Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista E de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

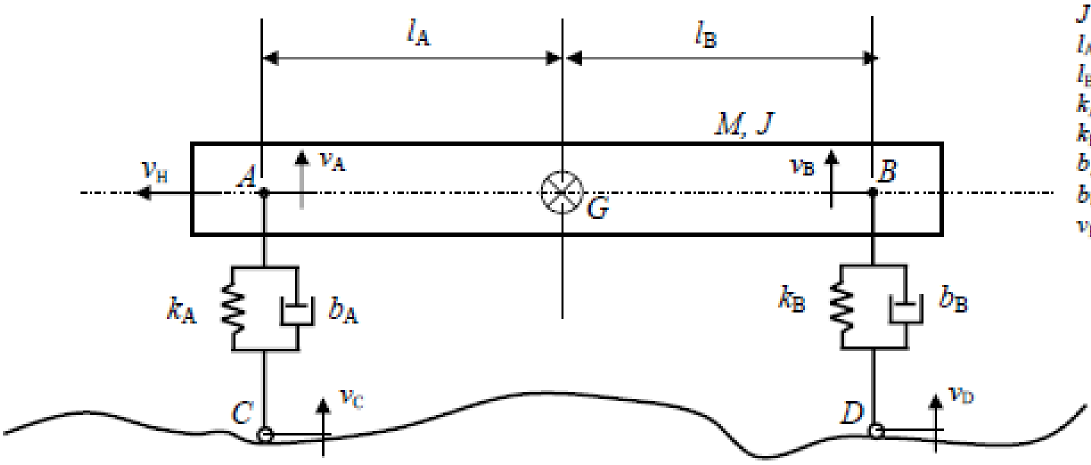
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Pedro Pires Sulzer 10705940

3 de dezembro de 2020

1. Obtenha o modelo de ½ carro:



M = 200 kg;
J = 512 kgm^2;
l_A = 0,8 m;
l_B = 0,8 m;
k_A = 10.000 N/m;
k_B = 10.000 N/m;
b_A = 200 Ns/m;
b_B = 200 Ns/m;
v_H = 10 m/s;

Modelo da dinâmica vertical:
A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de G (v_H) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical v_G do centro de massa G.
- velocidade angular ω de AB em torno de G.
- elongação x_A da mola de rigidez k_A.
- elongação x_B da mola de rigidez k_B.

Entradas: velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos C e D.
Saídas: velocidade vertical v_G do centro de massa G e velocidade angular ω de AB em torno de G.

Hipóteses simplificadoras:
- Movimento apenas no plano da página.
- AC e BD permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que $sen\alpha \cong tan\alpha \cong \alpha$ e $cos\alpha \cong 1$).

Representação no espaço de estados:

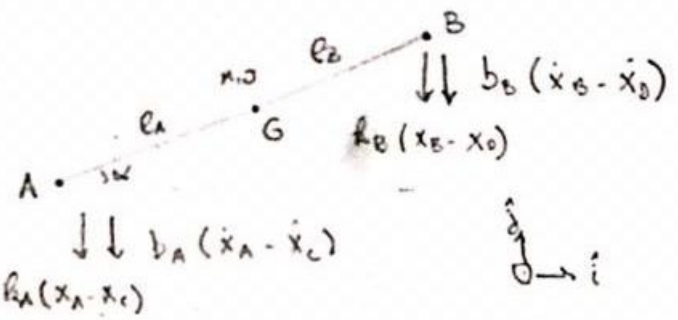
Vetor de estados: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Vetor de entradas: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$

Vetor de saídas: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Estrutura do modelo matemático:
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$
$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$

Modelo de 1/2 carro



TQMA em "G"

$$\vec{M}_G^{ext} = m(G-G)\wedge \vec{a}_G + J\dot{\omega}\hat{k}$$

$$\vec{M}_G^{ext} = \sum \vec{r}\wedge\vec{F}_j = -(l_A\cos\alpha)\hat{i}\wedge[-k_A(x_A-x_C)+b_A(\dot{x}_A-\dot{x}_C)]\hat{j} +$$
$$-(l_B\cos\alpha)\hat{i}\wedge[-k_B(x_B-x_D)+b_B(\dot{x}_B-\dot{x}_D)]\hat{j}$$

$$\vec{M}_G^{ext} = l_A k_A(x_A-x_C) - l_B k_B(x_B-x_D) + l_A b_A(\dot{x}_A-\dot{x}_C) - l_B b_B(\dot{x}_B-\dot{x}_D)$$

TMB

$$m\vec{a}_G = \vec{R} \Rightarrow m\dot{v}_G = -k_A(x_A-x_C) - b_A(\dot{x}_A-\dot{x}_C) - k_B(x_B-x_D) - b_B(\dot{x}_B-\dot{x}_D)$$

$$v_A\hat{j} = v_G\hat{j} + \omega\hat{k}\wedge(-l_A\cos\alpha\,\hat{i} - l_A\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{j}) \Rightarrow v_A = v_G - \omega l_A = \dot{x}_A$$

$$v_B\hat{j} = v_G\hat{j} + \omega\hat{k}\wedge(l_B\cos\alpha\,\hat{i} + l_B\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{j}) \Rightarrow v_B = \dot{x}_B = v_G + \omega l_B$$

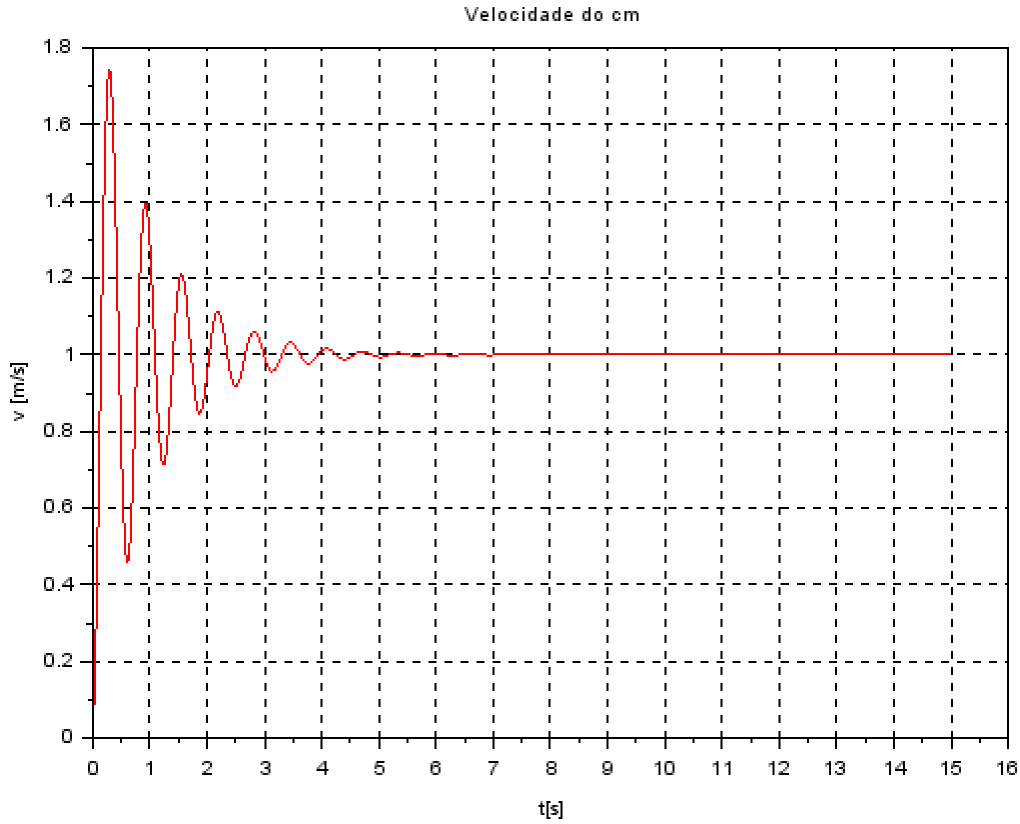
$$\dot{v}_G = -\frac{k_A}{m}x_A - \frac{k_B}{m}x_B - \frac{b_A}{m}(v_G - l_A\omega) - \frac{b_B}{m}(v_G + l_B\omega) + \frac{k_A}{m}x_C + \frac{k_B}{m}x_D + \frac{b_A}{m}\dot{x}_C + \frac{b_B}{m}\dot{x}_D$$

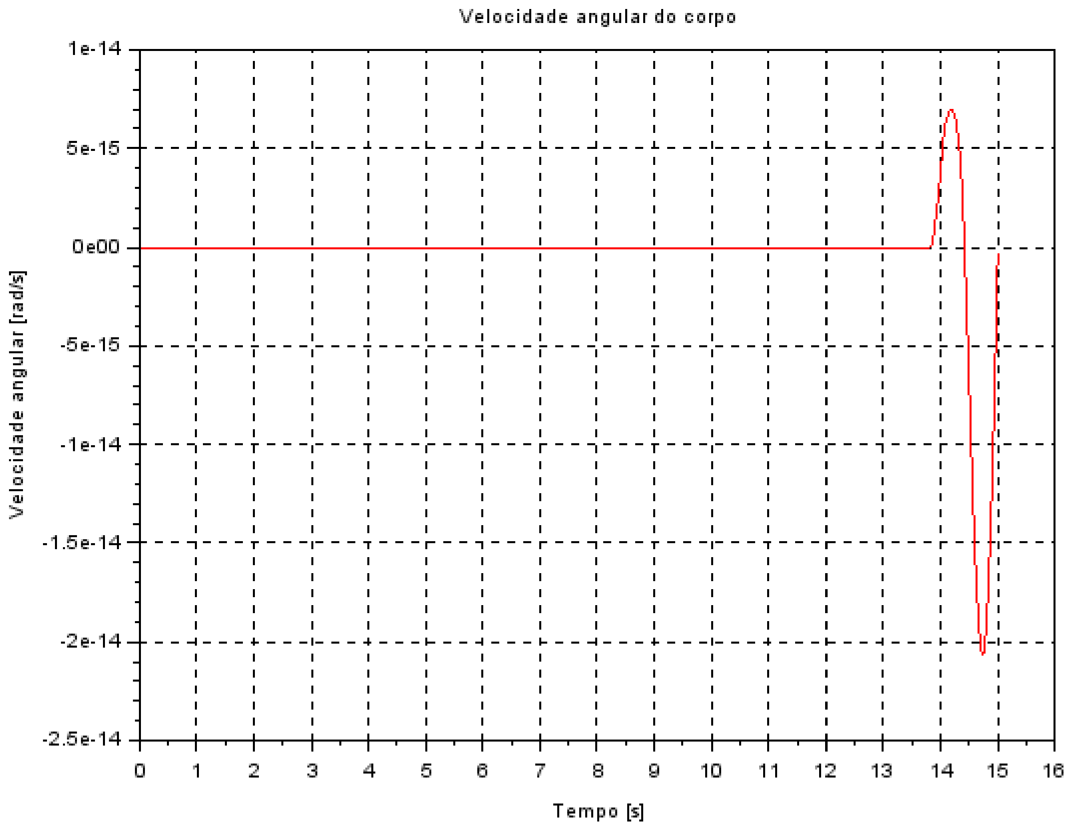
$$\dot{\omega} = \frac{l_A k_A}{J}x_A - \frac{l_B k_B}{J}x_B + \frac{l_A b_A}{J}(v_G - l_A\omega) - \frac{l_B b_B}{J}(v_G + l_B\omega) - \frac{l_A k_A}{J}x_C + \frac{l_B k_B}{J}x_D +$$
$$-\frac{l_A b_A}{J}\dot{x}_C + \frac{l_B b_B}{J}\dot{x}_D$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{x}_B\\ \dot{v}_G\\ \dot{\omega}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -k_A/m & -k_B/m & -\frac{b_A+b_B}{m} & \frac{b_A l_A + b_B l_B}{m} \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{J} & -\frac{(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\ x_B\\ v_G\\ \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ k_A/m & k_B/m & b_A/m & b_B/m\\ -\frac{l_A k_A}{J} & \frac{l_B k_B}{J} & -\frac{l_A b_A}{J} & \frac{l_B b_B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_C\\ x_D\\ \dot{x}_C\\ \dot{x}_D\end{bmatrix}$$

$$* \quad V_H = \frac{l_A + l_B}{T_D} \Rightarrow T_D = \frac{l_A + l_B}{V_H}$$

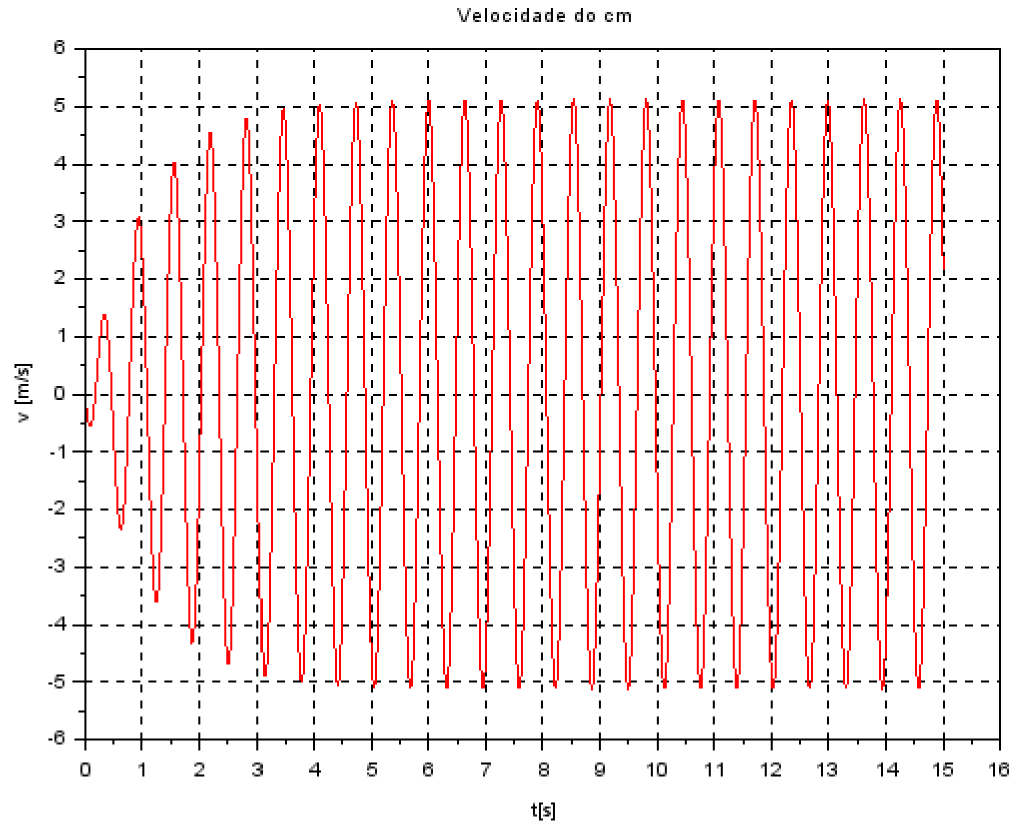
Cenário 1:

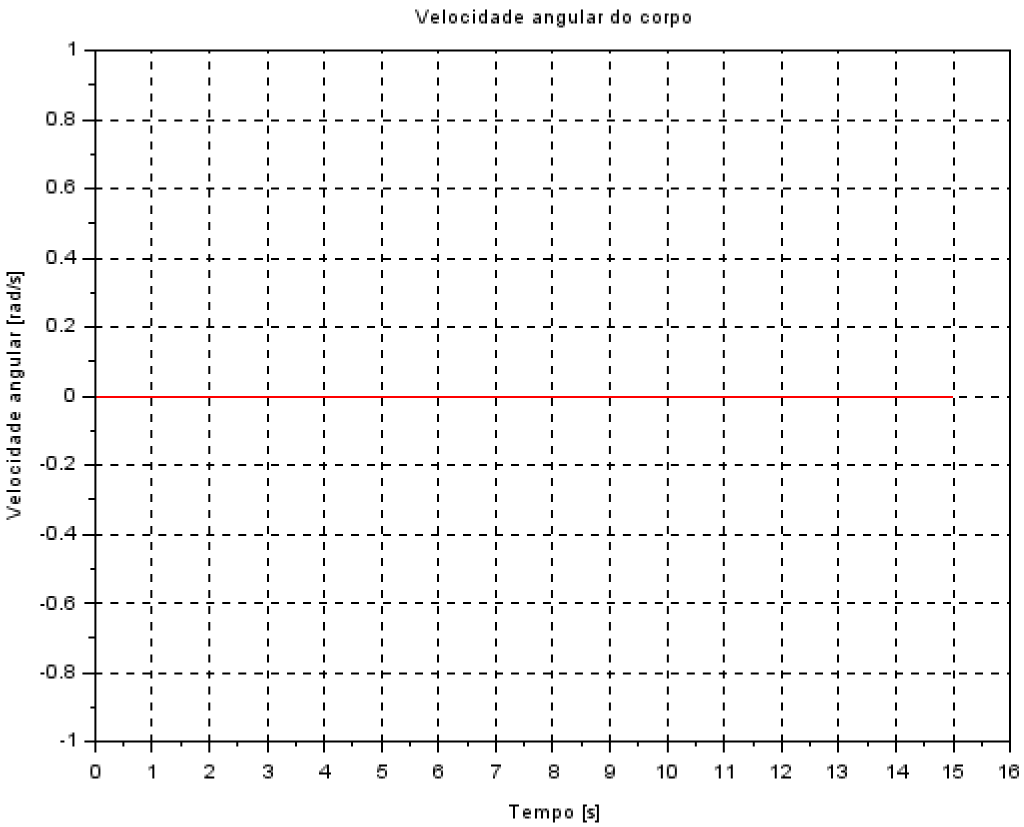




A excitação é absorvida em poucos segundos pela mola e a vibração do sistema é anulada, trazendo a velocidade do centro de massa rapidamente para zero, a velocidade angular a apresenta uma variação praticamente nula e na verdade tal variação no gráfico deve-se na verdade a um erro de integração do SCILAB.

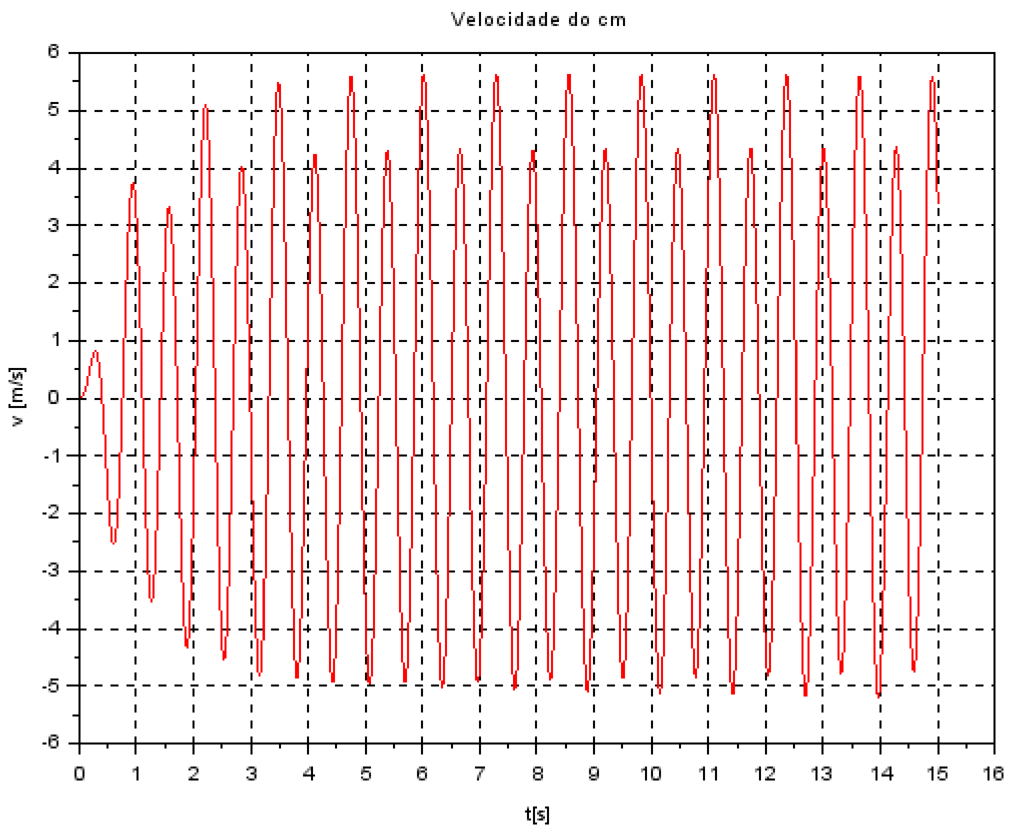
Cenário 2:

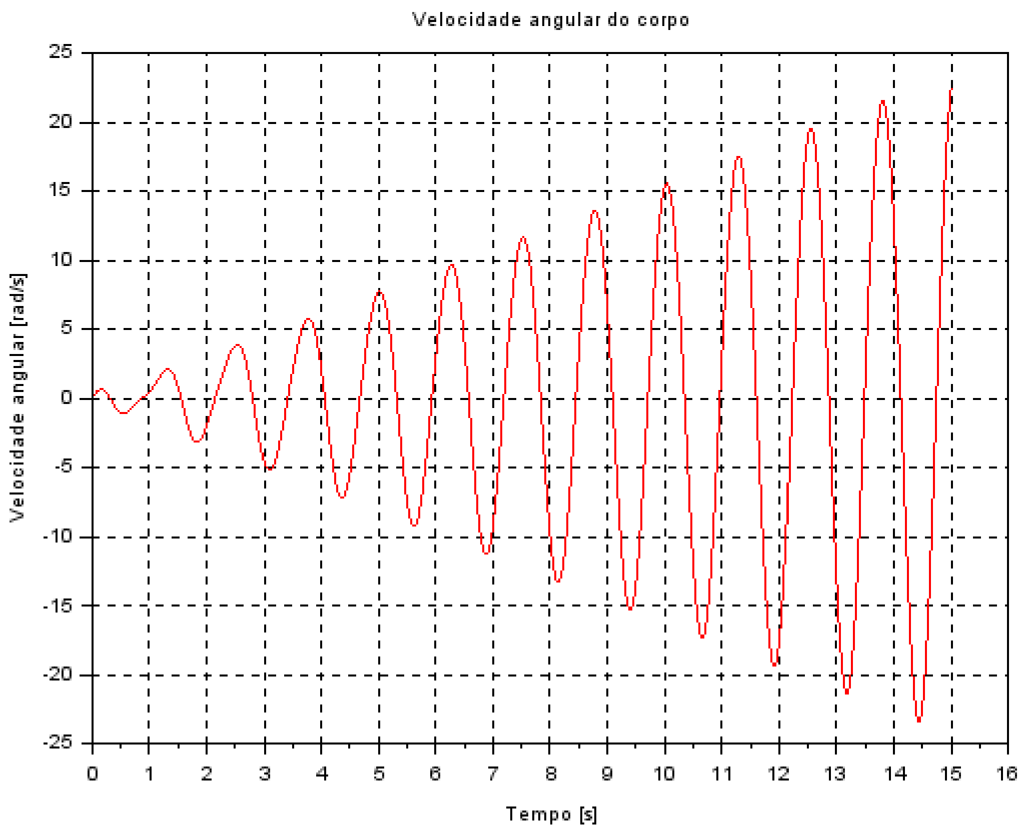




A entrada entra em harmonia com o sistema, gerando uma velocidade constante no centro de massa, porém essa entrada não afeta a rotação do sistema ao redor do seu centro de massa.

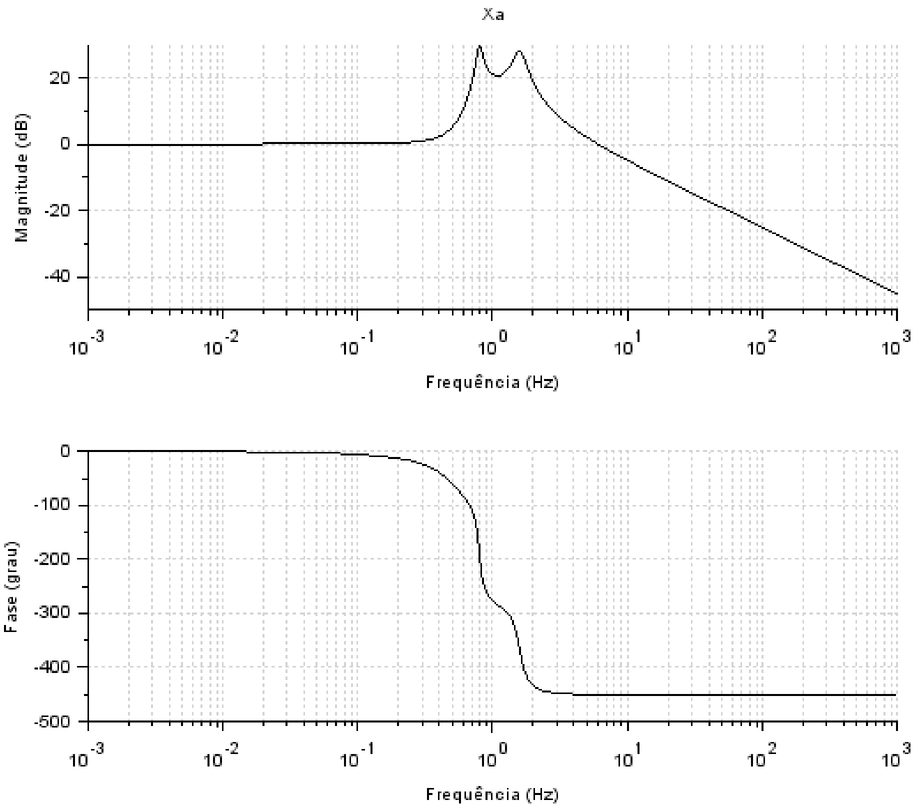
Cenário 3:



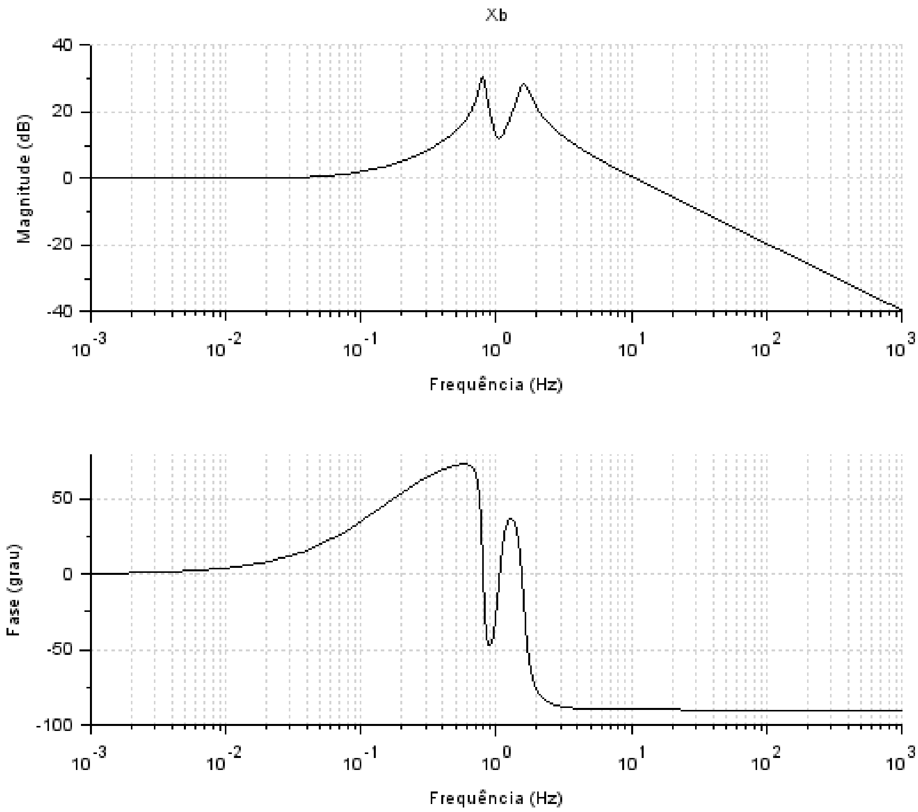


A entrada faz com que o sistema entre em ressonância e a velocidade angular começa a aumentar pico a pico linearmente, aumentando a velocidade de vibração do sistema.

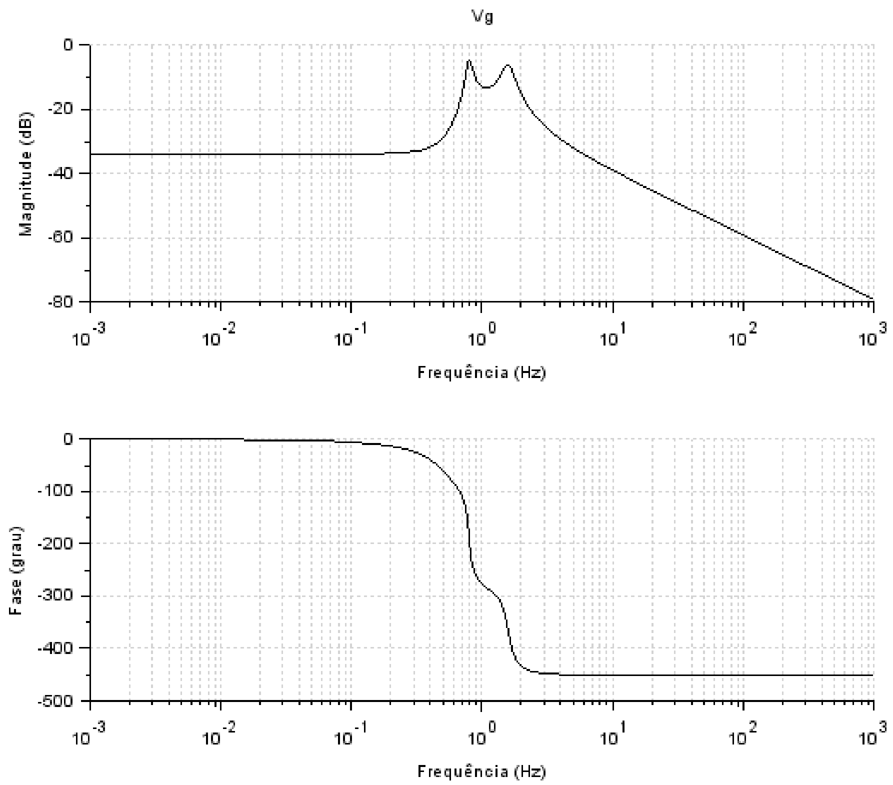
Bode da posição do ponto A



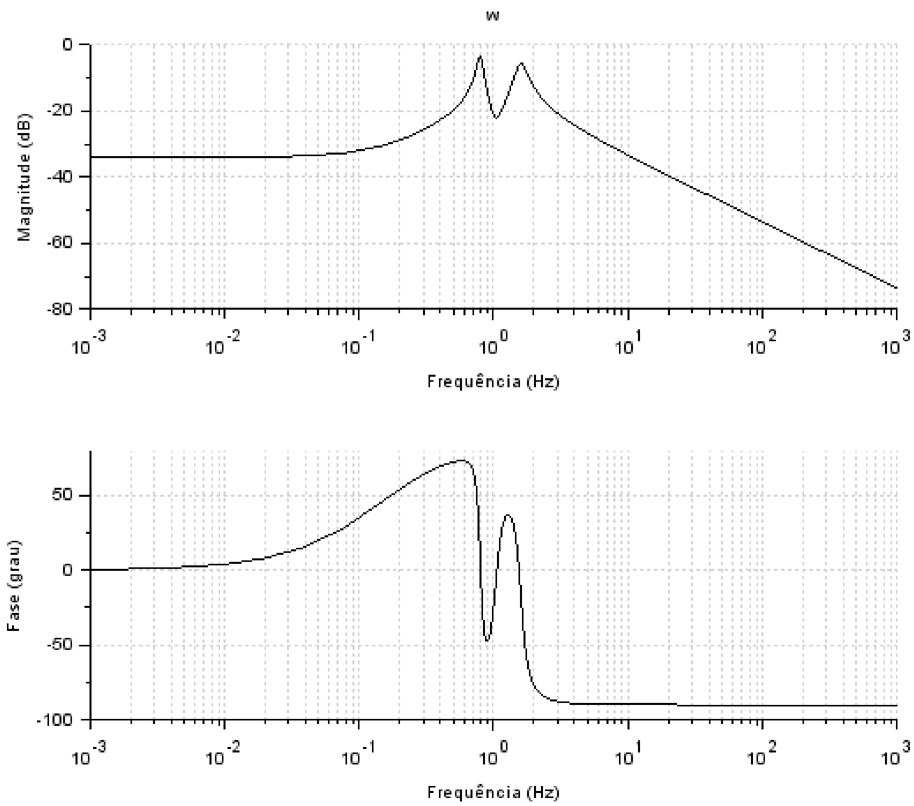
Bode da posição do ponto B



Bode da velocidade do centro de massa

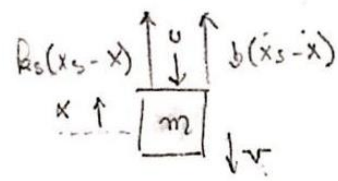


Bode da velocidade angular

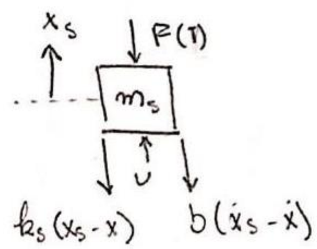


EXERCÍCIO [DO FIM DA LISTA]

MASSA NÃO SUSPENSA



MASSA SUSPENSA



(I) $x - x_G > \ell \Rightarrow v = mg$

(II) $\ell_c < x - x_G < \ell \Rightarrow v = mg - k(x - x_G - \ell)$

(III) $x - x_C < \ell_c \Rightarrow v = mg - k(x - x_G - \ell) - k_B(x - x_G - \ell)$

TMB

$$m_s \ddot{x}_G = u - k_s(x_s - x) - b(\dot{x}_s - \dot{x}) - F(T)$$

$$m \ddot{x} = -u + k_s(x_s - x) + b(\dot{x}_s - \dot{x}) - v$$

Código

```
clear();
xdel(winsid());
//Parâmetros
M = 200;
J = 512;
lA = 0.8;
lB = 0.8;
kA = 10000;
kB = 10000;
bA = 200;
bB = 200;
vH = 10;
td = (lA + lB)/vH;

t_i = 0;
t_f = 15;
t = linspace(t_i,t_f,1000);
s = 3;

//Condições iniciais:
xA0 = 0;
xB0 = 0;
vG0 = 0;
w0 = 0;

//Input das entradas:
if s == 1 then
    function fun=u1(t), fun = t, endfunction
    if t < td then
    function fun=u2(t), fun = 0, endfunction
     else
    function fun=u2(t), fun = t, endfunction
    end

    function fun=u3(t), fun = 1, endfunction
    if t < td then
    function fun=u4(t), fun = 0, endfunction
    else
    function fun=u4(t), fun = 1, endfunction
     end

elseif s == 2 then
    function fun=u1(t), fun = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction
    function fun=u2(t), fun = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction
    function fun=u3(t), fun = sin(9.8995*t), endfunction
    function fun=u4(t), fun = sin(9.8995*t), endfunction

elseif s == 3 then
    function fun=u1(t), fun = -cos(9.8995*t)/4.9875, endfunction
    function fun=u2(t), fun = cos(4.9875*t)/4.9875, endfunction
    function fun=u3(t), fun = sin(4.9875*t), endfunction
    function fun=u4(t), fun = -sin(4.9875*t), endfunction
end
```

```
//vetor de estados:
funcprot(0)
    function dy=ve(t, y)
    dy(1) = y(3) - lA*y(4);
    dy(2) = y(3) + lB*y(4);
    dy(3) = -(kA/M)*y(1) - (kB/M)*y(2)- ((bA + bB)/M)*y(3) + ((bA*lA -bB*lB)/M)*y(4) + (kA/M)*u1(t) + (kB/M)*u2(t) + (bA/M)*u3(t) +(bB/M)*u4(t);
    dy(4) = (lA*kA/J)*y(1) - (lB*kB/J)*y(2) + ((lA*bA - lB*bB)/J)*y(3) -((bA*lA^2 - bB*lB^2)/M)*y(4) - (lA*kA/J)*u1(t) + (lB*kB/J)*u2(t) -(lA*bA/J)*u3(t) + (lB*bB/J)*u4(t);
    endfunction

integ = ode([xA0;xB0;vG0;w0],0,t,ve);
xA = integ(1,:);
xB = integ(2,:);
vG = integ(3,:);
w = integ(4,:);

scf(1)
xtitle("Velocidade do cm");
xlabel("t[s]");
ylabel("v [m/s]");
plot(t,vG,'r');
xgrid()

scf(2)
xtitle("Velocidade angular do corpo");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Velocidade angular [rad/s]");
plot(t,w,'r');
xgrid()

//funções de transferência:
A = [0,0,1,-lA;0,0,1,lB;-kA/M,-kB/M,-(bA+bB)/M,(bA*lA - bB*lB)/M;lA*kA/J,-lB*kB/J,(lA*bA-lB*bB)/J,-(bA*lA^2 + bB*lB^2)/J];
B = [0,0,0,0;0,0,0,0;kA/M,kB/M,bA/M,bB/M;-lA*kA/J,lB*kB/J,-lA*bA/J,lB*bB/J];
sl = syslin('c',A,B,[1,1,1,1]);
h = ss2tf(sl);

scf(3);
bode(h(1,1));
xtitle("Xa");

scf(4);
bode(h(1,2));
xtitle("Xb");

scf(5);
bode(h(1,3));
xtitle("Vg");

scf(6);
bode(h(1,4));
xtitle("w");
```