

# Lista G

Modelagem

**Henrique Kuhlmann**

10772672



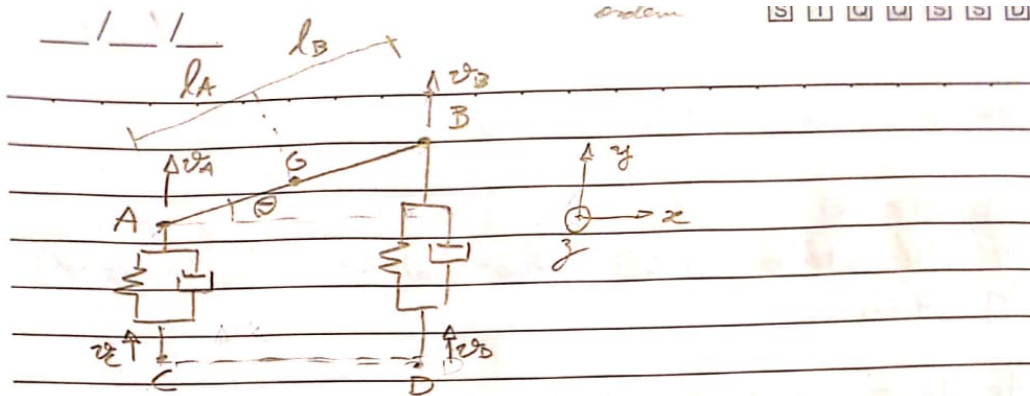
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo

São Paulo

2020

1 Modelo de  $\frac{1}{2}$  carro

## a) Obtenção do modelo



TQMA para barra em relação ao polo G:

$$\begin{cases} M_G = J \ddot{\theta} \hat{k} \\ M_G = (k_A k_A (x_A - x_C) - k_B k_B (x_B - x_D) + l_A b_A (\dot{x}_A - \dot{x}_C) + l_B b_B (\dot{x}_B - \dot{x}_D)) \hat{k} \end{cases} \rightarrow \theta \approx 0 \rightarrow \sin \theta \approx 0, \cos \theta \approx 1$$

$\hat{z}$  lei de Newton:

$$\vec{F}_R = M \ddot{\vec{z}} \\ -k_A(x_A - x_C) - k_B(x_B - x_D) - b_A(\dot{x}_A - \dot{x}_C) - b_B(\dot{x}_B - \dot{x}_D) = M \ddot{z}$$

$$* \dot{x}_A = \dot{z}_G - l_A \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \dot{x}_B = \dot{z}_G + l_B \dot{\theta} \quad (\text{vínculo cinemático})$$

Reorganizando as equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \dot{z}_G - l_A \dot{\theta} \\ \dot{x}_B = \dot{z}_G + l_B \dot{\theta} \\ \ddot{z}_G = (-k_A x_A - k_B x_B - b_A(\dot{z}_G - l_A \dot{\theta}) - b_B(\dot{z}_G + l_B \dot{\theta}) + k_A x_C + k_B x_D + b_A \dot{x}_C + b_B \dot{x}_D) / M \\ \ddot{\theta} = (k_A k_A z_C - k_B k_B z_D + l_A b_A (\dot{z}_G - l_A \dot{\theta}) - l_B b_B (\dot{z}_G + l_B \dot{\theta}) - l_A k_A z_C + l_B k_B z_D - \dots - l_A b_A \dot{x}_C + l_B b_B \dot{x}_D) / J \end{cases}$$

Colocando em forma matricial e expandindo:

$$\begin{array}{c}
 \dot{z}_A \\
 \dot{z}_B \\
 v_B \\
 \ddot{\theta}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c}
 0 & 0 & 1 & -l_A & z_A \\
 0 & 0 & 1 & l_B & z_B \\
 -k_A/M & -k_B/M & \frac{-b_A - b_B}{M} & \frac{l_A l_A - l_B l_B}{M} & v_B \\
 l_A k_A/J & -l_B k_B/J & \frac{b_A l_A - l_B b_B}{J} & \frac{-l_A l_A - b_A l_B^2}{J} & \ddot{\theta}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 z_A \\
 z_B \\
 v_B \\
 \ddot{\theta}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_A/M & k_B/M & b_A/M & b_B/M \\
 -l_A k_A/J & l_B k_B/J & -l_A b_A/J & l_B b_B/J
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 z_C \\
 z_D \\
 \dot{z}_C \\
 \dot{z}_D
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

• Conhecendo  $\dot{z}_C$  e  $\dot{z}_D$  ( $v_C$  e  $v_D$ ) e  $z_C(0)$  e  $z_D(0)$ :

$$z_C = \int_0^t v_C(\tau) d\tau + z_C(0) \quad \text{e} \quad z_D = \int_0^t v_D(\tau) d\tau + z_D(0)$$

$$v_H \cdot t_D = v_H = \frac{l_A + l_B}{t_D} \quad \sim \quad t_D = \frac{l_A + l_B}{v_H} \quad \sim \quad t_D = 0,16 \text{ s}$$

$$\dot{z} = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

## b) Simulações

Três excitações diferentes serão estudadas. A primeira consiste em uma excitação de degrau unitário para  $v_C$  e  $v_D$ . O degrau é iniciado em  $t = 0$  em  $v_C$  e em  $t = t_D$  em  $v_D$ . Esse tipo de excitação é semelhante ao de uma rampa. No instante zero, a parte dianteira do veículo inicia a subida na rampa e no instante  $t_D$ , a parte traseira do veículo inicia a subida na rampa. Os gráficos obtidos foram os seguintes:

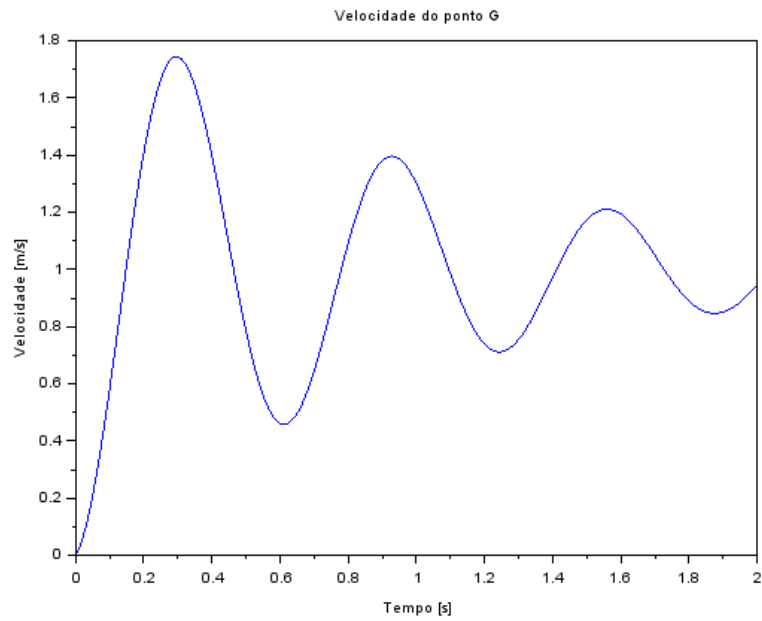


Figura 1 – Velocidade do centro de massa - Simulação 1

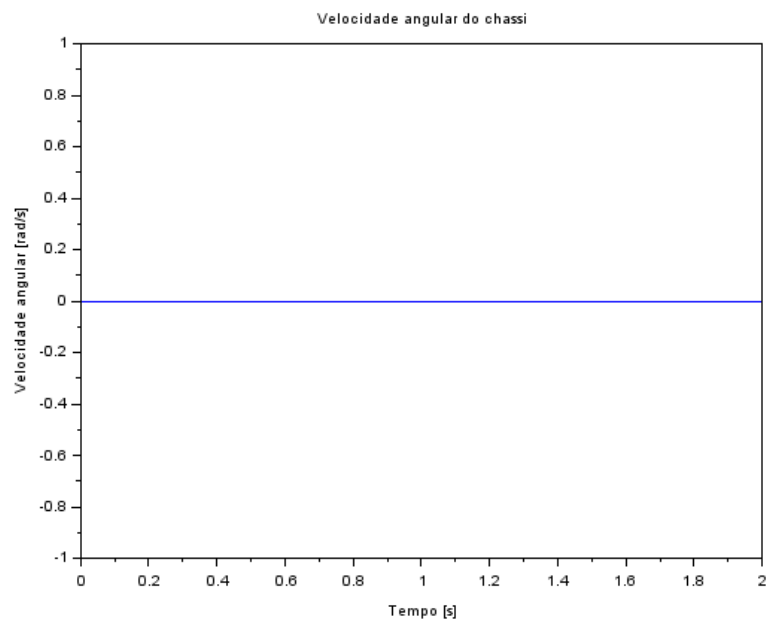


Figura 2 – Rotação do chassi - Simulação 1

Em seguida, duas simulações diferentes são feitas, ambas com entradas harmônicas:

$$v_{C2} = -v_{D2} = \sin(9,8995t) \quad (1)$$

$$v_{C3} = v_{D3} = \sin(4,9875t) \quad (2)$$

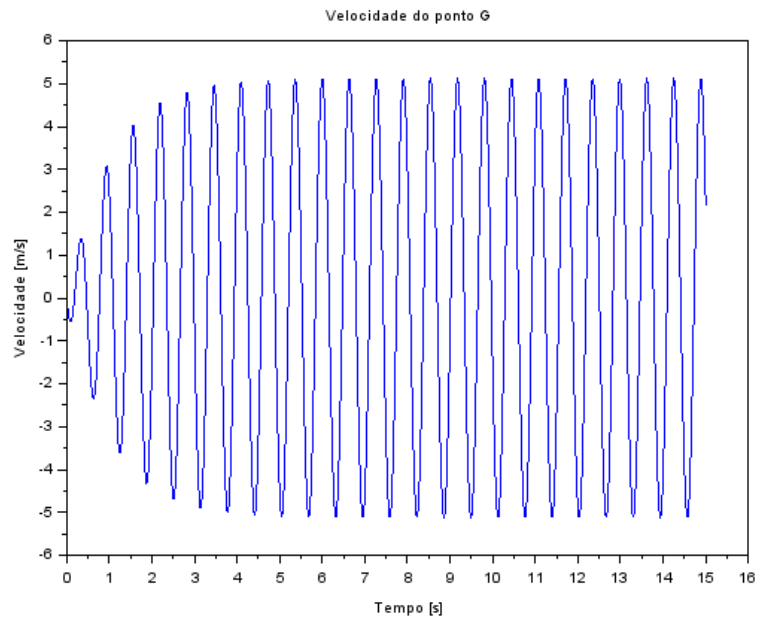


Figura 3 – Velocidade do centro de massa - Simulação 2

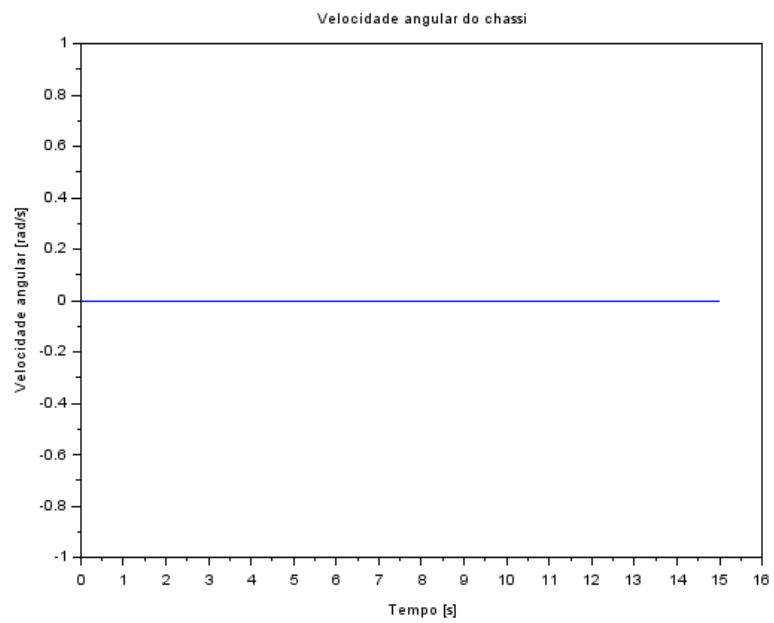


Figura 4 – Rotação do chassi - Simulação 2

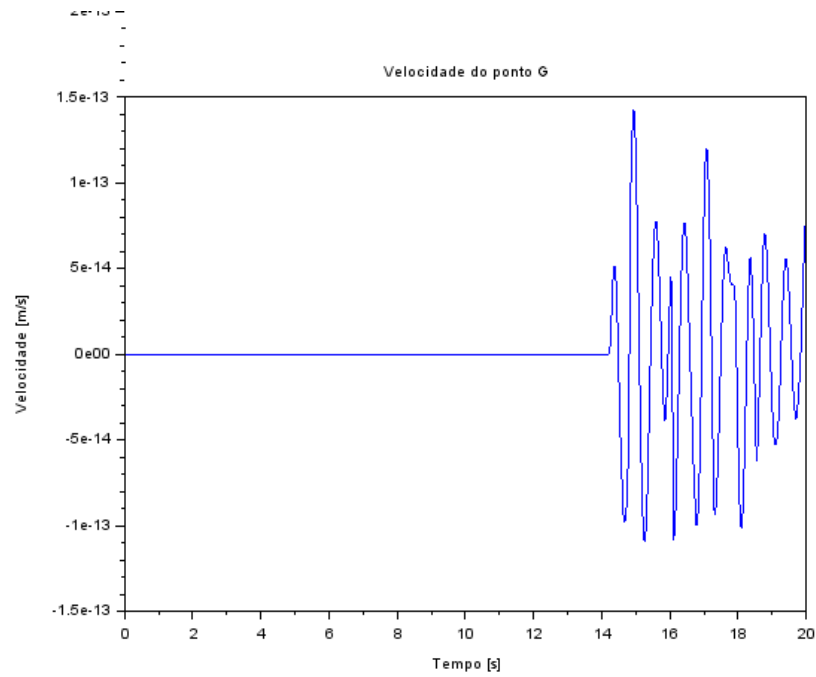


Figura 5 – Velocidade do centro de massa - Simulação 3

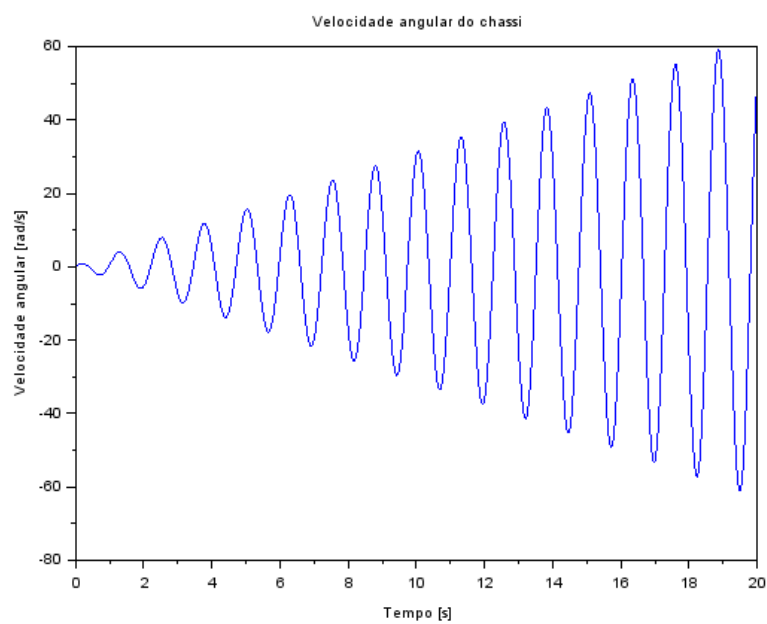


Figura 6 – Rotação do chassi - Simulação 3

Percebe-se que a maior diferença entre os dois está na diferença de fase. Enquanto na primeira simulação ambas as entradas estão em fase, o chassi não apresenta rotação e o centro de massa realiza um movimento harmônico. Já na segunda entrada, as entradas estão defasadas em  $180^\circ$ , o que resulta na rotação do chassi e velocidade nula do centro de

massa. Ainda, há diferença entre as frequências devido à diferença da frequência das duas entradas.

### c) Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode para o modelo obtido foram:

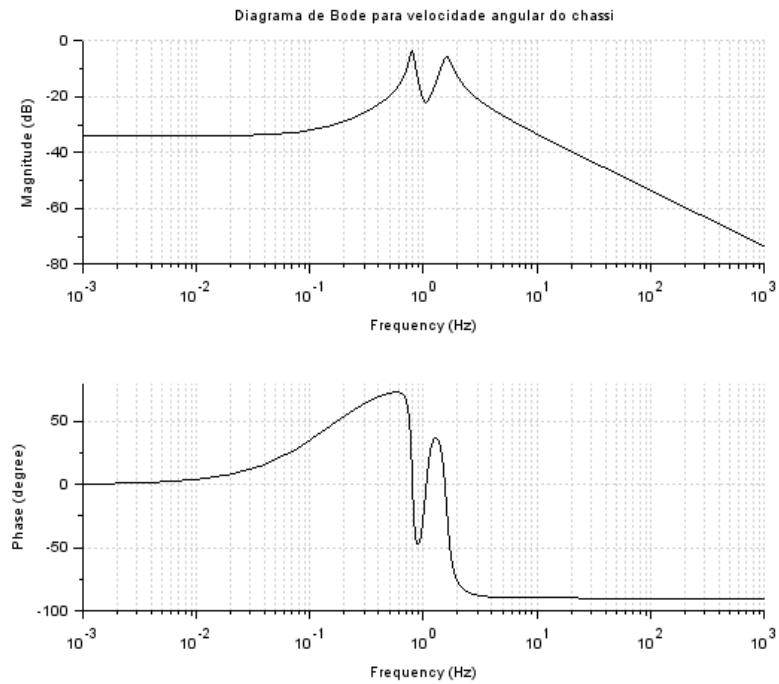


Figura 7 – Diagrama de Bode para  $x_G$

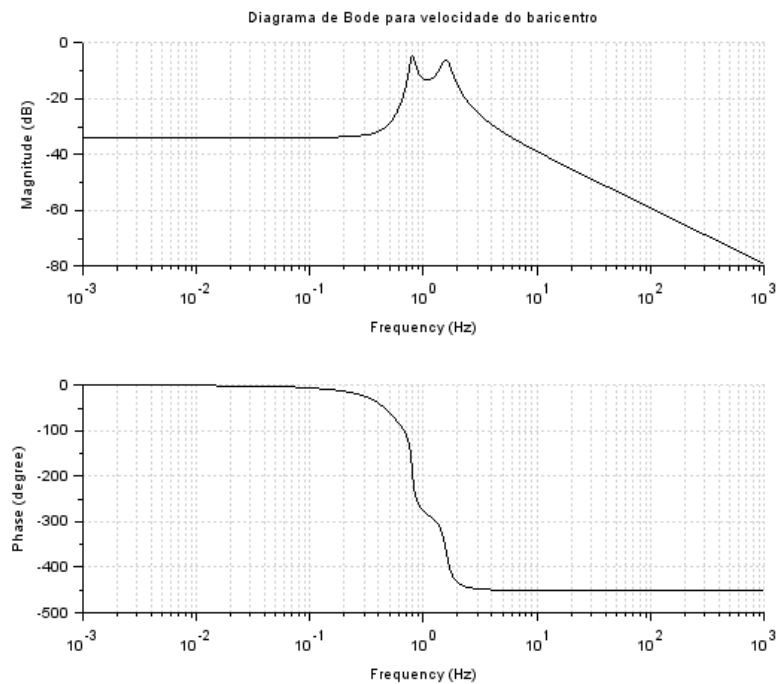


Figura 8 – Diagrama de Bode para  $\omega$

Para a análise da fase da velocidade do centro de massa, para baixas frequências baixas e altas, ela permanece com fase nula. Durante a frequência de ressonância, há variação da diferença de fase. Já para o rotação do chassi, o mesmo é válido para frequências baixas, entretanto, para frequências elevadas, a diferença de fase tende a 90 graus.