



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista G

Nome: Yago Neves Yang

Número USP: 10772626

Disciplina: PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Docentes: Décio Crisol e Agenor Fleury

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	MODELO DE 1/2 DE CARRO	3
2.1	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E REPRESENTAÇÃO NA FORMA DE ESPAÇO DE ESTADOS	4
2.2	SIMULAÇÕES	5
2.2.1	<i>Entrada degrau</i>	6
2.2.2	<i>Entradas senoidais</i>	8
2.3	DIAGRAMAS DE <i>BODE</i>	10
3	BIBLIOGRAFIA	11
4	APÊNDICE	12

1 INTRODUÇÃO

Nesta lista serão abordados dois sistemas dinâmicos relacionados à um carro: o modelo de 1/2 carro e o modelo de suspensão de 1/4 de carro. Serão feitas representação das equações envolvidas em cada modelo, bem como a confecção de gráficos relevantes à interpretação de cada um destes sistemas.

2 MODELO DE 1/2 DE CARRO

O modelo a ser desenvolvido é o mostrado na figura logo abaixo.

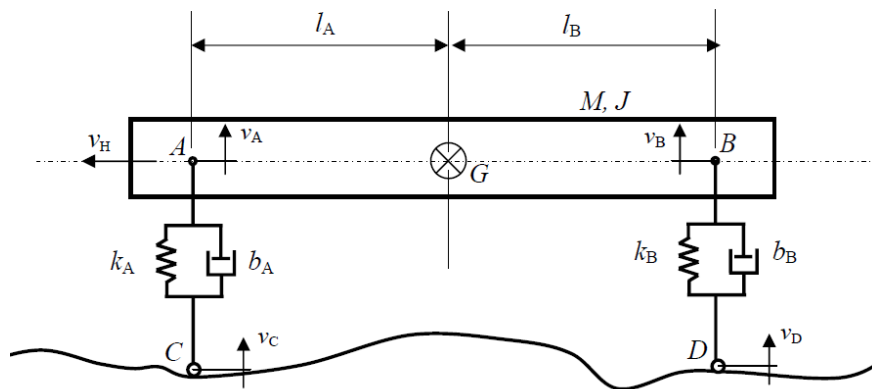


Figura 1 - Modelo veicular a ser estudado.

Antes de se iniciar o estudo do movimento do sistema apresentado é preciso inicialmente fazer considerações iniciais. A primeira delas é que será estudada apenas a dinâmica vertical do modelo, desprezando-se o movimento horizontal do centro de massa. Além disso, o movimento se dá apenas no plano da página; AC e BC permanecem sempre na vertical; as molas e amortecedores são lineares; e AB tem deslocamento angular pequeno.

Cabe ainda fazer a consideração de que serão consideradas quatro variáveis de estado: velocidade vertical v_g do centro de massa; velocidade angular ω de AB em torno do centro de massa; elongação x_A da mola de constante k_A ; e elongação x_B da mola de constante k_B . Além disso, as entradas do sistema serão as velocidade dos pontos C e D (v_C e v_D respectivamente) e as saídas serão a velocidade vertical do centro de massa e a velocidade angular de AB em torno de G.

O objetivo principal a partir de agora em diante então será definir as equações de movimento do modelo com base nas variáveis de estado apresentadas anteriormente.

2.1 Equações do movimento e representação na forma de espaço de estados

Pede-se representar as equações do movimento na forma do espaço estados assim como descrito a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= Ap(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cp(t) + Du(t) \\ p(t) &= \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}; u(t) = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Imediatamente pode-se determinar as matrizes C e D do sistema, que seguem abaixo.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0$$

As matrizes A e B requerem o desenvolvimento das equações do movimento do modelo para serem bem definidas. Para tanto, primeiramente fazemos a aplicação da segunda lei de Newton para os pontos A, B e G, supondo maior deslocamento para cima do ponto B que do ponto A. As forças nos pontos A e B são as seguintes.

$$F_A = k_A x_A + b_A \dot{x}_A$$

$$F_B = -k_B x_B - b_B \dot{x}_B$$

Aplicando a segunda lei de Newton (teorema da resultante) para o centro de massa G vem o seguinte.

$$M\dot{v}_G = k_A x_A + b_A \dot{x}_A - k_B x_B - b_B \dot{x}_B$$

Em seguida aplicando o equivalente para a rotação de AB em torno do centro de massa, tem-se o seguinte.

$$J\dot{\omega} = l_A(k_A x_A + b_A \dot{x}_A) + l_B(-k_B x_B - b_B \dot{x}_B)$$

Ainda é necessário definir equações para as elongações das molas. Observando a massa da suspensão, tem-se as seguintes relações (já aplicando a condição de pequenos ângulos).

$$x_A = x_G - x_C - l_A \theta \rightarrow \dot{x}_A = v_G - v_C - l_A \omega$$

$$x_B = x_G - x_D + l_B \theta \rightarrow \dot{x}_B = v_G - v_D + l_B \omega$$

Usando essas relações nas equações das variáveis anteriores, tem-se o seguinte.

$$M\dot{v}_G = k_A x_A + b_A v_G - b_A l_A \omega - b_A v_C - k_B x_B - b_B v_G - b_B l_B \omega + b_B v_D$$

$$J\dot{\omega} = l_A(k_A x_A + b_A v_G - b_A l_A \omega - b_A v_C) + l_B(-k_B x_B - b_B v_G - b_B l_B \omega + b_B v_D)$$

Finalmente, pode-se escrever as matrizes A e B do sistema na forma de espaço de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ \frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & \frac{b_A - b_B}{M} & \frac{-b_A l_A - b_B l_B}{M} \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{J} & \frac{-l_A^2 b_A - l_B^2 b_B}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{l_A b_A}{J} & \frac{l_B b_B}{J} \end{bmatrix}$$

2.2 Simulações

Com o sistema de equações na forma de espaço de estados bem definido, é possível fazer simulações no ambiente *Scilab* sob diferentes condições. Serão simulados dois tipos de entradas: uma do tipo degrau e outra do tipo senoidal. Os parâmetros a serem adotados ao longo das simulações estão descritos na tabela abaixo.

Tabela 1 - Parâmetros das simulações

Parâmetro	Valor
M	200 Kg
J	512 Kg m^2
$l_a = l_b$	0,8 m
$k_A = k_B$	10.000 N/m
$b_A = b_B$	200 N.s/m
v_H	10 m/s

2.2.1 Entrada degrau

A entrada degrau a ser adotada é descrita logo abaixo.

$$v_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$v_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases}$$

Onde $t_d = \frac{l_A + l_B}{v_H} = 0,16$ s, que é o tempo que o ponto D leva a mais que o ponto C para atingir

o degrau.

Para tal entrada foram obtidos os seguintes gráficos.

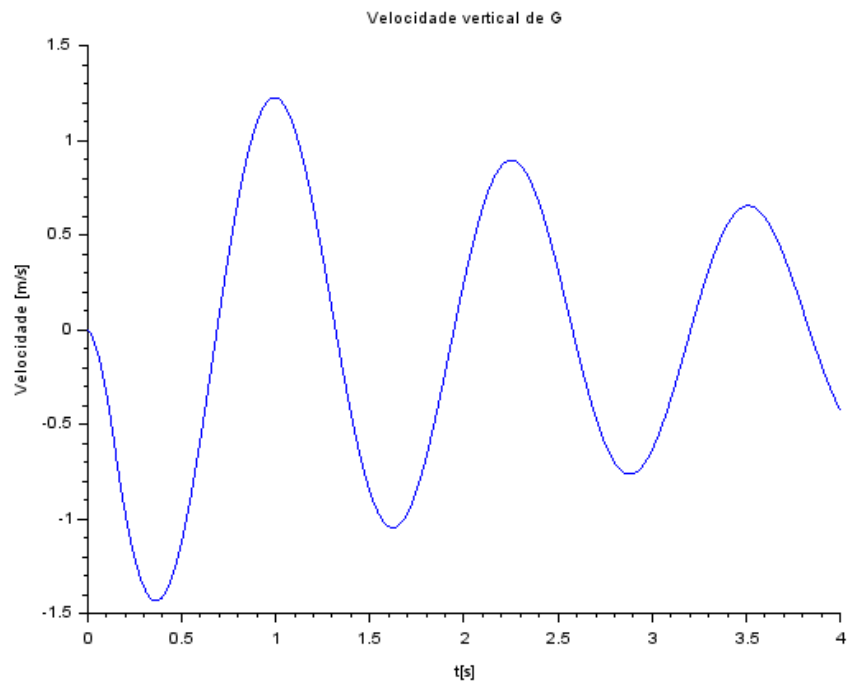


Figura 2 - Velocidade vertical de G

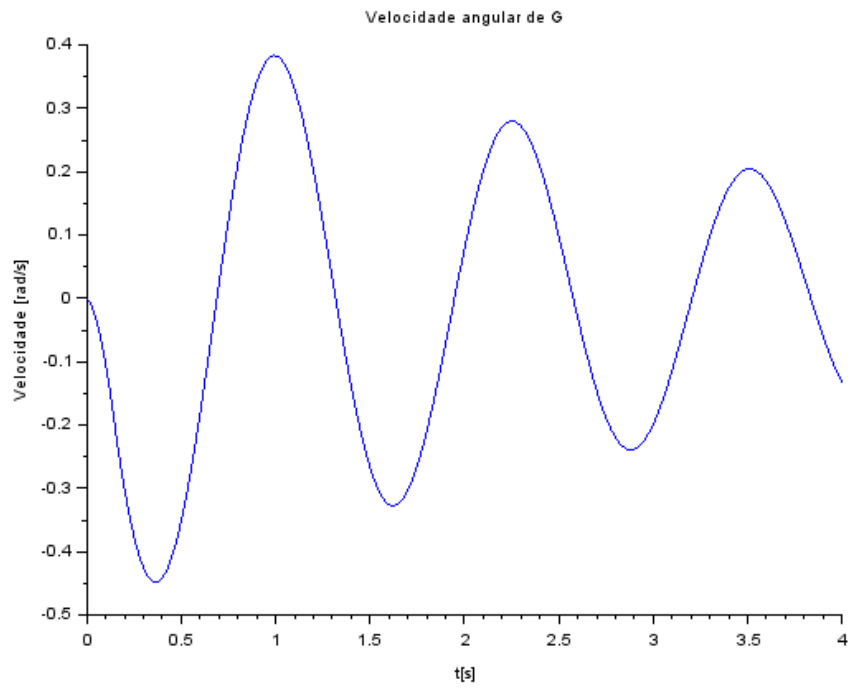


Figura 3 - Velocidade angular de G

2.2.2 Entradas senoidais

Para uma entrada senoidal do tipo $v_c = v_D = \sin(9,8995t)$ tem-se os seguintes gráficos.

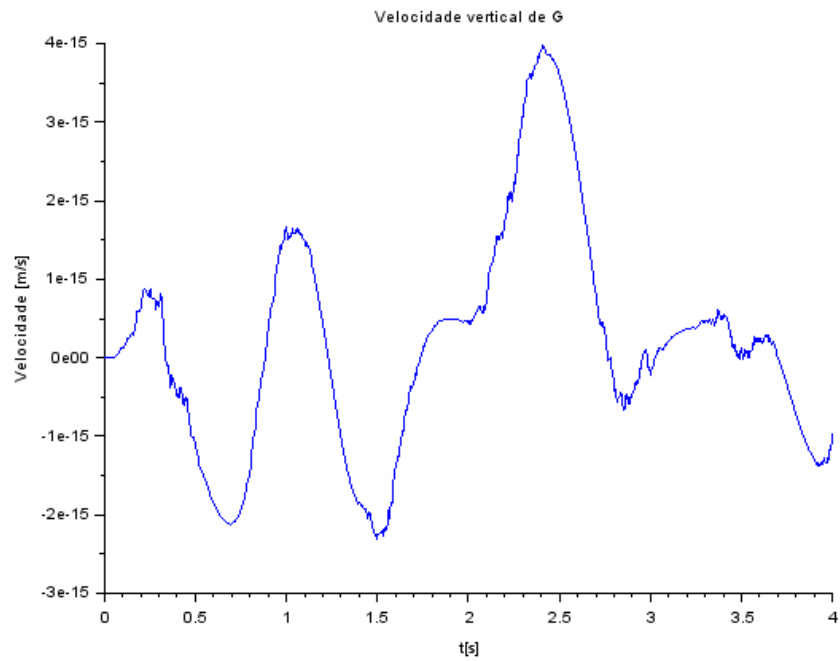


Figura 4 - Velocidade vertical de G

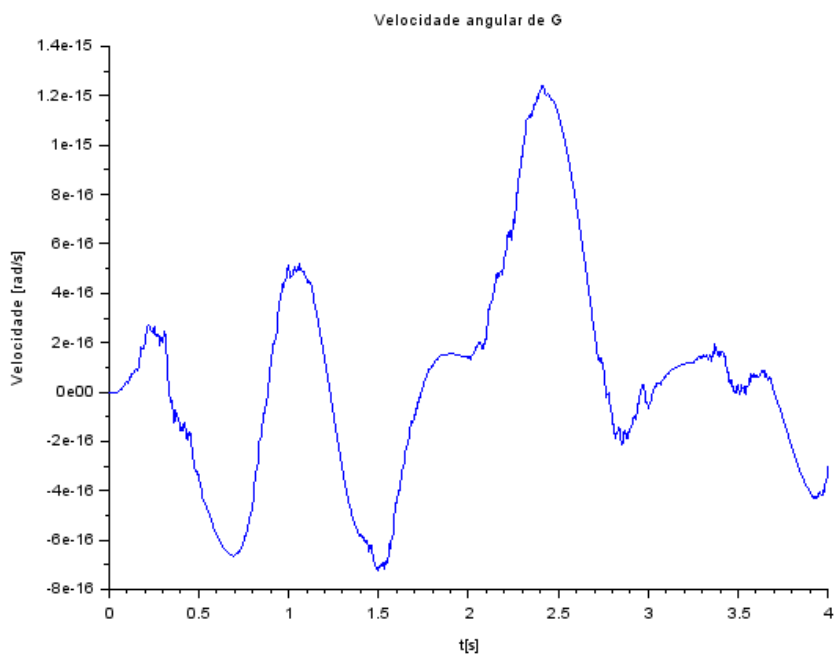


Figura 5 - Velocidade angular de G

Para entrada senoidal do tipo $v_C = -v_D = \sin(4,9875t)$ tem-se os seguintes gráficos.

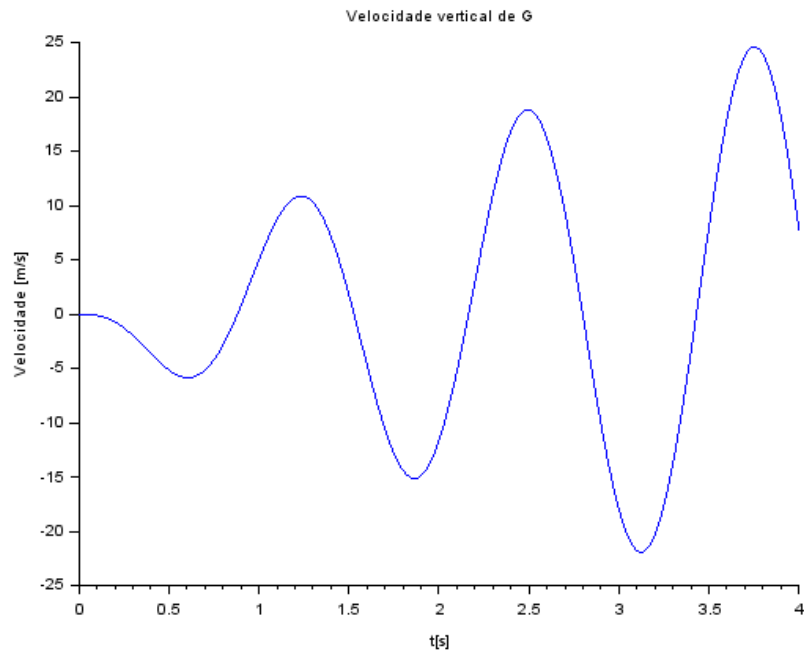


Figura 6 - Velocidade vertical de G

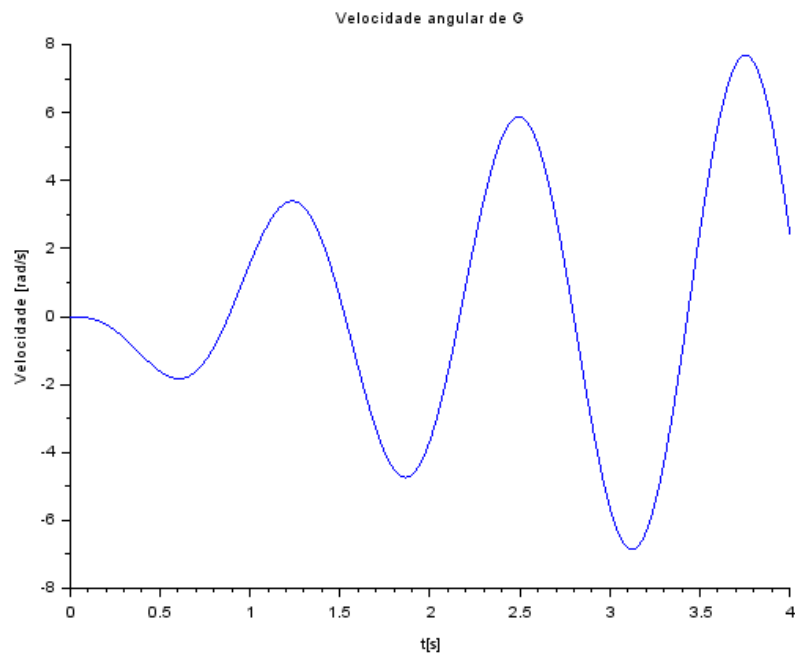


Figura 7 - Velocidade angular de G

2.3 Diagramas de bode

Voltando-se ao caso de entrada degrau, foi possível obter os seguintes diagramas de bode.

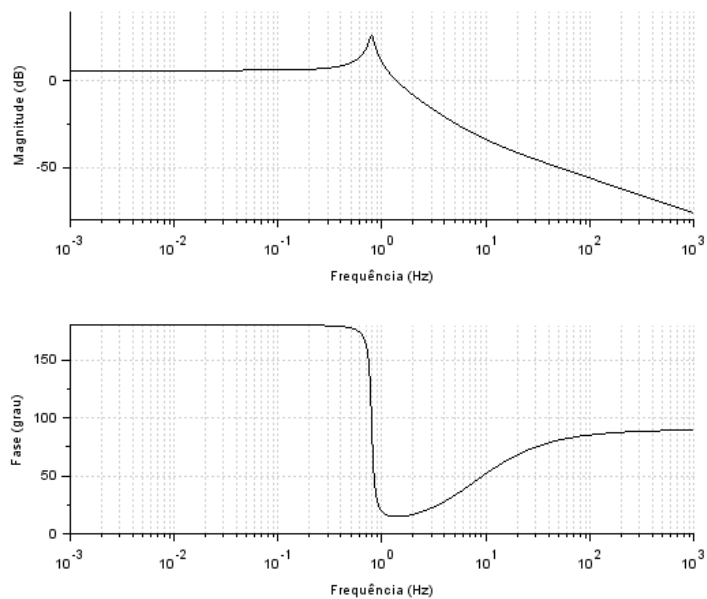


Figura 8 - Diagramas para a variável x_A

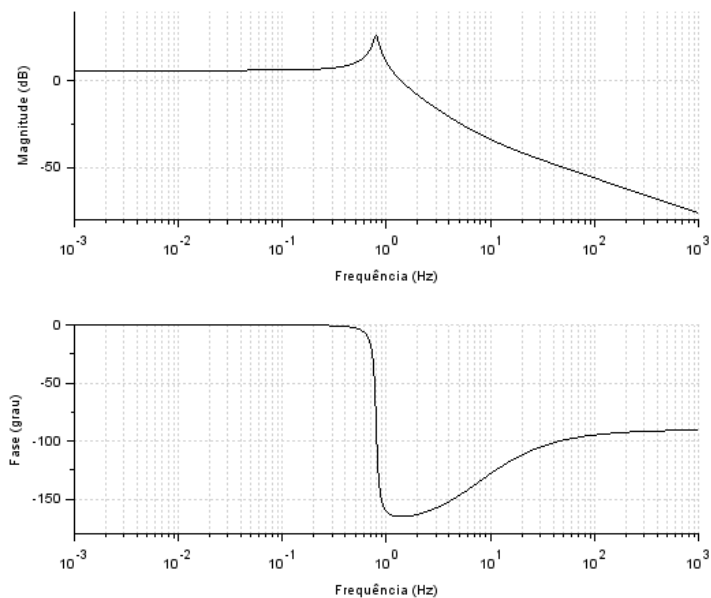


Figura 9 - Diagramas para a variável x_B

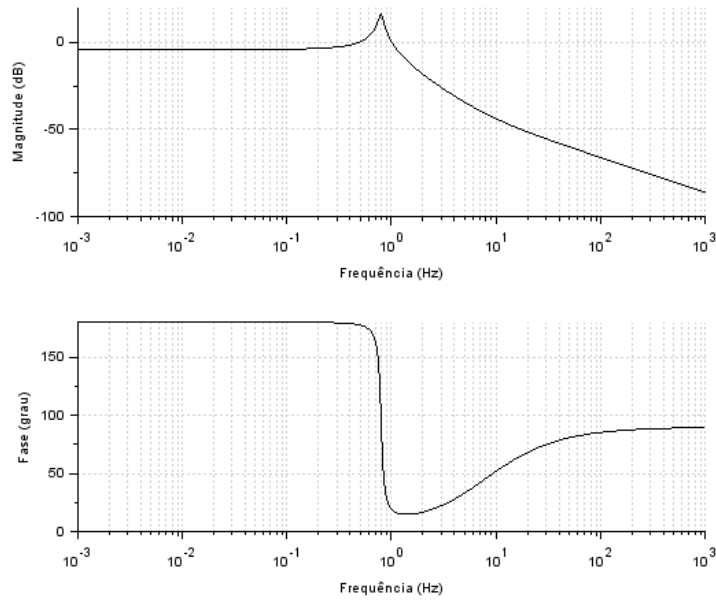


Figura 10 - Diagramas para a variável v_G

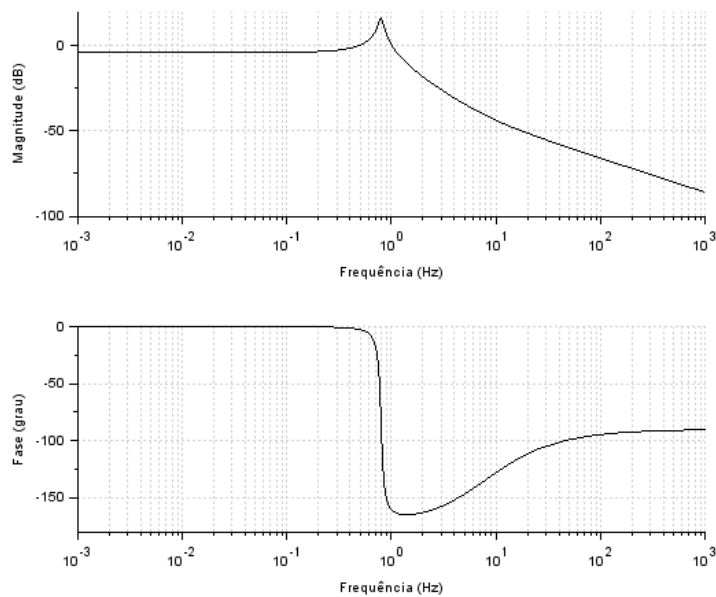


Figura 11 - Diagramas para a velocidade angular

3 BIBLIOGRAFIA

Autor desconhecido – **Lista G** – Acesso em 28/09/2020. Documento PDF disponível no site da disciplina de PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos.

4 APÊNDICE

```
// Definindo os parâmetros do sistema:
M = 200;
J = 512;
l_a = 0.8;
l_b = 0.8;
k_a = 10000;
k_b = 10000;
b_a = 200;
b_b = 200;
// Matrizes do sistema:
A = [0,0,1,-l_a;0,0,1,l_b;k_a/M,-k_b/M,(b_a-b_b)/M,-(b_a*l_a+b_b*l_b)/M;l_a*k_a/J,-
l_b*k_b/J,(l_a*b_a-l_b*b_b)/J,(-b_a*l_a^2-b_b*l_b^2)/J];
B = [-1,0;0,-1;-b_a/M,b_b/M;-l_a*b_a/J,l_b*b_b/J];
C=[0,0,1,0;0,0,0,1];
D=[0,0;0,0];
// Montando o sistema:
carro=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=linspace(0,4,1000);
// Definindo a entrada:
// Degrau:
v_c = ones(t);
v_d = ones(t);
for i = 1:length(t)
    if t(i)<0.16 then
        v_d(i) = 0;
    end
end
// Entradas senoidais:
// v_c = sin(9.8995*t)
// v_d = v_c;
// v_c = sin(4.9875*t);
// v_d = -v_c;
u = [v_c;v_d];
// Condições iniciais:
x0=[0;0;0;0];

[y,x]=csim(u,t,carro,x0);

// Plotando os resultados:
xset('window',1);
plot2d(t,y(1,:),2)
xtitle('Velocidade vertical de G','t[s]','Velocidade [m/s]');
xset('window',2);
plot2d(t,y(2,:),2)
xtitle('Velocidade angular de G','t[s]','Velocidade [rad/s]');

tf = ss2tf(carro);
```

```
scf(3);  
bode(tf(1,1));  
scf(4);  
bode(tf(1,2));  
scf(5);  
bode(tf(2,1));  
scf(6);  
bode(tf(2,2));
```