Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

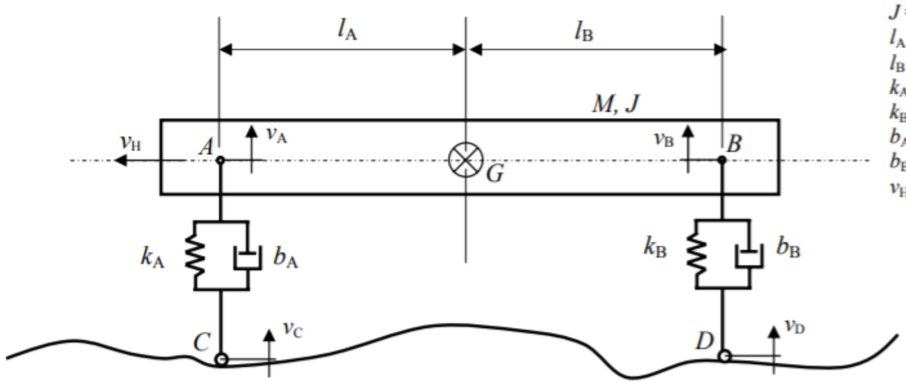
José Arthur Siqueira Guerrero   NºUSP: 10791767

São Paulo - SP

2020

Exercício 1:

Obtenha o modelo de ½ carro:



$M = 200$ kg;
$J = 512$ kgm^2;
$l_A = 0{,}8$ m;
$l_B = 0{,}8$ m;
$k_A = 10.000$ N/m;
$k_B = 10.000$ N/m;
$b_A = 200$ Ns/m;
$b_B = 200$ Ns/m;
$v_H = 10$ m/s;

Modelo da dinâmica vertical:
A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de G (v_H) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:
- velocidade vertical v_G do centro de massa G.
- velocidade angular ω de AB em torno de G.
- elongação x_A da mola de rigidez k_A.
- elongação x_B da mola de rigidez k_B.

Entradas: velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos C e D.
Saídas: velocidade vertical v_G do centro de massa G e velocidade angular ω de AB em torno de G.

Hipóteses simplificadoras:
- Movimento apenas no plano da página.
- AC e BD permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que $sen\alpha \cong tan\alpha \cong \alpha$ e $cos\alpha \cong 1$).

Representação no espaço de estados:

Vetor de estados: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Vetor de entradas: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$

Vetor de saídas: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Estrutura do modelo matemático:
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

$$\sum F_x = F_A + F_B = M\ddot{x}_G$$

$$\Downarrow$$

$$F_A = -K_a x_a - b_a(V_a - V_c)$$

$$F_B = -K_b x_b - b_b(V_b - V_b)$$

Temos assim:

$$-K_a x_a - b_a(V_a - V_c) - K_b x_b - b_b(V_b - V_b) = \sum F_x = M\ddot{x}_G$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F_a l_a + F_b l_b}{J},$$

Com:

$$X_A = X_G - \operatorname{sen}\theta \, l_a \; ; \; X_B = X_G - \operatorname{sen}\theta \, l_b$$

Tomando $\operatorname{sen}\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$

$$X_A = X_G - \theta l_a \; ; \; X_B = X_G - \theta l_b$$

$$\dot{X}_a = V_c - w l_a \; , \; \dot{X}_b = V_c + w l_b$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \; ; \; y = Cx + Du$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_a \\ 0 & 0 & 1 & l_b \\ -\frac{K_a}{M} & -\frac{K_b}{M} & \frac{-b_a - b_b}{M} & b_a l_a - b_b l_b \\ \frac{k_a l_a}{J} & -\frac{k_b l_b}{J} & \frac{b_a l_a - b_b l_b}{J} & \frac{-b_a l_a^2 - b_b l_b^2}{J} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b_a}{M} & \frac{b_b}{M} \\ -\frac{l_a b_a}{J} & \frac{l_b b_b}{J} \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + 0u.$$

Exercício 2:

Simulação do modelo de ½ carro:

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo degrau. Considere condições iniciais nulas e tempo de simulação de 4 segundos.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

Explique o tipo de obstáculo físico que é representado pela entrada degrau, e explique por que a entrada v_D ocorre t_d segundos após a entrada v_C (deve-se calcular t_d antes de se fazer a simulação).

Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo seno. Considere condições iniciais nulas. Simule por tempo suficiente para mostrar cerca de 20 períodos.

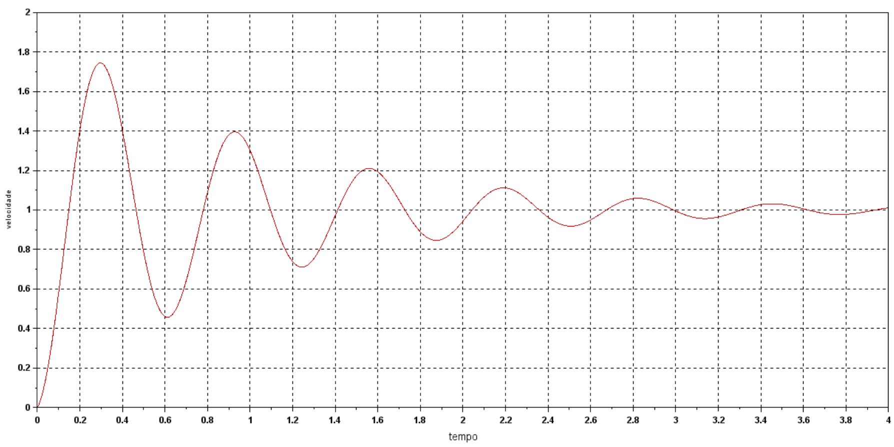
Entradas (observe que são duas simulações diferentes): $v_C = v_D = \text{sen}(9{,}8995t)$
$v_C = -v_D = \text{sen}(4{,}9875t)$

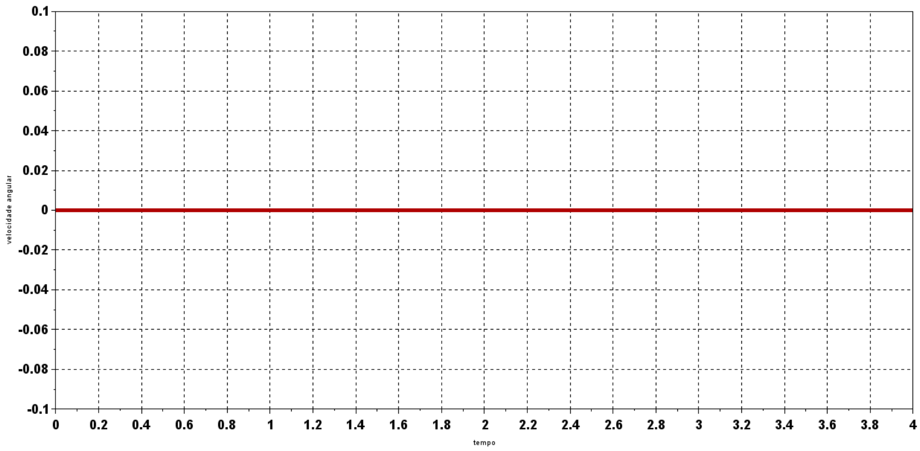
Repita as simulações para valores maiores e menores de freqüência. Compare os resultados.
Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.
Calcule os coeficientes de amortecimento, as freqüências naturais, as freqüências naturais amortecidas e as freqüências de ressonância.

$$t_d = \frac{l_A + l_B}{V_h} = \frac{0.8+0.8}{10} = 1.6s\ .$$

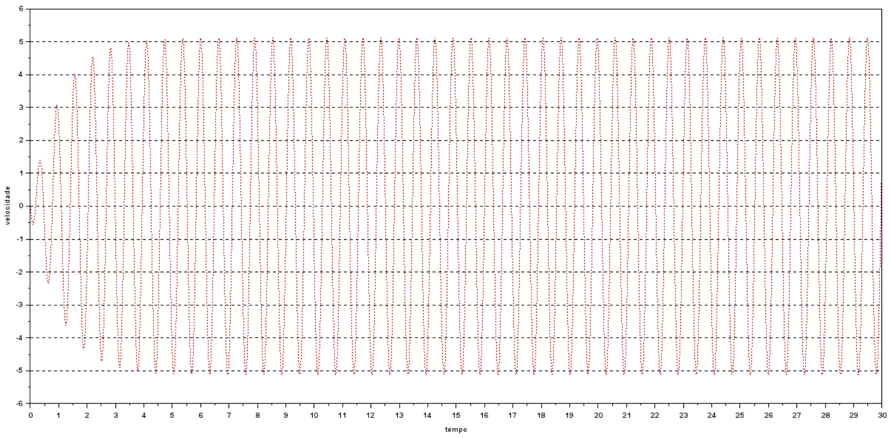
- Primeira simulação

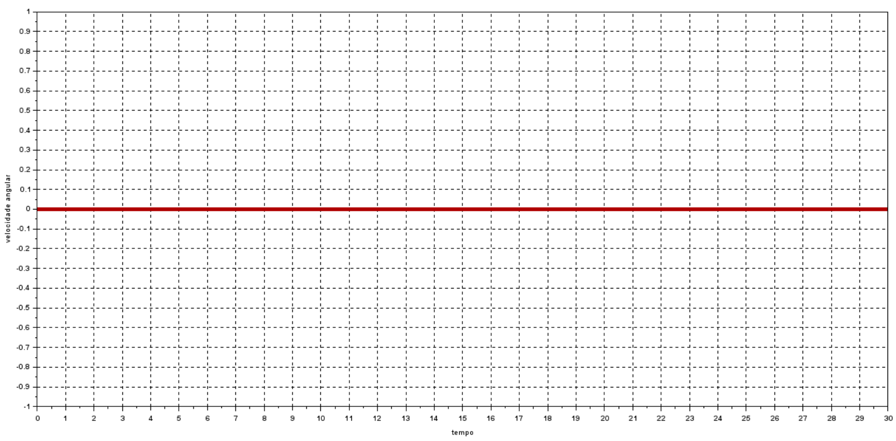
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$



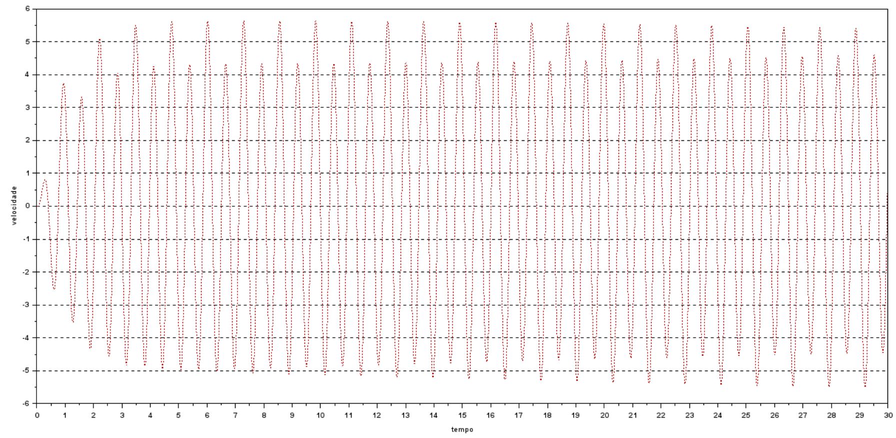


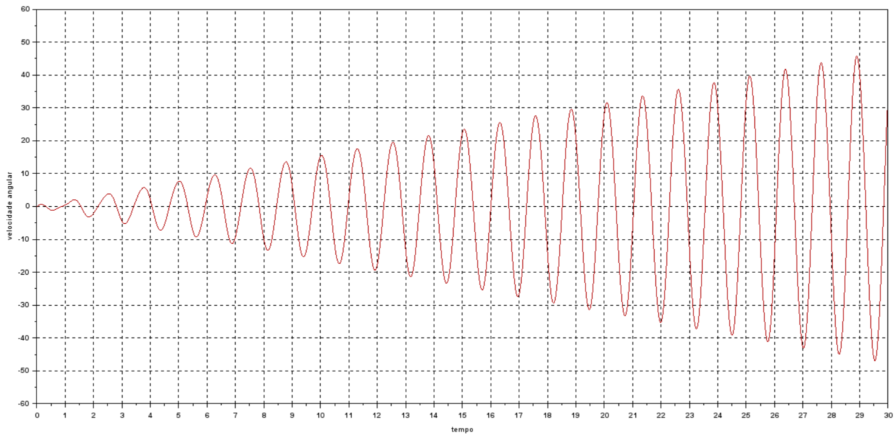
- Segunda simulação
  Sen(9.8995t) = $v_d = v_c$





- Terceira simulação
  Sen(4.9875t) = $-v_d = v_c$





Exercício 3:

Análise de resposta em frequência:

Obtenha os diagramas de Bode do sistema de suspensão e interprete os resultados.

Diagrama para Xa

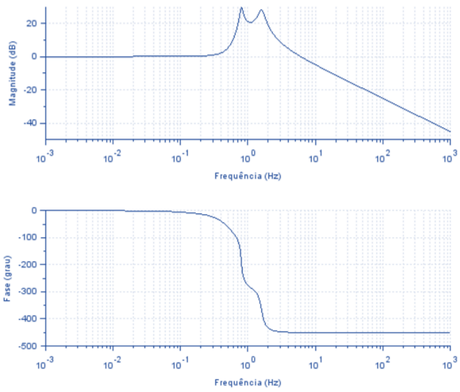


Diagrama para Xb

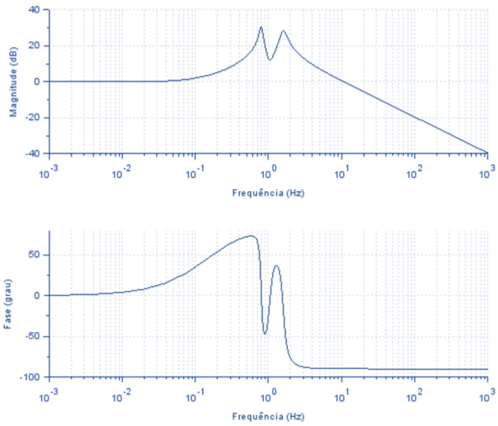


Diagrama para Vg

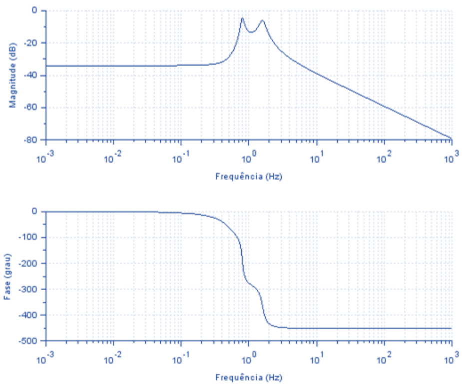
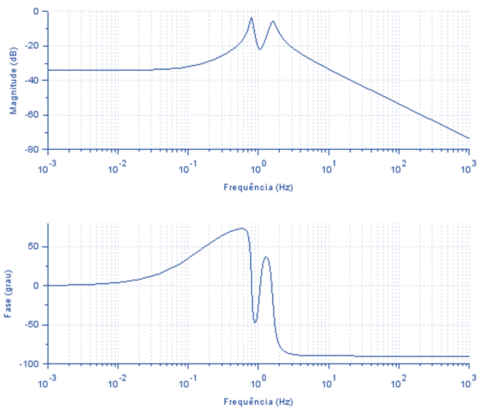


Diagrama para w



```
M = 200;
J = 512;
lA = 0.8;
lB = 0.8;
bA = 200;
bB = 200;
kA = 10000;
kB = 10000;
t_inicial = 0;
t_final = 30;
vH = 10;
xA0 = 0;
xB0 = 0;
vG0 = 0;
w0 = 0;
td = (lA + lB)/vH;
t = linspace(t_inicial,t_final,10000);
simulação = 0;
if simulação == 0 then
function funcao=u1(t), funcao = t, endfunction
if t < td then
function funcao=u2(t), funcao = 0, endfunction
else
function funcao=u2(t), funcao = t, endfunction
end
function funcao=u3(t), funcao = 1, endfunction
if t < td then
function funcao=u4(t), funcao = 0, endfunction
else
function funcao=u4(t), funcao = 1, endfunction
end
elseif simulação == 1 then
function funcao=u1(t), funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction  //4.9875
function funcao=u2(t), funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction
```

```
function funcao=u3(t), funcao = sin(9.8995*t), endfunction
function funcao=u4(t), funcao = sin(9.8995*t), endfunction
end
funcprot(0)
function dy=E36M3(t, y)
dy(1) = y(3) - lA*y(4);
dy(2) = y(3) + lB*y(4);
dy(3) = -(kA/M)*y(1) - (kB/M)*y(2)- ((bA + bB)/M)*y(3) + ((bA*lA - bB*lB)/M)*y(4) + (kA/M)*u1(t) + (kB/M)*u2(t) + (bA/M)*u3(t) + (bB/M)*u4(t);
dy(4) = (lA*kA/J)*y(1) - (lB*kB/J)*y(2) + ((lA*bA - lB*bB)/J)*y(3) - ((bA*lA^2 - bB*lB^2)/M)*y(4) - (lA*kA/J)*u1(t) + (lB*kB/J)*u2(t) -(lA*bA/J)*u3(t) + (lB*bB/J)*u4(t);
endfunction
result = ode([xA0;xB0;vG0;w0],0,t,E36M3);
xA = result(1,:);
xB = result(2,:);
vG = result(3,:);
w = result(4,:);
scf(1)
xlabel("tempo");
ylabel("velocidade");
plot(t,vG);
scf(12)
xlabel("tempo");
ylabel("velocidade angular");
plot(t,w);
A = [0,0,1,-lA;0,0,1,lB;-kA/M,-kB/M,-(bA+bB)/M,(bA*lA - bB*lB)/M;lA*kA/J,- lB*kB/J,(lA*bA-lB*bB)/J,-(bA*lA^2 + bB*lB^2)/J];
B = [0,0,0,0;0,0,0,0;kA/M,kB/M,bA/M,bB/M;-lA*kA/J,lB*kB/J,-lA*bA/J,lB*bB/J];
sl = syslin('c',A,B,[1,1,1,1]);
h = ss2tf(sl);
scf(3);
bode(h(1,1));
scf(4);
bode(h(1,2));
scf(7);
bode(h(1,3));
scf(6);
bode(h(1,4));
```