

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista G



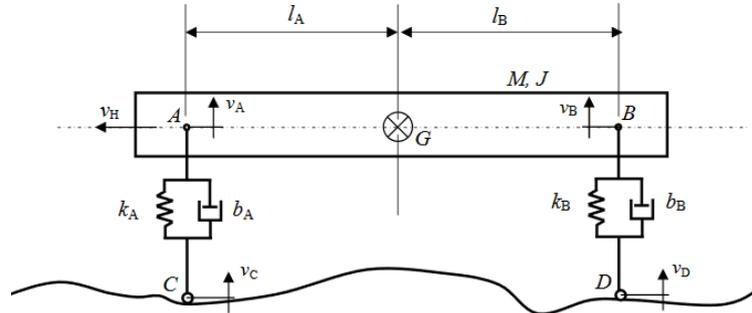
Gabriela Vasconcelos Araujo - 10771497

Prof. Dr. Décio Crisol Donha
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury
São Paulo, 2020

SUMÁRIO

1. Obtenção do Modelo de $\frac{1}{2}$ Carro	2
Parâmetros e Hipóteses Simplificadoras	2
Modelo.....	2
2. Simulação do Modelo de $\frac{1}{2}$ Carro.....	3
Entrada do Tipo Degrau	3
Entrada tipo Seno.....	4
3. Resposta em Frequência – Degrau Unitário	5
Valores a Serem Obtidos	5
Diagramas de Bode para Degrau Unitário.....	6
Apêndice – Códigos.....	8

1. OBTENÇÃO DO MODELO DE ½ CARRO



PARÂMETROS E HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Parâmetros

$$\begin{aligned}
 M &= 200 \text{ kg}; \\
 J &= 512 \text{ kgm}^2; \\
 l_A &= 0,8 \text{ m}; \\
 l_B &= 0,8 \text{ m}; \\
 k_A &= 10.000 \text{ N/m}; \\
 k_B &= 10.000 \text{ N/m}; \\
 b_A &= 200 \text{ Ns/m}; \\
 b_B &= 200 \text{ Ns/m}; \\
 v_H &= 10 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Hipóteses Simplificadoras

- Movimentos apenas no plano da página
- AC e BD permanecem sempre na vertical
- Molar e amortecedores lineares
- Deslocamento angular do segmento AB é pequeno ($\therefore \text{sen} \alpha \cong \text{tan} \alpha \cong \alpha$ e $\text{cos} \alpha \cong 1$)

MODELO

Nesse modelo, consideramos como entradas as velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos C e D, e como saídas a velocidade vertical v_G do centro de massa G e velocidade angular ω de AB em torno de G. Além disso, temos também as variáveis alongação x_A da mola de rigidez k_A e alongação x_B da mola de rigidez k_B .

Utilizando o método de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}; V = \frac{k_A x_A^2}{2} + \frac{k_B x_B^2}{2}; R = \frac{b_A x_A^2}{2} + \frac{b_B x_B^2}{2} \\
 \therefore L &= \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} - \left(\frac{k_A x_A^2}{2} + \frac{k_B x_B^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Em que temos as seguintes velocidades v_A e v_B :

$$\begin{cases} v_A = v_G - l\dot{\alpha} + v_C \\ v_B = v_G + l\dot{\alpha} + v_D \end{cases}$$

Realizando as devidas derivadas parciais em relação as coordenadas generalizadas, obtemos:

$$M\ddot{x} = -k_A x_A - k_B x_B - [b_A(v_C + v_G - l_A \dot{\alpha}) + b_B(v_D + v_G + l_B \dot{\alpha})]$$

$$J\ddot{\alpha} = k_A x_A l_A - k_B x_B l_B - [b_A l_A (v_C + v_G - l_A \dot{\alpha}) + b_B l_B (v_D + v_G + l_B \dot{\alpha})]$$

Reescrevendo as equações na forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{v}_G \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & -\frac{(b_A + b_B)}{M} & \frac{b_A l_A + b_B l_B}{M} \\ \frac{k_A l_A}{J} & -\frac{k_B l_B}{J} & \frac{(b_A l_A - b_B l_B)}{J} & -\frac{(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{b_A}{M} & -\frac{b_B}{M} \\ \frac{b_A l_A}{J} & -\frac{b_B l_B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

$$y = Cx + Du$$

$$\begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

2. SIMULAÇÃO DO MODELO DE 1/2 CARRO

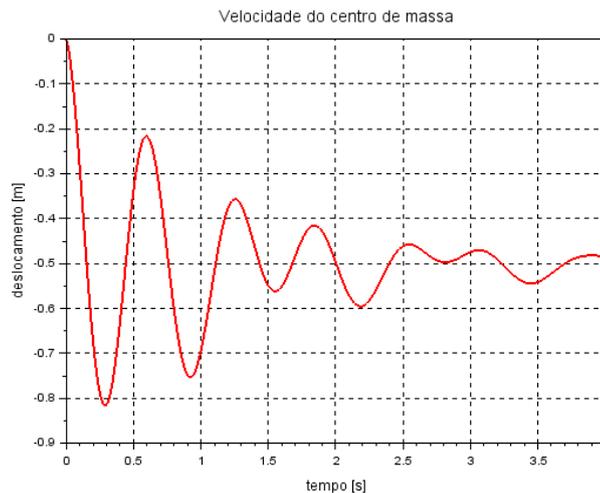
ENTRADA DO TIPO DEGRAU

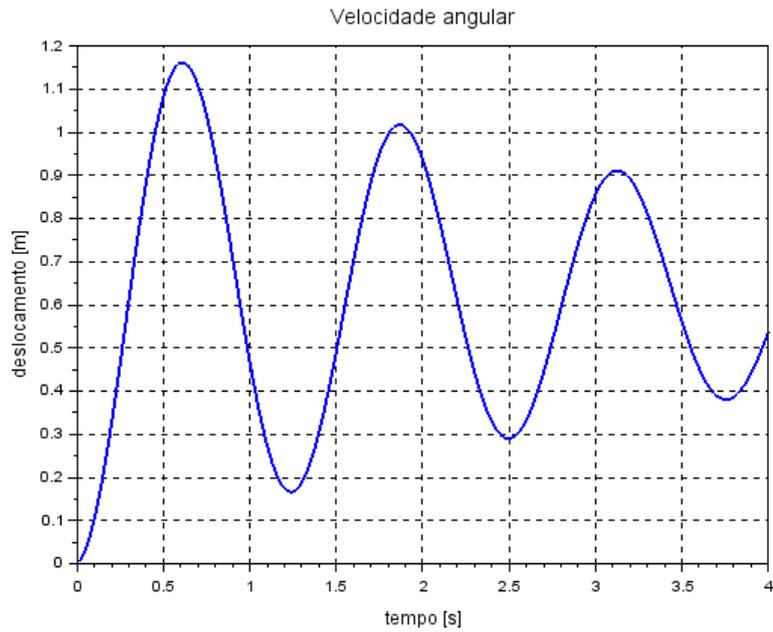
$$u = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}; t = 4s$$

$$v_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}; v_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases}$$

$$t_d = \frac{l_A + l_B}{v_H} = \frac{1,6}{10} = 0,16 \text{ s}$$

Abaixo apresentamos as respostas obtidas para a simulação via Scilab.

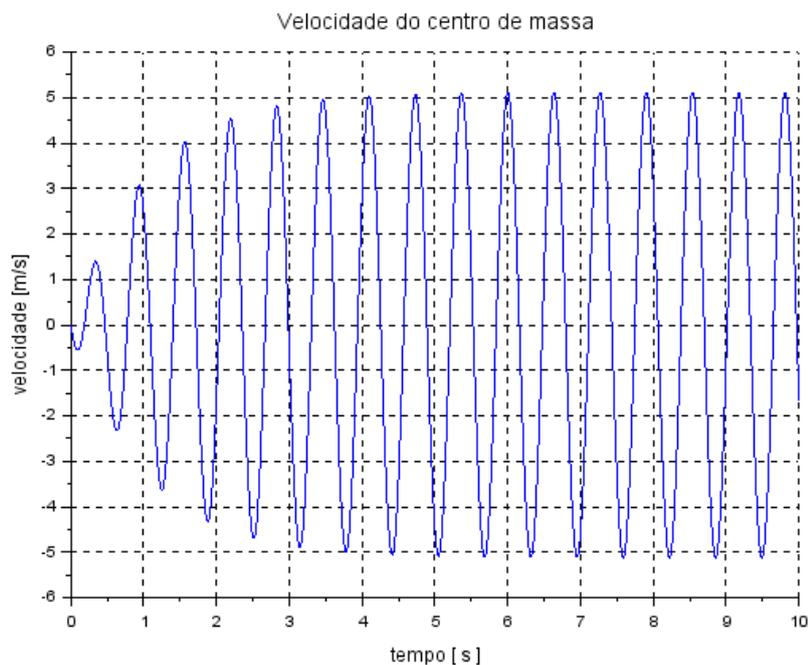


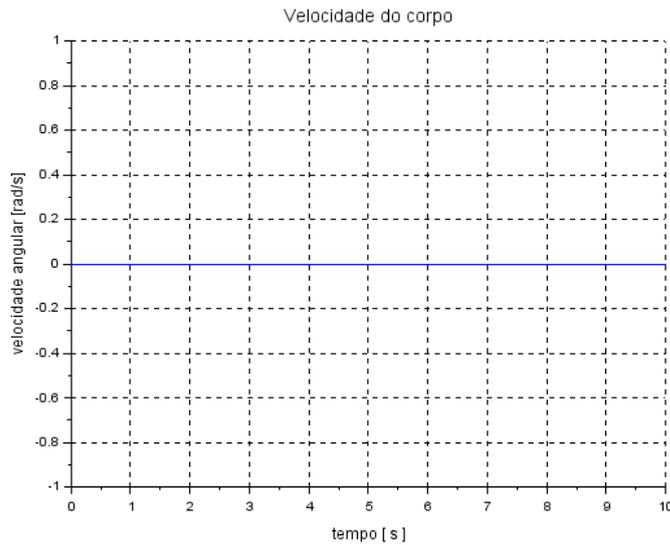


Os resultados obtidos demonstram a oscilação ao redor do equilíbrio tanto para a velocidade linear como para a velocidade angular. Fisicamente, uma entrada do tipo degrau unitário para as velocidades v_C e v_D pode estar associada a algum tipo de subida, como uma rampa, com uma inclinação fixa em 45° .

ENTRADA TIPO SENO

Para $v_C = v_D = \text{sen}(9,8995t)$:





3. RESPOSTA EM FREQUÊNCIA – DEGRAU UNITÁRIO

VALORES A SEREM OBTIDOS

Obtemos as seguintes funções transferência a partir do código executado:

$$\frac{-1250 - 25s - 50s^2 - s^3}{2500 + 100s + 126s^2 + 2.5s^3 + s^4} \quad \frac{-1250 - 75s - 51s^2 - s^3}{2500 + 100s + 126s^2 + 2.5s^3 + s^4}$$

$$\frac{15.625 + 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \quad \frac{-15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2}$$

Assim, temos a seguinte equação característica:

$$s^4 + 2,5s^3 + 126s^2 + 100s + 2500$$

Com os seguintes polos:

$$p_1 = -0,333003 \pm 4,985178j$$

$$p_2 = -0,666997 \pm 9,985178j$$

Como temos que

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}j$$

É possível encontrar os valores procurados:

$$\omega_{n1} \approx 5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n2} \approx 10 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_1 \approx 0,067$$

$$\zeta_2 \approx 0,067$$

Assim

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \rightarrow \begin{cases} \omega_{d1} = 4,99 \text{ rad/s} \\ \omega_{d2} = 9,98 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \rightarrow \begin{cases} \omega_{r1} = 4,98 \text{ rad/s} \\ \omega_{r2} = 9,95 \text{ rad/s} \end{cases}$$

DIAGRAMAS DE BODE PARA DEGRAU UNITÁRIO

Figura 1: Diagrama de Bode - G11

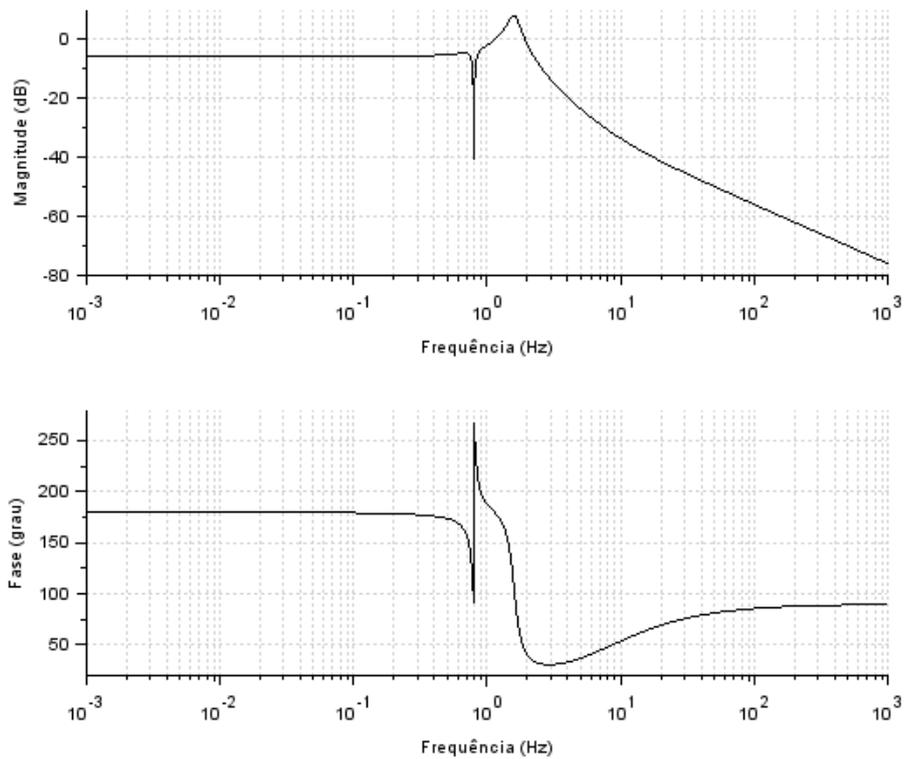


Figura 2: Diagrama de Bode - G12

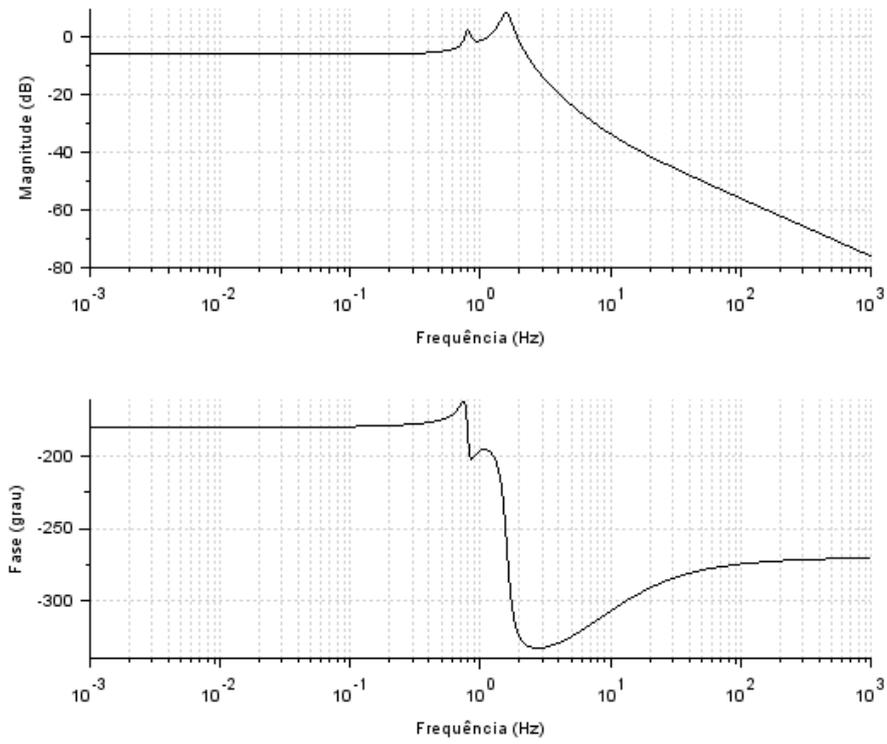


Figura 3: Diagrama de Bode - G21

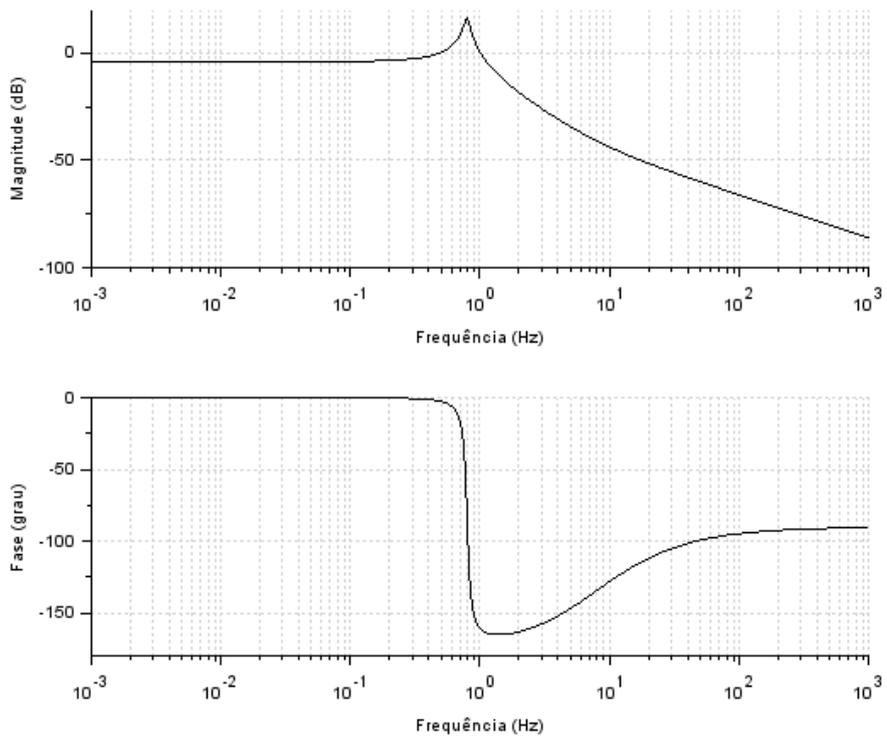
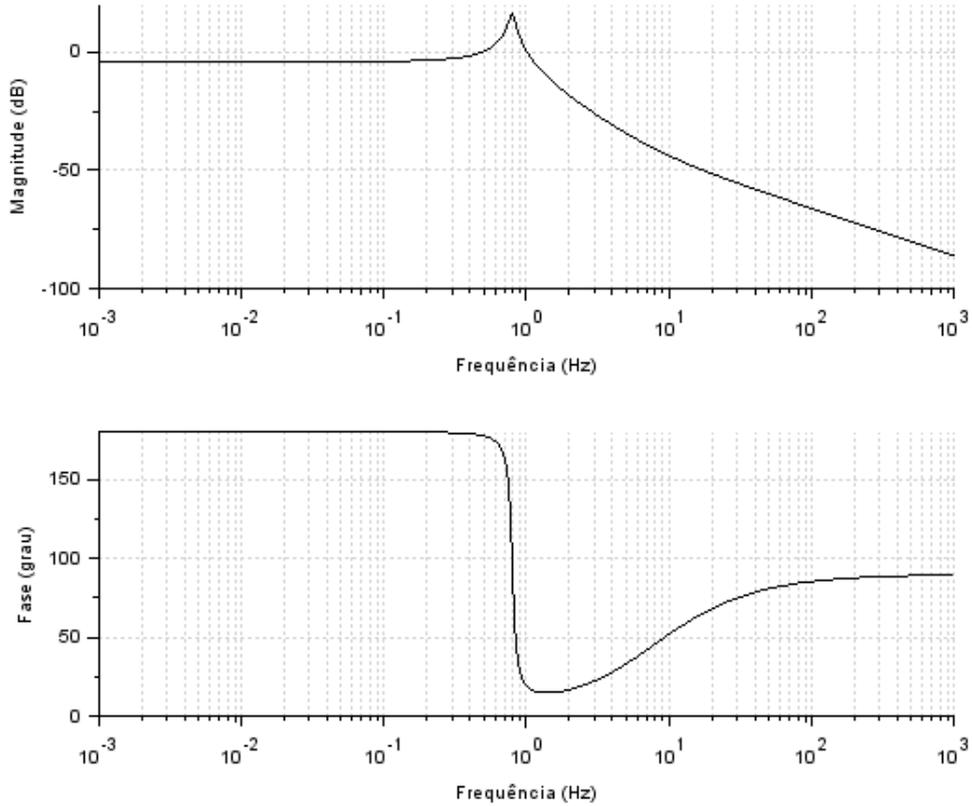


Figura 4: Diagrama de Bode - G22



APÊNDICE – CÓDIGOS

clear

```
M = 200;
J = 512;
la = 0.8;
lb = 0.8;
ka = 10000;
kb = 10000;
ba = 200;
bb = 200;
vh = 10;
```

// sistema linear

```
A=[0,0,1,-la;..
0,0,1,lb;...
-ka/M,-kb/M,-(ba + bb)/M,(ba*la + bb*lb)/M;..
ka*la/J,-kb*lb/J,(ba*la - bb*lb)/J,-(ba*(la^2) + bb*(lb^2))/J]
```

```
B=[1,0;..
0,1;..
-ba/M,-bb/M;..
(ba*la)/J,(-bb*lb)/J]
```

```

C=[0,0,1,0;..
  0,0,0,1]

D=[0,0;..
  0,0]

G = syslin('c',A,B,C,D)
Gs = ss2tf(G)

X0 = [0; 0; 0; 0] // condição inicial
t = 0:0.01:4
t2 = 0:0.1:10
td = 1.6/vh;
//entradas
tipo = 'unitaria' // 'unitaria' ou 'seno'
u = zeros (2, length(t));
u2 = zeros (2, length(t2));
u3 = zeros (2, length(t2));
if tipo == 'unitaria' then
  u(1,:) = 1 //vc
  for i = 1:length(t)
    if t(i) >= td then // vd
      u(2:i) = 1
    end
  end
elseif tipo == 'seno' then
  /// u2 = zeros (2, length(t2));
  // u3 = zeros (2, length(t2));
  i = 1
  for t2 = 0:0.1:10
    u2(1,i) = sin(9.8995*t2);
    u2(2,i) = sin(9.8995*t2);
    u3(1,i) = sin(4.9875*t2);
    u3(2,i) = -sin(4.9875*t2);
    i = i + 1
  end
end
end

x0 = [0 0 0 0]

[y, x] = csim (u, t, G, X0)
//[y2, x2] = csim (u2, t2, G, x0)
//[y3, x3] = csim (u3, t2, G, x0)

if tipo == 'unitaria' then
  f1 = scf(1)
  plot(t,y(1,:), 'r', 'linewidth',2)
  xgrid()
  xtitle ('Velocidade do centro de massa', 'tempo [s]', 'deslocamento [m]')

  f2 = scf(2)
  plot(t,y(2,:), 'b', 'linewidth',2)
  xgrid()
  xtitle ('Velocidade angular', 'tempo [s]', 'deslocamento [m]')

  disp(Gs)

  f3 = scf(3)

```

```
bode(G(1,1))

f4 = scf(4)
bode(G(1,2))

f5 = scf(5)
bode(G(2,1))

f6 = scf(6)
bode(G(2,2))

end
if tipo == 'seno' then
    f7 = scf(7)
    plot(ty2(1,:), 'r', ty2(2,:), 'b', 'linewidth', 2)
    xgrid()
    xtitle('Resposta a entrada senoidal 1', 'tempo [s]', 'deslocamento [m]')
    legend('velocidade do centro de massa', 'velocidade angular')
end
```