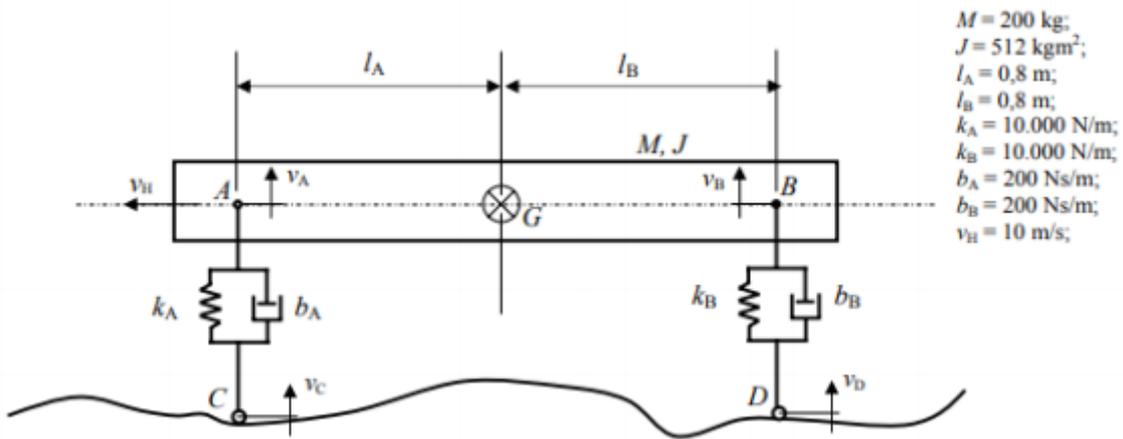


**PME 3380**  
**MODELAGEM DE**  
**SISTEMAS DINÂMICOS**

**Aluno:** Luiz Ricardo de Sousa Cruz

**N°USP:** 10334961

**1. Modelo Dinâmico de ½ Carro**



- Forças que agem nos pontos A e B:

$$F_A = -k_A x_A + b_A (v_C - v_A) \quad (1)$$

$$F_B = -k_B x_B + b_B (v_D - v_B) \quad (2)$$

- Pelo teorema do baricentro:

$$\ddot{M}_G = F_A + F_B \quad (3)$$

- Pelo teorema do momento angular:

$$J\ddot{\theta}_G = -F_A l_A + F_B l_B \quad (4)$$

- Pela geometria da barra:

$$x_A = x_G - l_A \theta_G \quad (5)$$

$$x_B = x_G + l_B \theta_G \quad (6)$$

- Deriva-se as equações anteriores para se chegar às equações das velocidades instantâneas em A e B:

$$v_A = v_G - l_A w \quad (7)$$

$$v_B = v_G - l_B w \quad (8)$$

- Substituindo as velocidades encontradas acima em (1) e (2), temos:

$$F_A = -k_A x_A + b_A(v_C - v_G + l_A w) \quad (9)$$

$$F_B = -k_B x_B + b_B(v_D - v_G + l_B w) \quad (10)$$

- Também podemos achar:

$$\ddot{x}_G = \frac{-k_A x_A + b_A(v_C - v_G + l_A w) - k_B x_B + b_B(v_D - v_G + l_B w)}{M} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_G = \frac{-(-k_A x_A + b_A(v_C - v_G + l_A w))l_A + (-k_B x_B + b_B(v_D - v_G + l_B w))}{J} \quad (12)$$

- Na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- Estabelecendo os vetores:

$$\text{Vetor de estados: } x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ w \end{bmatrix}$$

$$\text{Vetor de entradas: } u = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

$$\text{Vetor de saídas: } y = \begin{bmatrix} v_G \\ w \end{bmatrix}$$

- Chegamos às matrizes A, B, C e D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & -\frac{b_A + b_B}{M} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{M} \\ \frac{k_A l_A}{J} & -\frac{k_B l_B}{J} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{J} & \frac{b_A l_A^2 - b_B l_B^2}{J} \end{bmatrix}$$

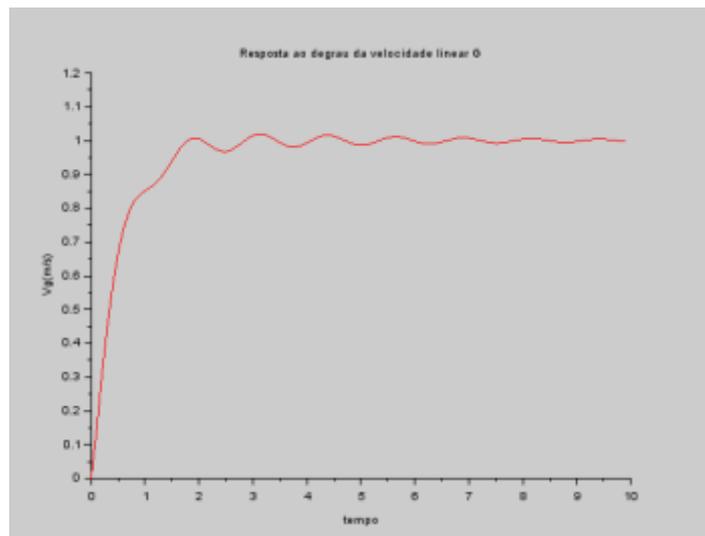
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{b_A l_A}{J} & -\frac{b_B l_B}{J} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

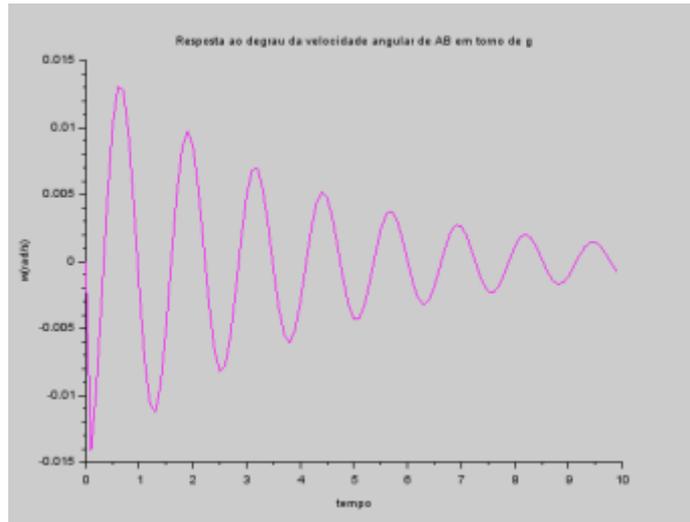
## 2. Simulação do Modelo de 1/2 Carro

O obstáculo físico para o degrau é um aclime constante e positivo. A entrada  $v_D$  ocorre após o tempo  $t_D$ , tempo para o qual a roda traseira alcança o obstáculo após percorrido a distância entre as duas rodas. Dessa maneira,  $t_D$  é dado por:

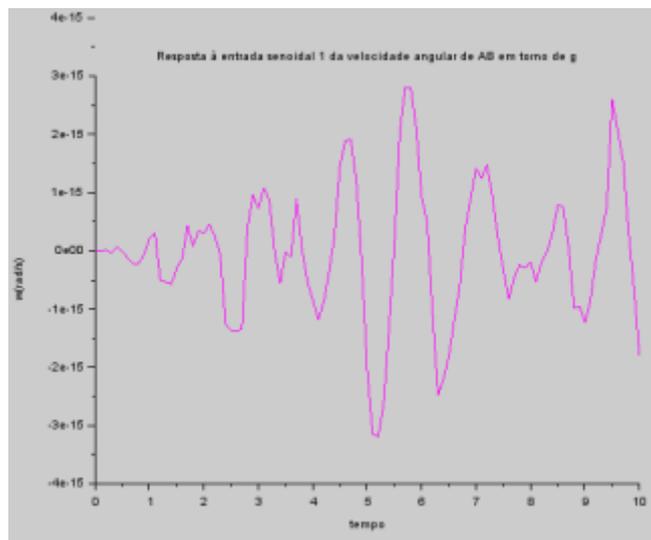
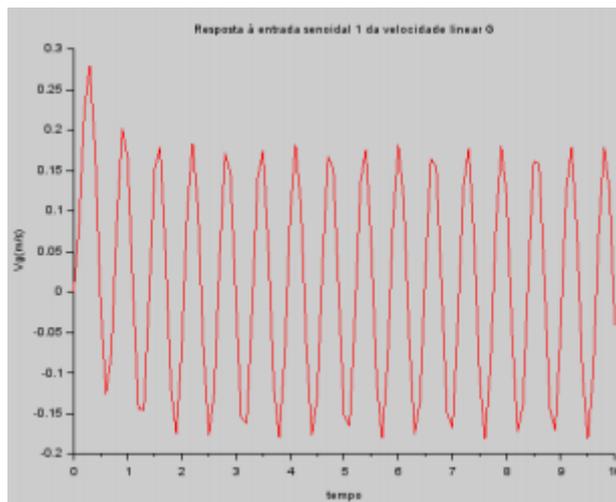
$$t_D = \frac{l_A + l_B}{v_n} = 0,16s \quad (13)$$

- Gráficos para entrada do tipo degrau:

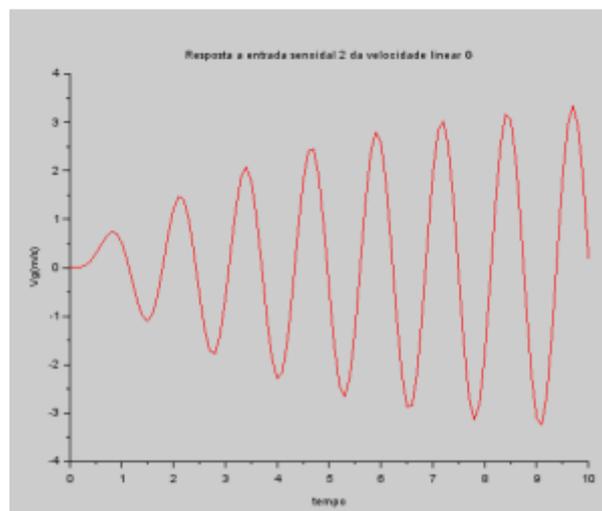
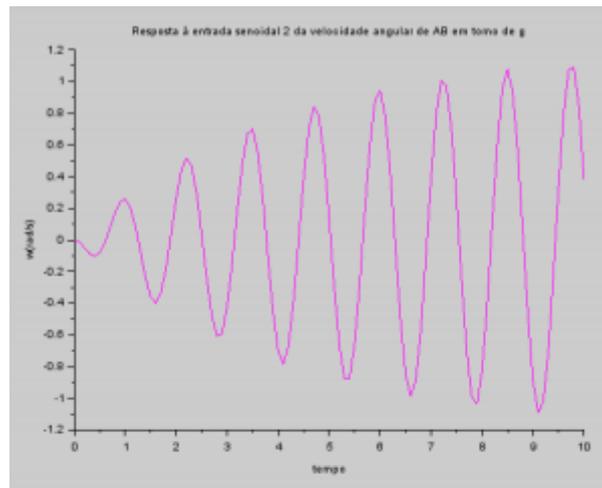




- Gráficos para a entrada senoidal  $v_C = v_D$ :



- Gráficos para a entrada senoidal:  $v_C = -v_D$



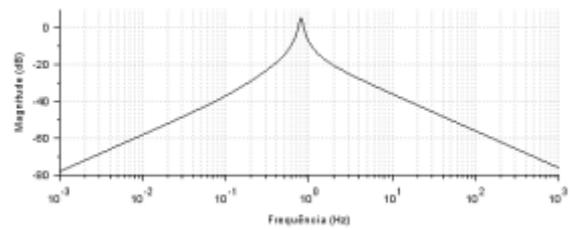
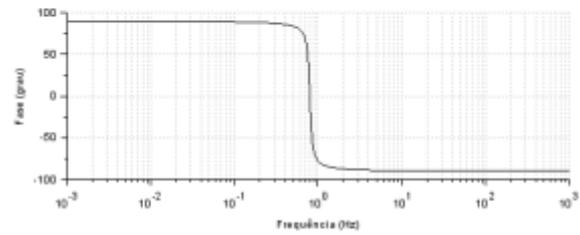
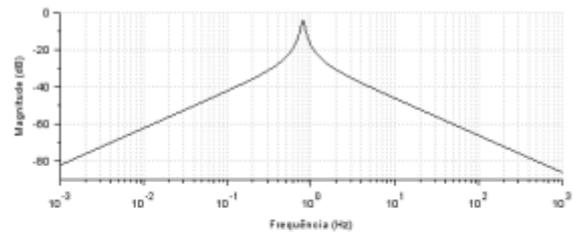
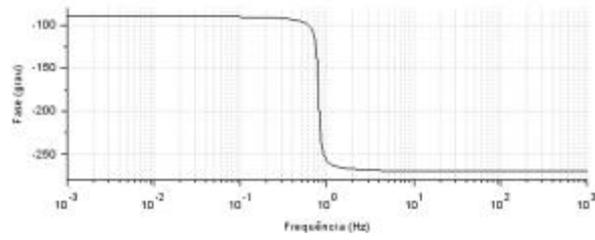
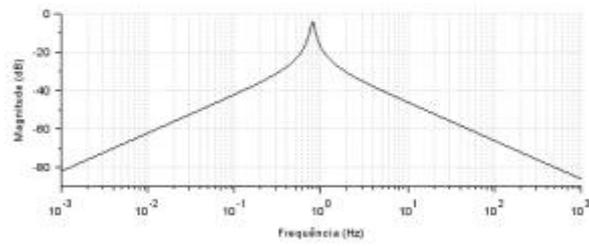
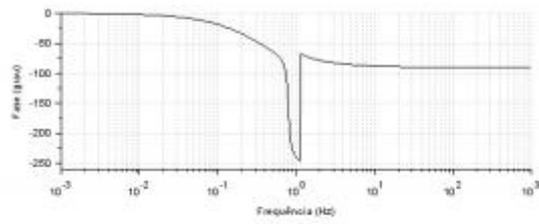
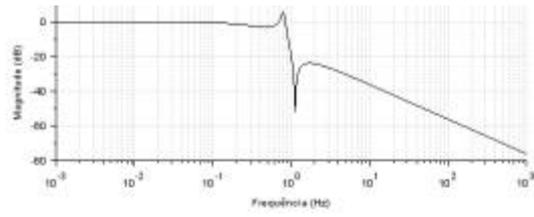
### 3. Análise de Resposta em Frequência

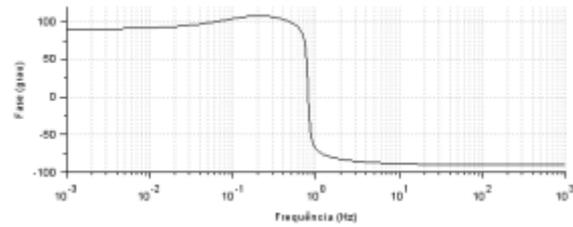
As 4 funções de transferência obtidas através de simulação são:

$$\frac{-3.553D-14 - 50s + 1s^2}{50 + 26s + 2.5s^2 + s^3} \quad \frac{50 + 51s + 1s^2}{50 + 26s + 2.5s^2 + s^3}$$

$$\frac{-15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \quad \frac{15.625 + 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2}$$

Dessa forma, os diagramas de Bode obtidos para cada função de transferência são:





É possível perceber que, em todos os diagramas, que a frequência natural, para  $\nu_G$  ocorre em torno de 10 rad/s. Já para a frequência natural  $\omega$ , ocorre em torno de 5 rad/s.

- Código utilizado em Scilab:

```
clear
clc

//Parâmetros
M=200;
J=512;
la=0.8;
lb=0.8;
ka=10000;
kb=10000;
ba=200;
bb=200;
vh=10;
td=(la+lb)/vh;

//Definição das matrizes
A=[0,0,1,-la;0,0,1,lb;ka/M,-kb/M,-(ba+bb)/M,(bb*lb+ba*la)/M;ka*la/J,-kb*lb/J,(-bb*lb+ba*la)/J,-(bb*lb^2+ba*la^2)/J];
B=[-1,0,0,-1;ba/M,bb/M,-ba*la/J,bb*lb/J];
C=[0,0,1,0;0,0,0,1];
D=[0,0,0,0];
x0=[0,0,0,0]';
//Degrau
dt=0.1;
u=ones(2,10/dt);
for t=0:dt:td-dt,
    u(2,(t/dt)+1)=0;
end
t=0:0.1:10-dt;

sist=syslin('c',A,B,C,D);
[y,z]=csim(u,t,sist,x0);
```

```

//Gráficos-degrau
figure(1)
xset('window',1)
xlabel('Resposta-ao-degrau-da-velocidade-linear-G','tempo','Vg (m/s)')
vg=y(1,:)
wy(2,:)
plot2d(t,vg,5)
figure(2)
xlabel('Resposta-ao-degrau-da-velocidade-angular-de-AB-em-torno-de-g','tempo','w(rad/s)')
plot2d(t,w,6)
//Entrada> Senoidal
i=1
for t2 = 0:0.1:10
    ... u2(1,i) = sin(9.8995*t2);

    ... u2(2,i) = sin(9.8995*t2);

    ... u3(1,i) = -sin(4.9875*t2);

    ... u3(2,i) = -sin(4.9875*t2);
    ... i = i+1
end
t2=0:0.1:10;
xo=[0 0 0 0]';
sist=syslin('c',A, B, C, D);
[y2,x2]=csim(u2,t2,sist,xo);
[y3,x3]=csim(u3,t2,sist,xo);
vg2 = y2(1,:)
w2 = y2(2,:)
vg3 = y3(1,:)
w3 = y3(2,:)
//gráfico-senoidal-em-fase
figure(3)
xlabel('Resposta-à-entrada-senoidal-1-da-velocidade-linear-G','tempo','Vg(m/s)')

plot2d(t2,vg3,5)
figure(6)
xlabel('Resposta-à-entrada-senoidal-2-da-velocidade-angular-de-AB-em-torno-de-g','tempo','w(rad/s)')
)
plot2d(t2,w3,6)
//Análise> de> frequência

FT=ss2tf(sist)
print('FT',FT)
k=5
for i=1:2
    .....for j=1:2
    .....k=k+1
    .....scf(2+k)
    .....bode(FT(i,j))
    .....end
end
end

```