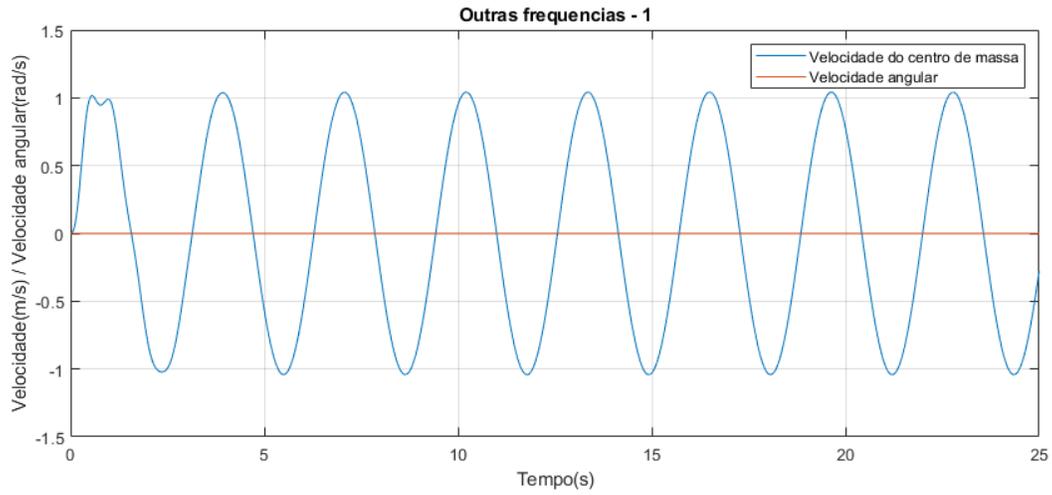
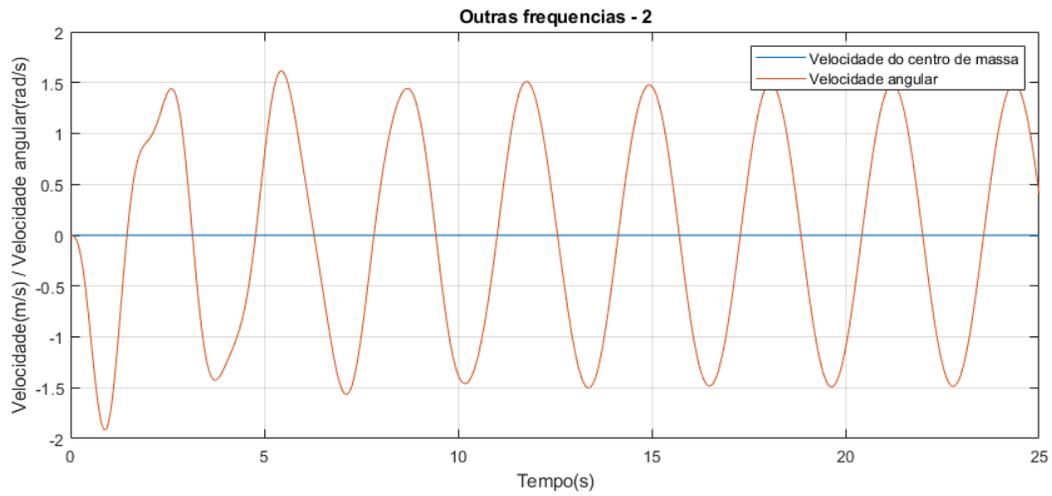


Figura 6: Entrada senoidal alternada, 2 rad/s



- Utilizando  $\omega = 15\text{rad/s}$

Figura 7: Entrada senoidal não alternada, 15 rad/s

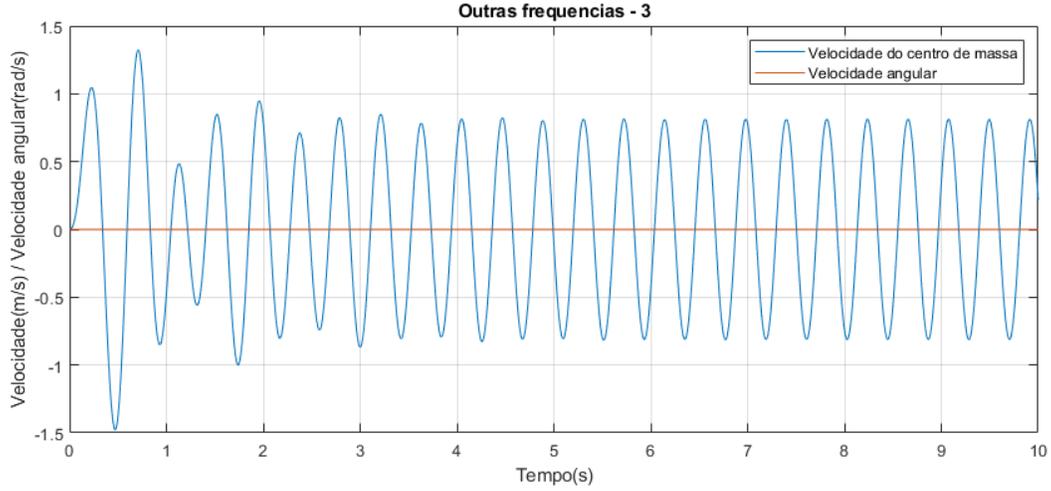
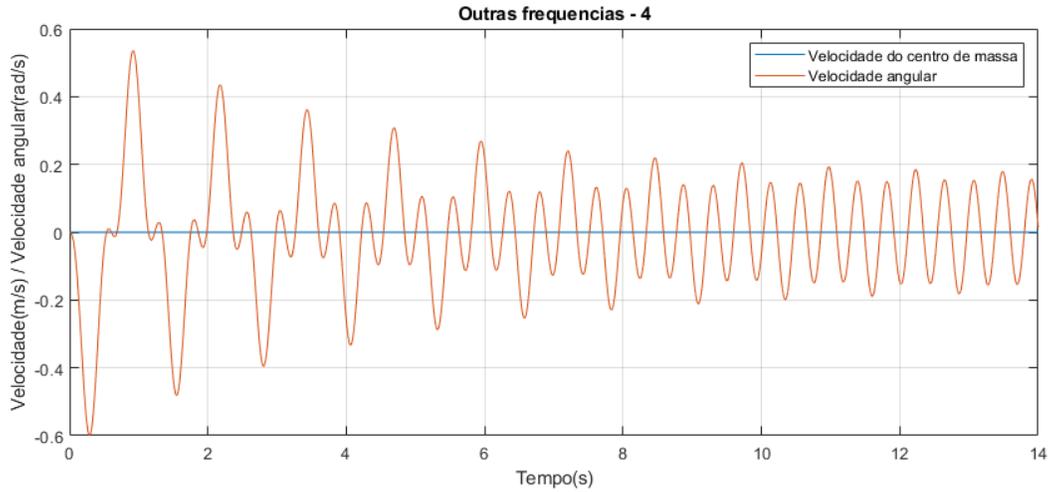


Figura 8: Entrada senoidal alternada, 15 rad/s



Os resultados fazem sentido do ponto de vista físico, com entradas alternadas apenas variando a velocidade angular, e entradas em fase apenas variando a velocidade do centro de gravidade.

Analisando as respostas após o transiente, observa-se que as amplitudes de oscilação são maiores perto de 10 e 5 rad/s ( caso não alternado e alternado), e menores longe desses valores. Desse modo, as frequências de ressonância de cada modo de vibração devem ser próximas de tais valores.

Os polos do sistema são:

$$p_1 = -1 + 9,9499i \quad (8)$$

$$p_2 = -1 - 9,9499i \quad (9)$$

$$p_3 = -0,2500 + 4,9937i \quad (10)$$

$$p_4 = -0,2500 - 4,9937i \quad (11)$$

São dois pares de polos complexos conjugados. Cada um deles representa um modo de oscilar (oscilação vertical e rotacional) e possui sua própria frequência natural, fator de amortecimento, frequência amortecida, e frequência de ressonância, calculadas a partir dos polos e dadas a seguir:

$$\omega_{n1} = 10 \qquad \qquad \qquad \omega_{n2} = 5 \qquad \qquad \qquad (12)$$

$$\zeta_1 = 0,1 \qquad \qquad \qquad \zeta_2 = 0,05 \qquad \qquad \qquad (13)$$

$$\omega_{d1} = 9,9499 \qquad \qquad \qquad \omega_{d2} = 4,9937 \qquad \qquad \qquad (14)$$

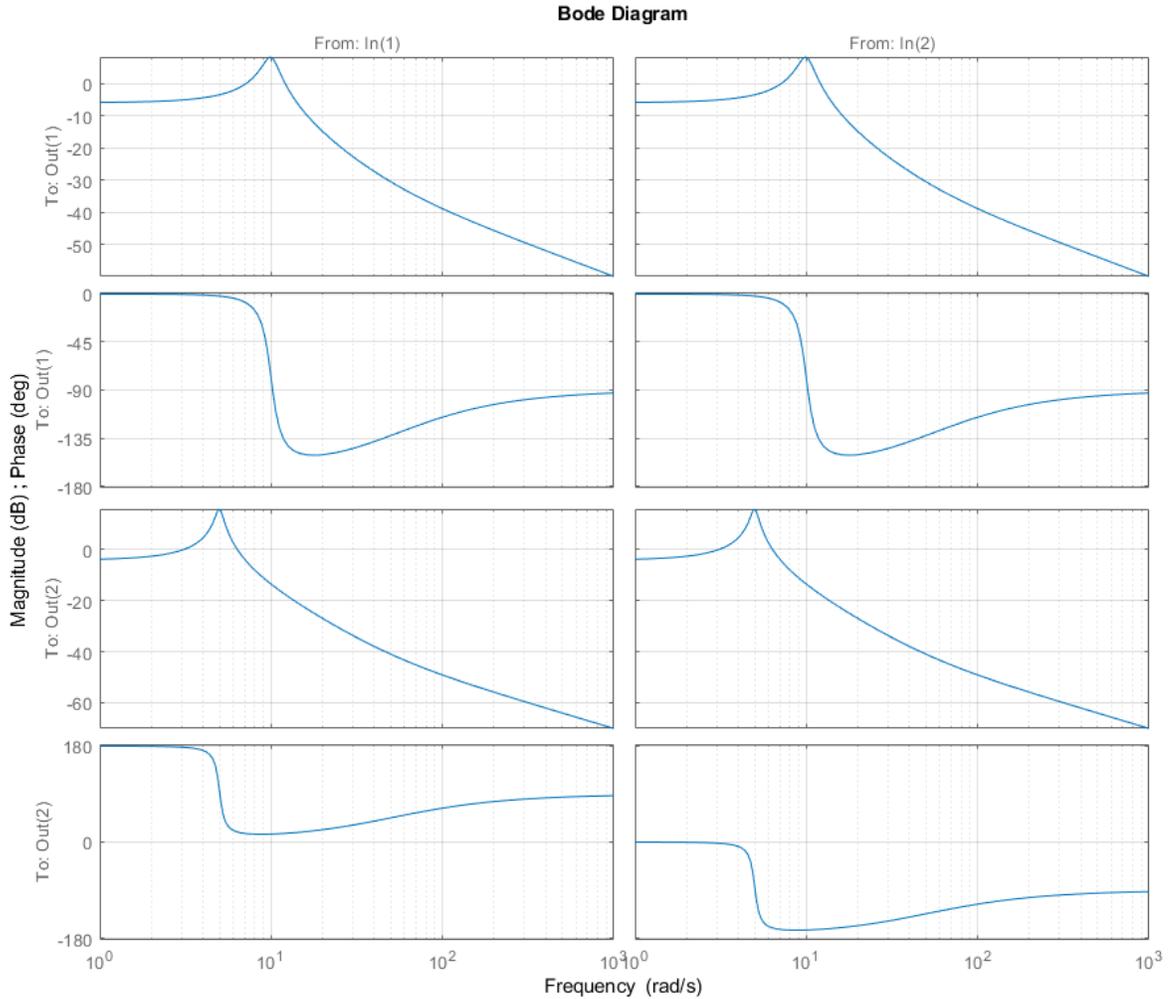
$$\omega_{r1} = 9,8995 \qquad \qquad \qquad \omega_{r2} = 4,987 \qquad \qquad \qquad (15)$$

Nota-se que a as frequências de ressonância são, de fato, próximas das estimadas, que a oscilação vertical (modo 1) tem o dobro da frequência natural da oscilação rotacional (modo 1), e que o fator de amortecimento do modo 1 é maior, que pôde ser observado na figura 2.

**3. Obtenha os diagramas de Bode do sistema de suspensão e interprete os resultados.**

Os diagramas de bode do sistema estão apresentados na figura 9:

Figura 9: Diagramas de Bode do sistema



Como há duas entradas e duas saídas, são gerados ao todo 4 diagramas de bode para a magnitude e 4 para a fase. Na coluna da esquerda estão os diagramas para a entrada  $V_C$ , na coluna da direita estão os para a entrada  $V_D$ . Eles são idênticos, com exceção da variação em 180 graus da fase da velocidade angular para entrada  $V_C$ , pois tal entrada provoca uma rotação negativa no chassi do carro. Para uma mesma entrada (mesma coluna), os diagramas se comportam como sistemas de segunda ordem sub-amortecidos, com picos em aproximadamente 5 rad/s e 10 rad/s, e diminuição de fase em 180 graus em torno da frequência natural de oscilação. Porém, devido à presença de um zero real em -50 (no plano complexo), há uma pequena variação, com a fase se elevando 90 graus, e a curva de magnitude, que possuía inclinação de 40dB por década passa a ter 20dB por década.

Modele um sistema não linear de suspensão veicular do tipo 1/4 de carro, incluindo a massa não suspensa (2 graus de liberdade), com três entradas, a velocidade  $v_G$  imposta pelo movimento do veículo, uma força de perturbação  $F$  e uma força de controle  $u$ . Implemente a simulação do sistema não linear (considerando as não linearidades do exemplo da suspensão de 1/4 de carro sem massa suspensa, e adicionando a saturação da entrada  $u$ , etc.).

Quando em contato com o chão, e com a mola não totalmente comprimida, o sistema pode ser representado pelo sistema de equações:

$$\dot{v}_s = \frac{k_S}{m_S}x - \frac{k_S}{m_S}x_s + \frac{b}{m_S}v - \frac{b}{m_S}v_s + \frac{1}{m_S}u - \frac{F}{m_S} - g \quad (16)$$

$$\dot{v} = \frac{k}{m}l - \frac{(k + k_S)}{m}x + \frac{k_S}{m}x_s - \frac{b}{m}v + \frac{b}{m}v_s + \frac{k}{m}x_G - g \quad (17)$$

Quando não está em contato com o chão ( $x - x_G < l$ ), as equações do movimento são:

$$\dot{v}_s = \frac{k_S}{m_S}x - \frac{k_S}{m_S}x_s + \frac{b}{m_S}v - \frac{b}{m_S}v_s + \frac{1}{m_S}u - \frac{F}{m_S} - g \quad (18)$$

$$\dot{v} = \frac{k_S}{m}x_s - \frac{k_S}{m}x - \frac{b}{m}v + \frac{b}{m}v_s - g \quad (19)$$

Finalmente, quando está em contato e chegou no batente, as equações são:

$$\dot{v}_s = \frac{k_S}{m_S}x - \frac{k_S}{m_S}x_s + \frac{b}{m_S}v - \frac{b}{m_S}v_s + \frac{1}{m_S}u - \frac{F}{m_S} - g \quad (20)$$

$$\dot{v} = \frac{k_b}{m}l - \frac{(k_b + k_S)}{m}x + \frac{k_S}{m}x_s - \frac{b}{m}v + \frac{b}{m}v_s + \frac{k_b}{m}x_G - g \quad (21)$$

# ANEXO A

Figura 10: Desenvolvimento matemático

• Lista G - Enzo Zugliani - 10333741

$\rightarrow v_a = \dot{x}_a + v_c$   
 $\rightarrow v_b = \dot{x}_b + v_c$   
 $\rightarrow v_c = v_a + l_a \cdot \omega$   
 $\rightarrow v_b = v_c + l_b \cdot \omega$

• TMB:

$$\begin{aligned}
 \cdot M \cdot \dot{v}_c &= -k_a \cdot x_a - k_b \cdot x_b - b_a \cdot \dot{x}_a - b_b \cdot \dot{x}_b = \\
 &= -k_a \cdot x_a - k_b \cdot x_b - b_a (v_a - v_c) - b_b (v_b - v_c) = \\
 &= -k_a \cdot x_a - k_b \cdot x_b - b_a (v_c - l_a \cdot \omega - v_c) - b_b (v_c + l_b \cdot \omega - v_c);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \dot{v}_c &= \frac{-k_a \cdot x_a}{M} - \frac{k_b \cdot x_b}{M} - \frac{b_a \cdot v_c}{M} + \frac{b_a \cdot l_a \cdot \omega}{M} + \frac{b_a \cdot v_c}{M} \\
 &\quad - \frac{b_b \cdot v_c}{M} - \frac{b_b \cdot l_b \cdot \omega}{M} + \frac{b_b \cdot v_c}{M}
 \end{aligned}$$

• TMA:

$$\begin{aligned}
 \cdot J \cdot \dot{\omega} &= l_b \cdot (-k_b \cdot x_b - b_b \cdot (v_c + l_b \cdot \omega - v_c)) \\
 &\quad - l_a \cdot (-k_a \cdot x_a - b_a \cdot (v_c - l_a \cdot \omega - v_c)) = 0 \\
 \Rightarrow \dot{\omega} &= \frac{-l_b \cdot k_b \cdot x_b}{J} - \frac{l_b \cdot b_b \cdot v_c}{J} - \frac{l_b^2 \cdot b_b \cdot \omega}{J} + \frac{l_b \cdot b_b \cdot v_c}{J} \\
 &\quad + \frac{l_a \cdot k_a \cdot x_a}{J} + \frac{l_a \cdot b_a \cdot v_c}{J} - \frac{l_a^2 \cdot b_a \cdot \omega}{J} - \frac{l_a \cdot b_a \cdot v_c}{J}
 \end{aligned}$$

• Relações com  $\dot{x}_a$  e  $\dot{x}_b$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \dot{x}_a &= v_a - v_c = v_c - l_a \cdot \omega - v_c \\
 \Rightarrow \dot{x}_b &= v_b - v_c = v_c + l_b \cdot \omega - v_c
 \end{aligned}$$