

# **MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS**

**PME3380**

**LISTA G**

Lucas Nigro Matheo - 10772911

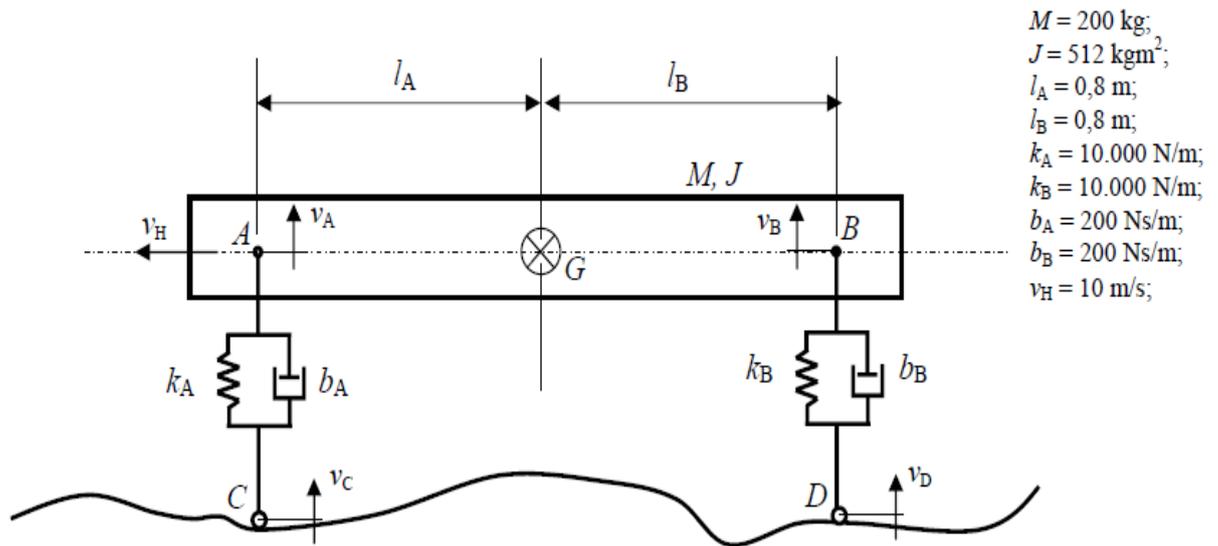
Professores:

Dr. Décio Crisol Donha

Dr. Agenor de Toledo Fleury

## 1. MODELO DE 1/2 DE UM CARRO:

Conforme as propostas demonstradas na Lista G, definidas a seguir:



### Modelo da dinâmica vertical:

A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de  $G$  ( $v_H$ ) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa  $G$ .
- velocidade angular  $\omega$  de  $AB$  em torno de  $G$ .
- elongação  $x_A$  da mola de rigidez  $k_A$ .
- elongação  $x_B$  da mola de rigidez  $k_B$ .

Entradas: velocidades verticais ( $v_C$  e  $v_D$ ) dos pontos  $C$  e  $D$ .

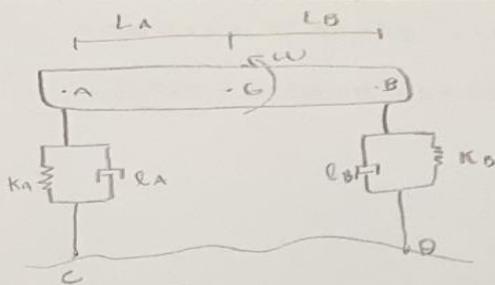
Saídas: velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa  $G$  e velocidade angular  $\omega$  de  $AB$  em torno de  $G$ .

### Hipóteses simplificadoras:

- Movimento apenas no plano da página.
- $AC$  e  $BD$  permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento  $AB$  é pequeno (tal que  $\text{sen}\alpha \cong \text{tan}\alpha \cong \alpha$  e  $\text{cos}\alpha \cong 1$ ).

### Obtenção do modelo proposto:

Para obter a dinâmica do sistema, utilizaremos a abordagem de Lagrange.



$$T = \frac{M x_G^2}{2} + \frac{J \dot{w}^2}{2}$$

$$V = \frac{K_A x_A^2}{2} + \frac{K_B x_B^2}{2}$$

$$R = \frac{\rho_A (x_G - L_A w - v_C)^2}{2} + \frac{\rho_B (x_G + L_B w - v_D)^2}{2}$$

$$L = T - V$$

Podemos escrever os deslocamentos das molas como

$$x_A = x_G - L_A \theta - x_C$$

$$x_B = x_G + L_B \theta - x_D$$

\* Assumindo pequenos deslocamentos angulares:  $\sin \theta \approx \theta$

Para  $x_G$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = M \dot{x}_G \longrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} \right) = M \ddot{x}_G$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = -K_A (x_G - L_A \theta - x_C) - K_B (x_G + L_B \theta - x_D)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_G} = \rho_A (x_G - L_A w - v_C) + \rho_B (x_G + L_B w - v_D)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = Q_{ext}$$

$$M \ddot{x}_G + K_A \underbrace{(x_G - L_A \theta - x_C)}_{x_A} + K_B \underbrace{(x_G + L_B \theta - x_D)}_{x_B} + \rho_A (x_G - L_A w - v_C) + \rho_B (x_G + L_B w - v_D) = 0$$

$$M \ddot{x}_G = -K_A x_A - K_B x_B - \rho_A (x_G - L_A w) - \rho_B (x_G + L_B w) + \rho_A v_C + \rho_B v_D$$

Para  $\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = J \dot{w} \longrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) = T \dot{w}, \quad w = \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K_A (x_G - L_A \theta - x_C) (-L_A) - K_B (x_G + L_B \theta - x_D) L_B =$$

$$= K_A L_A x_A - K_B L_B x_B$$

$$\frac{\partial R}{\partial w} = -L_A \rho_A (x_G - L_A w - v_C) + L_B \rho_B (x_G + L_B w - v_D)$$

$$J \dot{w} - K_A L_A x_A + K_B L_B x_B - L_A \rho_A (x_G - L_A w - v_C) + L_B \rho_B (x_G + L_B w - v_D) = 0$$

$$J \dot{w} = K_A L_A x_A - K_B L_B x_B + L_A \rho_A (x_G - L_A w) - L_B \rho_B (x_G + L_B w) - L_A \rho_A v_C + L_B \rho_B v_D = 0$$

Obtida a dinâmica do sistema, é fácil determinar as matrizes A, B, C e D, pois o sistema é linear nas variáveis de análise. Tem-se:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

Onde:

$$X = [x_A, x_B, \dot{x}_G, w]^T$$

$$Y = [\dot{x}_G, w]$$

$$U = [v_c, v_d]$$

As matrizes ficam, com  $L_a = L_b = L$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 1 & L \\ -\frac{K_A}{M} & -\frac{K_B}{M} & -\frac{(l_A + l_B)}{M} & \frac{L(l_A - l_B)}{M} \\ \frac{K_A L}{J} & -\frac{K_B L}{J} & \frac{L(l_A - l_B)}{J} & -\frac{(l_A + l_B)L^2}{J} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{l_A}{M} & \frac{l_B}{M} \\ -\frac{L l_A}{J} & \frac{L l_B}{J} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = [0]$$

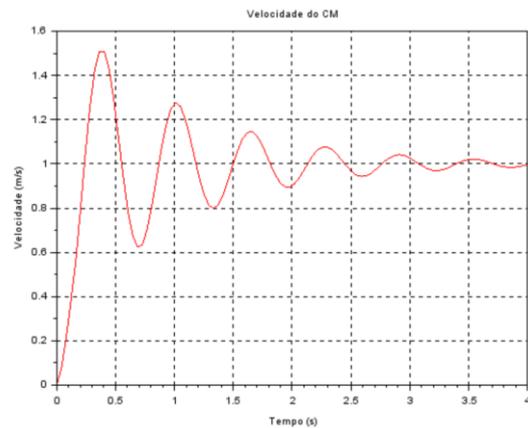
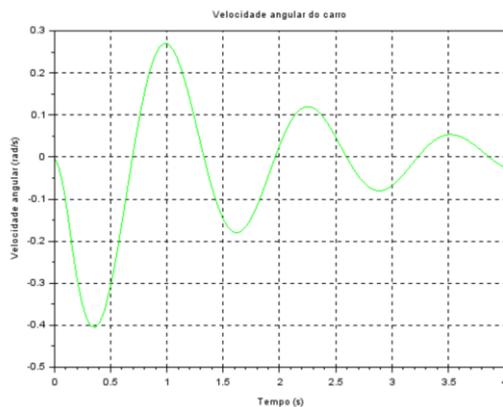
## 2. SIMULAÇÕES

### 2.1 Entrada degrau

Primeiro, é necessário calcular  $td$ . Considerando que as variações angulares são pequenas e que a velocidade horizontal do corpo é contante, podemos considerar um movimento uniforme e achar o instante  $td$ , que significa o instante de aplicação do degrau em D após aplicação em C:

$$td = \frac{La + Lb}{Vh} \rightarrow td = \frac{0.8 + 0.8}{10} = 0.16 \text{ s}$$

Foi elaborado um código no software scilab para obtenção das respostas dinâmicas com as diferentes entradas. Para a entrada degrau, obteve-se:



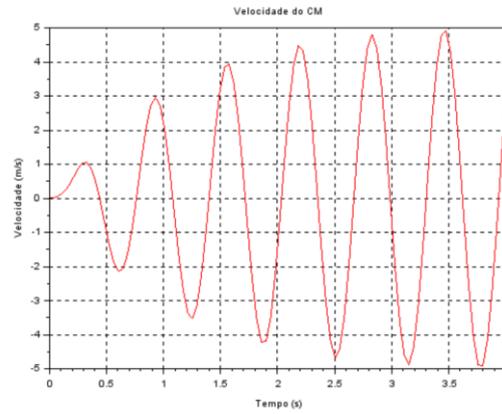
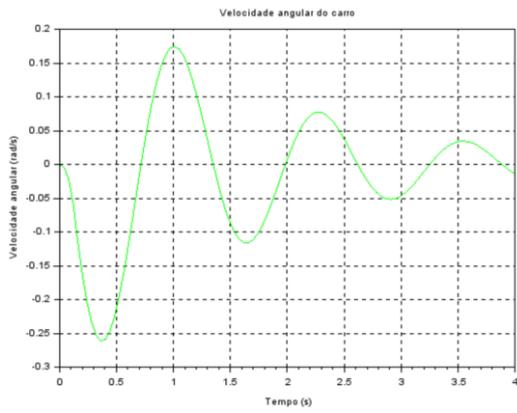
A entrada em degrau pode representar uma subida, por exemplo, uma vez que aplica uma velocidade constante nas “rodas” do modelo de carro.

### 2.2 Entrada senoidal 1

Considerando o primeiro conjunto de entradas, em que:

$$vc = vd = \sin(9.8995t)$$

As respostas obtidas foram:

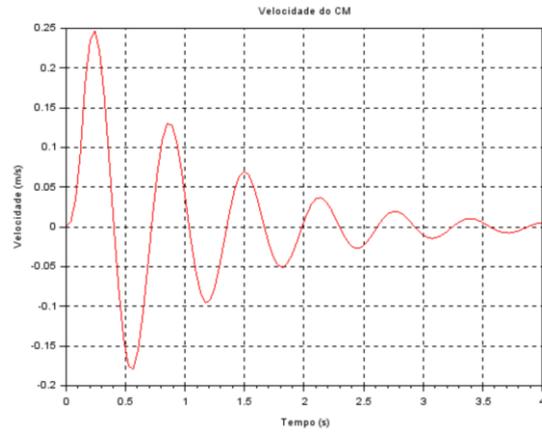
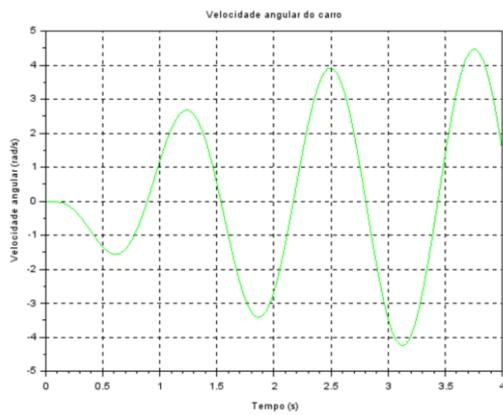


### 2.3 Entrada senoidal 2

Considerando o primeiro conjunto de entradas, em que:

$$vc = -vd = \sin(4.9875t)$$

As respostas obtidas foram:

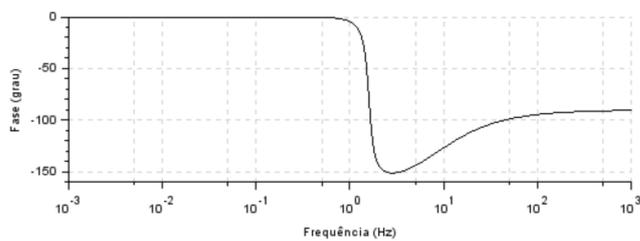
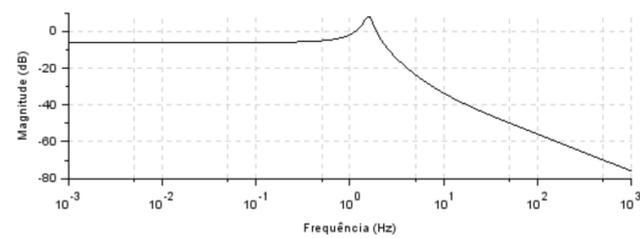


### 3 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

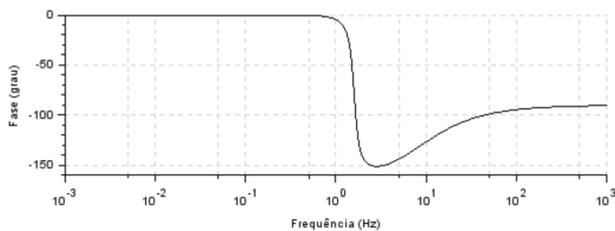
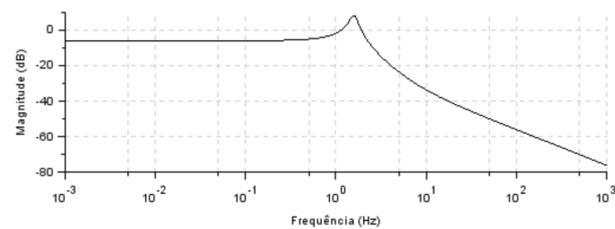
Por meio do software scilab, também foi utilizado no próprio programa as funções necessárias para a obtenção das funções de transferência e dos diagramas de Bode.

Abaixo é possível observar os diagramas de Bode que relacionam as saídas com as entradas.

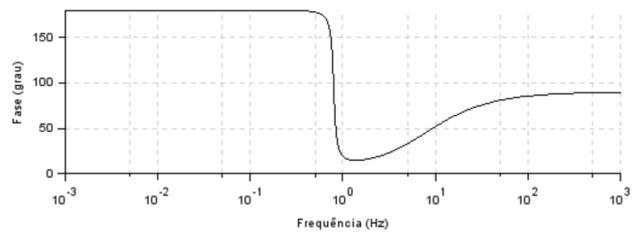
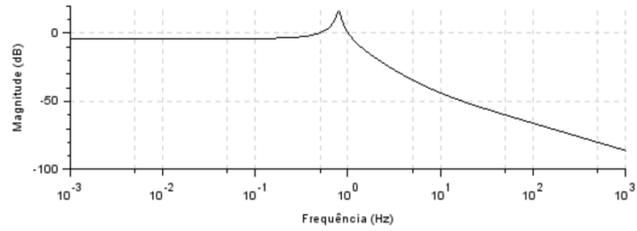
$G(1,1)$



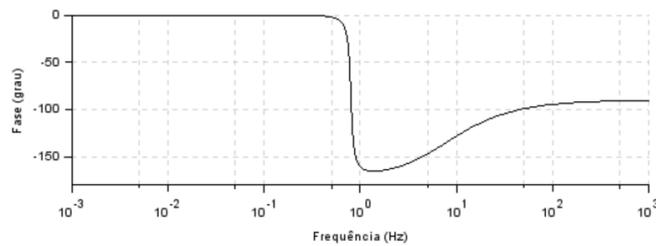
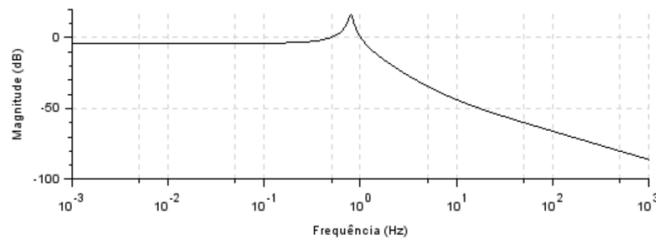
$G(1,2)$



### $G(2,1)$



### $G(2,2)$



É interessante notar que os diagramas demonstram aspectos de ressonância do sistema, nos picos de magnitude.

## 4. ESTABILIDADE

Utilizando novamente o software scilab, obteve-se as funções de transferência e os polos do sistema sob análise, a fim de se determinar a estabilidade do sistema.

As funções de transferência podem ser observadas a seguir, onde aparecem, respectivamente,  $G(1,1)$ ,  $G(1,2)$ ,  $G(2,1)$  e  $G(2,2)$ :

$$\begin{array}{r} \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2} \\ - \frac{15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2} \\ \frac{15.625 + 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \end{array}$$

Tendo o sistema no domínio da frequência, é possível analisar sua estabilidade pelos polos do sistema, achando as raízes de P, exposto abaixo:

$$2500 + 100s^2 + 126s^3 + 2.5s^4$$

As raízes obtidas foram:

$$\begin{array}{l} - 1. + 9.9498744i \\ - 1. - 9.9498744i \\ - 0.25 + 4.9937461i \\ - 0.25 - 4.9937461i \end{array}$$

Percebe-se que as parcelas reais são todas negativas, o que garante certa estabilidade ao sistema.

## 5. ANEXO

```
clear();
xdel(winsid());

M = 200;
J = 512;
L = 0.8;
K = 10000;
b = 200;
vH = 10;
td = (L + L)/vH;
disp(td)

t0 = 0;
tf = 4;
t = linspace(t0,tf,100);
condicao = input("qual condição de entrada quer?: ")

xA0 = 0;
xB0 = 0;
xpG0 = 0;
w0 = 0;

if condicao == 1 then
    function fun=u1(t)
        if t < 0 then
            fun = 0
        else
            fun = 1
        end
    endfunction

    function fun2=u2(t)
        if t <td then
            fun2 = 0
        else
            fun2 = 1
        end
    endfunction
end
if condicao ==2 then
    function fun3=u1(t)
        if t < 0 then
            fun3 = 0
        else
            fun3 = sin(9.8995*t)
        end
    endfunction

    function fun4=u2(t)
        if t<td then
            fun4 = 0
        else
            fun4 = sin(9.8995*t)
        end
    endfunction
end
if condicao == 3 then
```

```

function fun5=u1(t)
    if t < 0 then
        fun5 = 0
    else
        fun5 = sin(4.9875*t)
    end
endfunction

function fun6=u2(t)
    if t<td then
        fun6 = 0
    else
        fun6 = -sin(4.9875*t)
    end
endfunction

end
//Definição do vetor de dinamica:
funcprot(0)
function dy=dinamica(t, y)
    dy(1) = y(3) - L*y(4) - u1(t);
    dy(2) = y(3) + L*y(4) - u2(t);
    dy(3) = -(K/M)*y(1) - (K/M)*y(2) - ((b + b)/M)*y(3) + ((b*L - b*L)/M)*y(4) + (1/M)*(b*u1(t) + b*u2(t));
    dy(4) = (L*K/J)*y(1) - (L*K/J)*y(2) + ((L*b - L*b)/J)*y(3) - ((b*L^2 + b*L^2)/M)*y(4) + (1/J)*(L*b*u2(t) -
    L*b*u1(t));
endfunction
integracaonumerica = ode([xA0;xB0;xpG0;w0],0,t,dinamica);
xA = integracaonumerica(1,:);
xB = integracaonumerica(2,:);
vG = integracaonumerica(3,:);
w = integracaonumerica(4,:);

scf(1)
xtitle("Velocidade do CM");
xlabel("Tempo (s)");
ylabel("Velocidade (m/s)");
plot(t,vG,"r");
xgrid
scf(2)
xtitle("Velocidade angular do carro");
xlabel("Tempo (s)");
ylabel("Velocidade angular (rad/s)");
plot(t,w,"g");
xgrid

A = [0,0,1,-L;0,0,1,L;-K/M,-K/M,-(b+b)/M,(b*L - b*L)/M;L*K/J,-L*K/J,(L*b-L*b)/J,-(b*L^2 + b*L^2)/J];
B = [-1,0;0,-1;b/M,b/M;-L*b/J,L*b/J];
C = [0,0,1,0;0,0,0,1]
D = [0,0;0,0]
S = syslin('c',A,B,C,D);
G = ss2tf(S);

disp(G)

f3 = scf(3)
xlabel("aaaaaaa")
bode(G(1,1))

f4 = scf(4)
bode(G(1,2))

f5 = scf(5)
bode(G(2,1))

f6 = scf(6)
bode(G(2,2))

```

```
s = poly(0,'s')
```

```
S_s = inv(s*eye(A)-A)
```

```
P = det(s*eye(A)-A)
```

```
polos = roots(P)
```