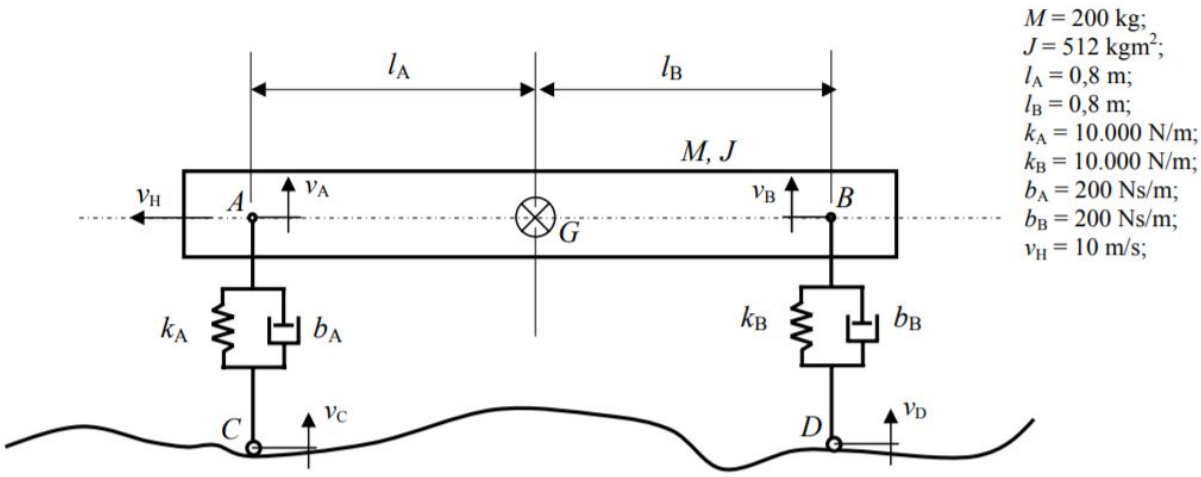
Lista G

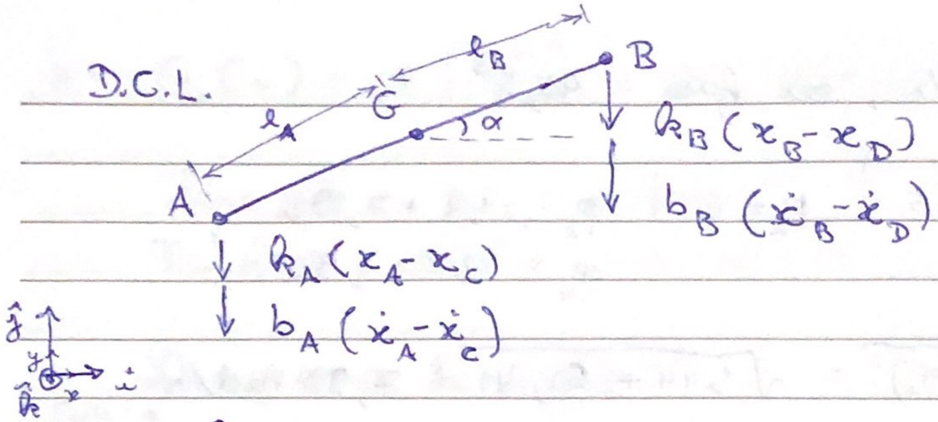
Carolina Carvalho Silva - 10705933

1. Exercício 1

Considerando o diagrama a seguir, deve-se obter o modelo para ½ de um carro.



D.C.L.



Considerando como um problema plano, temos o TQMA:

$$\vec{M}_G^{ext} = m \, (\cancel{G - G})^{\to 0} \wedge \vec{a}_G + J_z \dot{\omega} \vec{k} = J_z \dot{\omega} \vec{k} \qquad (1)$$

$$\vec{M}_G^{ext} = \sum (P_i - G) \wedge \vec{F}_i$$
$$= -l_A \cos\alpha \, \vec{i} \wedge (-k_A(x_A - x_C) - b_A(\dot{x}_A - \dot{x}_C))\vec{j}$$
$$+ l_B \cos\alpha \, \vec{i} \wedge (-k_B(x_B - x_D) - b_B(\dot{x}_B - \dot{x}_D))\vec{j}$$

Considerando que as componentes $\vec{j}$ do vetor posição é paralela aos vetores força e que, para ângulos muito pequenos, $\cos\alpha \approx 1$

$$\therefore \vec{M}_G^{ext} = l_A(k_A(x_A - x_C) + b_A(\dot{x}_A - \dot{x}_C))\vec{k}$$
$$- l_B(k_B(x_B - x_D) + b_B(\dot{x}_B - \dot{x}_D))\vec{k} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ Igualando (1) e (2):

$$J_z \dot{\omega} = l_A(k_A(x_A - x_C) + b_A(\dot{x}_A - \dot{x}_C))$$
$$- l_B(k_B(x_B - x_D) + b_B(\dot{x}_B - \dot{x}_D))$$

TMB:

$$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow -k_A(x_A - x_C) - b_A(\dot{x}_A - \dot{x}_C)$$
$$- k_B(x_B - x_D) - b_B(\dot{x}_B - \dot{x}_D) = m \cdot \dot{v}_G$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{w} \wedge (A - G)$$
$$= v_G \vec{j} + w \vec{k} \wedge (-l_A \cos\alpha \, \vec{i} - l_A \operatorname{sen}\alpha \, \vec{j})$$

Ainda usando a aproximação para ângulos pequenos: $\cos\alpha \approx 1$ e $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$

$$\therefore \vec{v}_A = v_G \vec{j} - w l_A \vec{j} \Rightarrow \dot{x}_A = v_G - w l_A$$

Fazendo um paralelo para o ponto B:

$$\vec{v}_B = v_G + w l_B \vec{j} \Rightarrow \dot{x}_B = v_G + w l_B$$

Assim:

$$-k_A(x_A - x_C) - b_A(v_G - w l_A - \dot{x}_C) - k_B(x_B - x_D)$$
$$- b_B(v_G + w l_B - \dot{x}_D) = m \cdot \dot{v}_G$$

$$\Rightarrow \dot{v}_G = -\frac{k_A}{m}(x_A - x_C) - \frac{b_A}{m}(v_G - w l_A - \dot{x}_C) - \frac{k_B}{m}(x_B - x_D)$$
$$- \frac{b_B}{m}(v_G + w l_B - \dot{x}_D)$$

$$\dot{w} = \frac{l_A k_A}{J}(x_A - x_C) + \frac{l_B k_B}{J}(-x_B + x_D) + \frac{l_A b_A}{J}(v_G - w l_A - \dot{x}_C)$$
$$+ \frac{l_B b_B}{J}(-v_G - w l_B + \dot{x}_D)$$

Passando para o espaço de estados :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad \begin{aligned} u &= \left.\begin{bmatrix} v_C & v_D \end{bmatrix}\right\} \text{entradas} \\ y &= \left.\begin{bmatrix} v_G & w \end{bmatrix}\right\} \text{saídas} \\ x &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_a & x_b & v_G & w \end{bmatrix}}_{\text{vetor de estados}} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{v}_G \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{k_A}{m} & -\frac{k_B}{m} & -\frac{b_A+b_B}{m} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{m} \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{J} & -\frac{l_A^2 b_A + l_B^2 b_B}{J} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ w \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{b_A}{m} & \frac{b_B}{m} \\ -\frac{l_A b_A}{J} & \frac{l_B b_B}{J} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_G \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

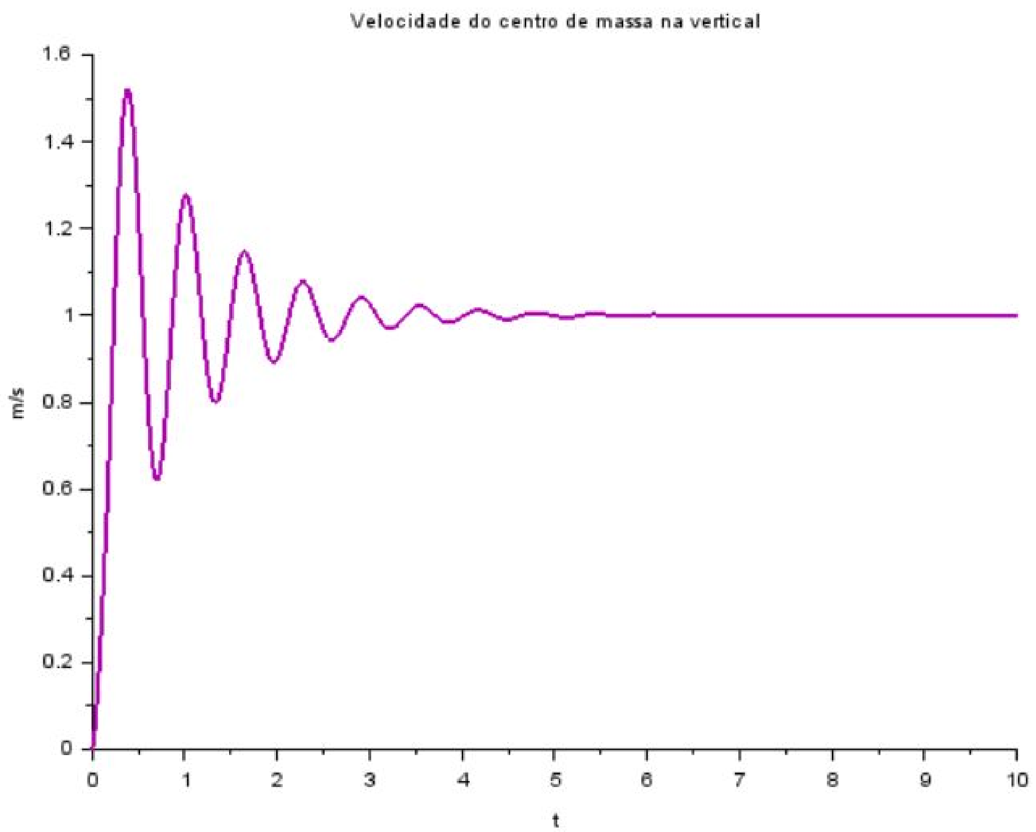
2. Exercício 2

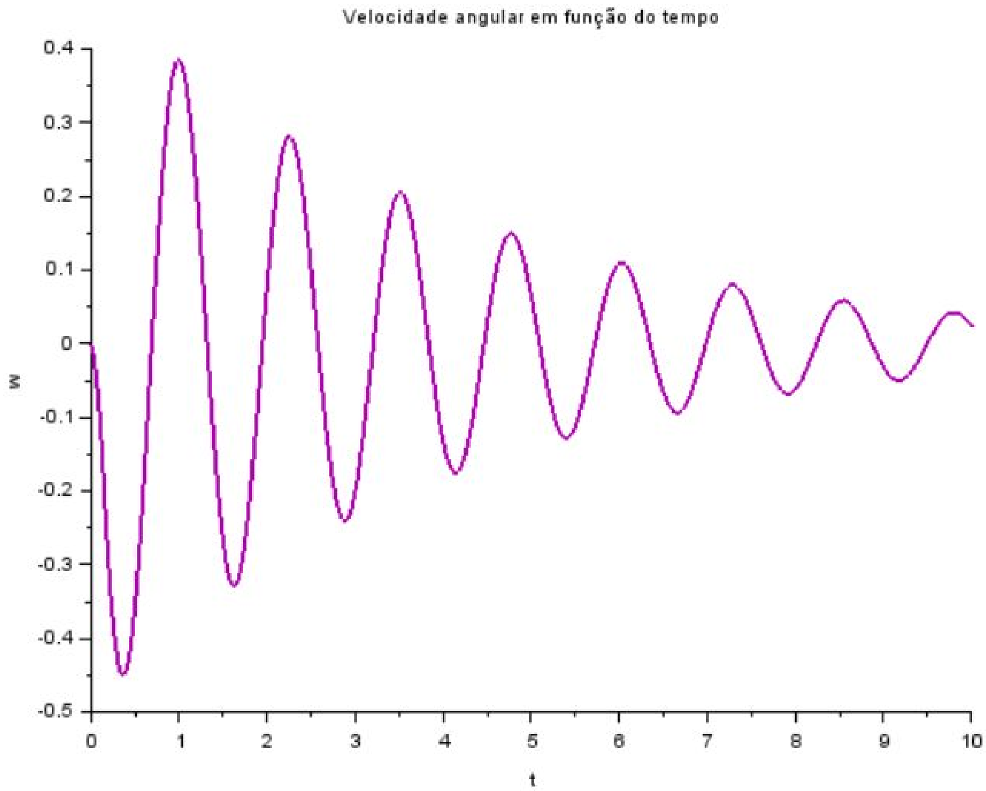
Deve-se realizar simulações para entrada do tipo degrau. Do início do enunciado, sabe-se que a entrada degrau representa uma constante subida na inclinação e que, a partir do tempo inicial, t=0 s, ela apresenta velocidade constante de 1 m/s. Além disso, faz-se necessária uma definição do α, que representa o comprimento do carro dividido pela sua velocidade.

a. Primeiro, considerando condições iniciais nulas, tempo de simulação de 4 segundos e as condições a seguir :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

Obtém-se os gráficos :





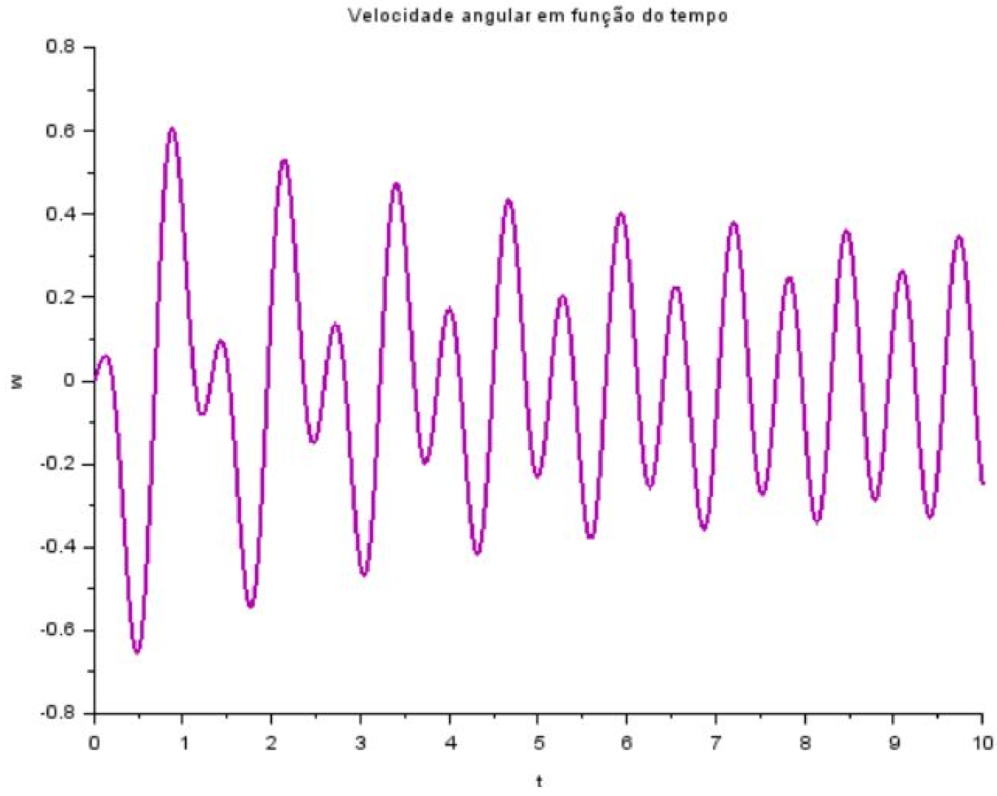
b. Agora, faz-se o mesmo para a seguinte condição :

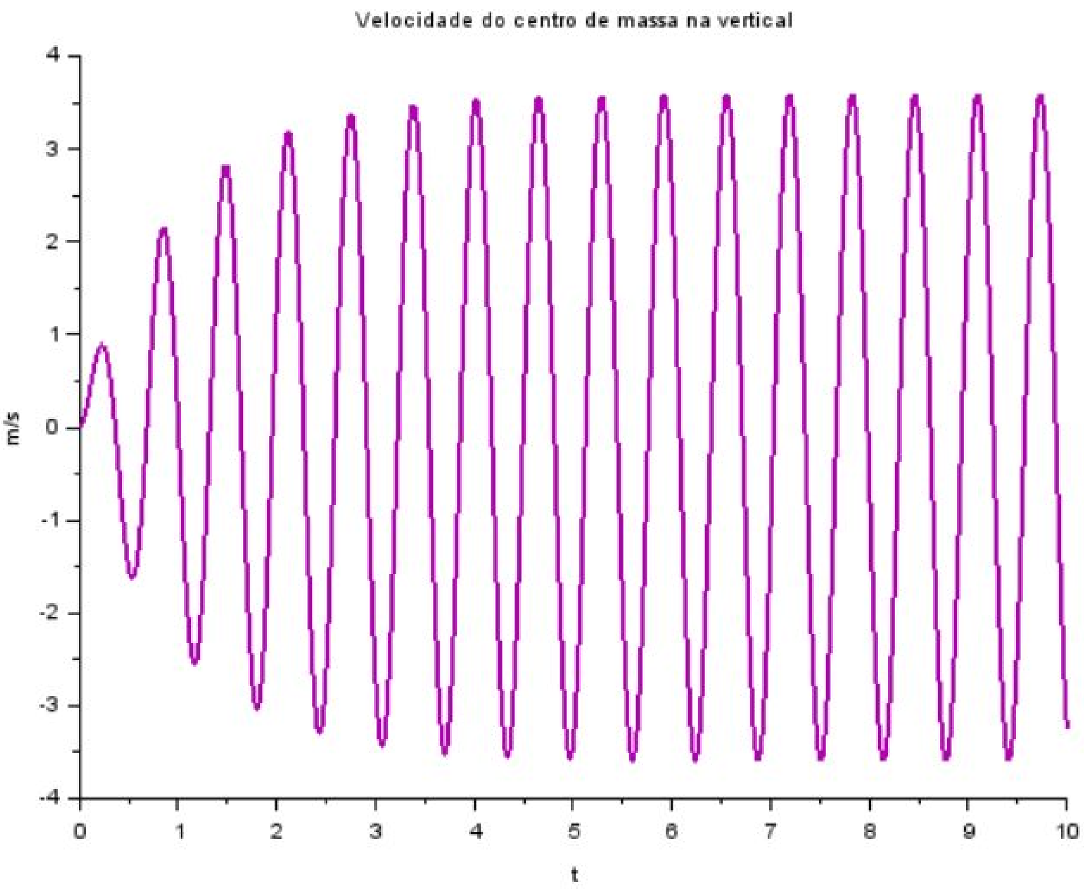
$$v_C = v_D = \mathrm{sen}(9{,}8995t)$$

O sistema converge e, portanto, o Scilab apresenta a mensagem de erro abaixo :

```
Scilab 6.0.2 Console
 lsode--  at t (=r1), mxstep (=i1) steps
necessary before reaching tout
      where i1 is :        500
      where r1 is :   0.9064767481045D-04
Excessive work done on this call (perhaps wrong jacobian type).
```

Sendo assim, adicionou-se à entrada senoidal uma componente com o intervalo de tempo α entre as duas rodas. Com isso, obteve-se os seguintes gráficos :

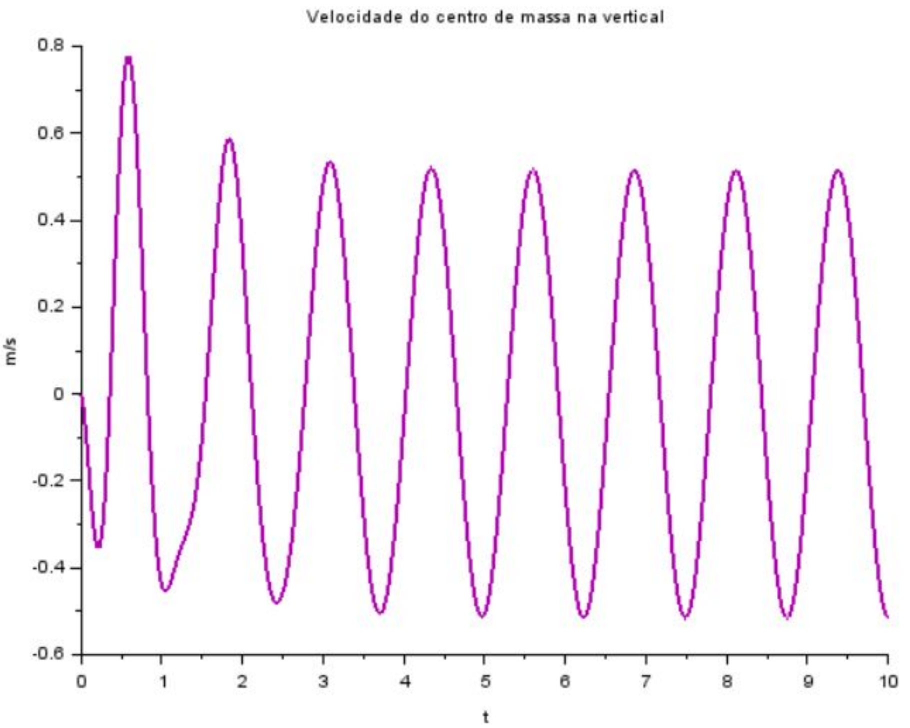

Velocidade angular em função do tempo
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
w
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t

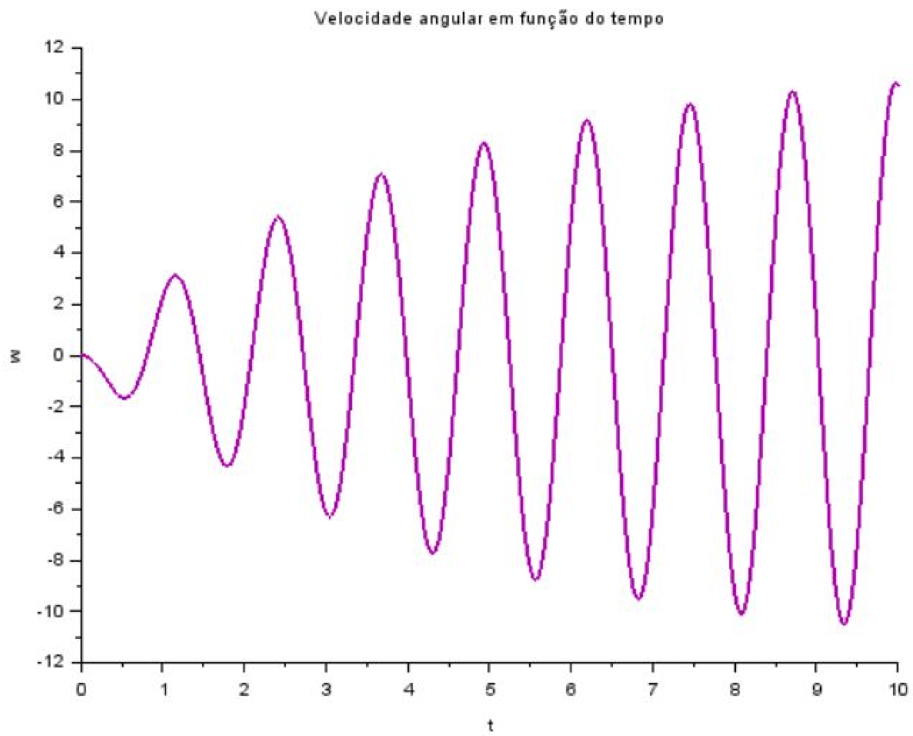

Velocidade do centro de massa na vertical
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
m/s
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t

c. Repete-se o processo para a condição a seguir :

$$v_C = -v_D = \text{sen}(4{,}9875t)$$

Novamente, foi apresentada a mesma mensagem de erro e, por isso, adicionou-se à entrada senoidal o α, obtendo-se os seguintes gráficos :





3. Código

```
clear();
clc;
xdel(winsid());

// Parâmetros
M = 200; //Massa [kg]
J = 512; //Momento de inércia[kg*m^2]
la = 0.8; //Comprimento [m]
lb = 0.8;
ka = 10000; //Constante elástica [N/m]
kb = 10000;
ba = 200; //Coeficiente de amortecimento [N*s/m]
bb = 200;
vh = 10; //Velocidade horizontal [m/s]
alpha = (la+lb)/vh;

//Definição do tempo
t = linspace(0,10,5000);

//Condições iniciais
x0 = [0; 0; 0; 0];

//Matriz A
A(1,3) = 1; A(1,4) = -la;
A(2,3) = 1; A(2,4) = lb;
A(3,1) = -ka/M; A(3,2) = -kb/M;
A(3,3) = (-ba-bb)/M; A(3,4) = (la*ba-lb*bb)/M;
```

```
A(4,1) = la*ka/J; A(4,2) = -lb*kb/J;
A(4,3) = (la*ba-lb*bb)/J; A(4,4) = -(la*la*ba+lb*lb*bb)/J;

//Matriz B
B(1,1) = -1; B(2,2) = -1;
B(3,1) = ba/M; B(3,2) = bb/M;
B(4,1) = -la*ba/J; B(4,2) = lb*bb/J;

//Matriz C
C(1,3) = 1; C(2,4) = 1;

//Matriz D
D(2,2) = 0;

//Entradas
caso = messagebox(["Entradas:";"1. Caso inicial";"2. Senoidal :9.8995 ";"3. Senoidal :4.9875"],"4. Senoidal :9.8995 com alpha","5. Senoidal :4.9875 com alpha"],"Safety question","modal",["1","2","3","4","5"]);
    
select caso
    case 1 then     //Entrada 0
        vc = ones(1,length(t)); vd = ones(1,length(t));
        for i=1:length(t)
         if t(i)<alpha then vd(1,i)=0; end
         end
         u = [vc;vd];
    case 2 then     //Entrada 1
        u = [sin(9.8995*t); sin((9.8995*t))];
    case 3 then     //Entrada 2
        u = [sin(4.9875*t); sin((4.9875*t))];
    case 4 then     //Entrada adaptada 1
        alpha = (la+lb)/vh;
        u = [sin(9.8995*t); sin((9.8995*(t+alpha)))];
    case 5 then     //Entrada adaptada 2
        alpha = (la+lb)/vh;
        u = [sin(4.9875*t); sin((-4.9875*(t+alpha)))];
end

sistema = syslin('c',A,B,C,D);
[y,x] = csim(u,t,sistema,x0);

scf(1);
plot2d(t,y(1,:));
xtitle("Velocidade do centro de massa na vertical","t","m/s");

scf(2);
plot2d(t,y(2,:));
xtitle("Velocidade angular em função do tempo","t","w");
```