PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Ítalo Gonçalves Sant’ana Paiva - NUSP: 10853310

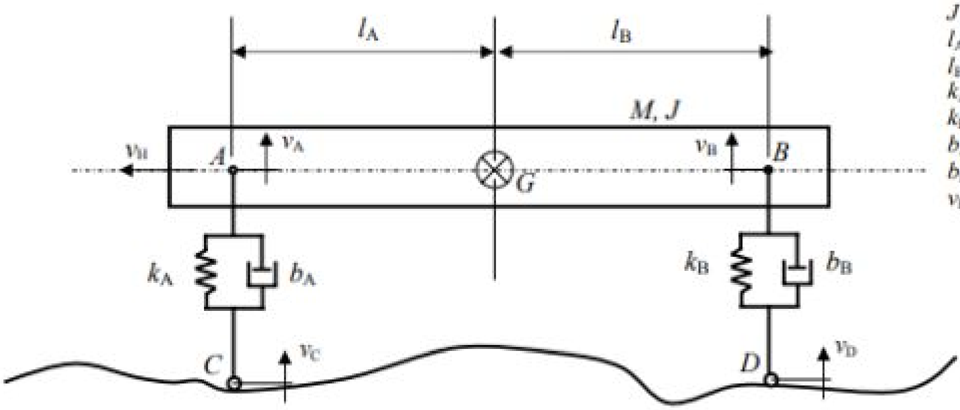
LISTA G

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

São Paulo

2020

1. Obtenha o modelo de ½ carro:



$M = 200$ kg;
$J = 512$ kgm^2;
$l_A = 0{,}8$ m;
$l_B = 0{,}8$ m;
$k_A = 10.000$ N/m;
$k_B = 10.000$ N/m;
$b_A = 200$ Ns/m;
$b_B = 200$ Ns/m;
$v_H = 10$ m/s;

Modelo da dinâmica vertical:
A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de G (v_H) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical v_G do centro de massa G.
- velocidade angular ω de AB em torno de G.
- elongação x_A da mola de rigidez k_A.
- elongação x_B da mola de rigidez k_B.

Entradas: velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos C e D.
Saídas: velocidade vertical v_G do centro de massa G e velocidade angular ω de AB em torno de G.

Hipóteses simplificadoras:
- Movimento apenas no plano da página.
- AC e BD permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que $sen\alpha \cong tan\alpha \cong \alpha$ e $cos\alpha \cong 1$).

Molas como lineares, assim como amortecedores

A partir do TQMA:

$$(k_A X_A l_A - k_B X_B l_B) + (b_A l_A (\dot{X}_G - \dot{X}_C - \dot{\theta} l_A) \cdot$$

$$- b_B l_B (\dot{X}_G + \dot{\theta} l_B - \dot{X}_D)) = \ddot{\theta} J$$

já pelo TMB:

$$-\left(b_B(\dot{x}_G-\dot{\theta}\, l_B-\dot{x}_D)+b_A(\dot{x}_G-\dot{x}_C-\dot{\theta}\, l_A)\right)$$

$$+\left(k_A x_A-k_B x_B\right)=\ddot{x}_G M$$

Assim, com as relações:

$$y=\begin{pmatrix} v_G \\ \omega \end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix} v_C \\ v_D \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx+Du \end{matrix}$$

chega-se a:

$$\begin{pmatrix} v_G \\ \omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_C \\ v_D \end{pmatrix}$$

ℓ

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{x}_B\\ \dot{v}_{B}\\ \dot{\omega}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & l_B \\ \frac{k_A}{M} & \frac{-k_B}{M} & -\frac{(b_B+b_A)}{M} & \frac{(b_A l_A + b_B l_B)}{M} \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \frac{(b_A l_A - b_B l_B)}{J} & -\frac{(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\ x_B\\ v_C\\ \omega\end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{l_A b_A}{M} & \frac{l_B b_B}{M} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_C \\ v_D \end{pmatrix}$$

2. Simulação do modelo de ½ carro

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo degrau. Considere condições iniciais nulas e tempo de simulação de 4 segundos.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

Explique o tipo de obstáculo físico que é representado pela entrada degrau, e explique por que a entrada v_D ocorre t_d segundos após a entrada v_C (deve-se calcular t_d antes de se fazer a simulação).

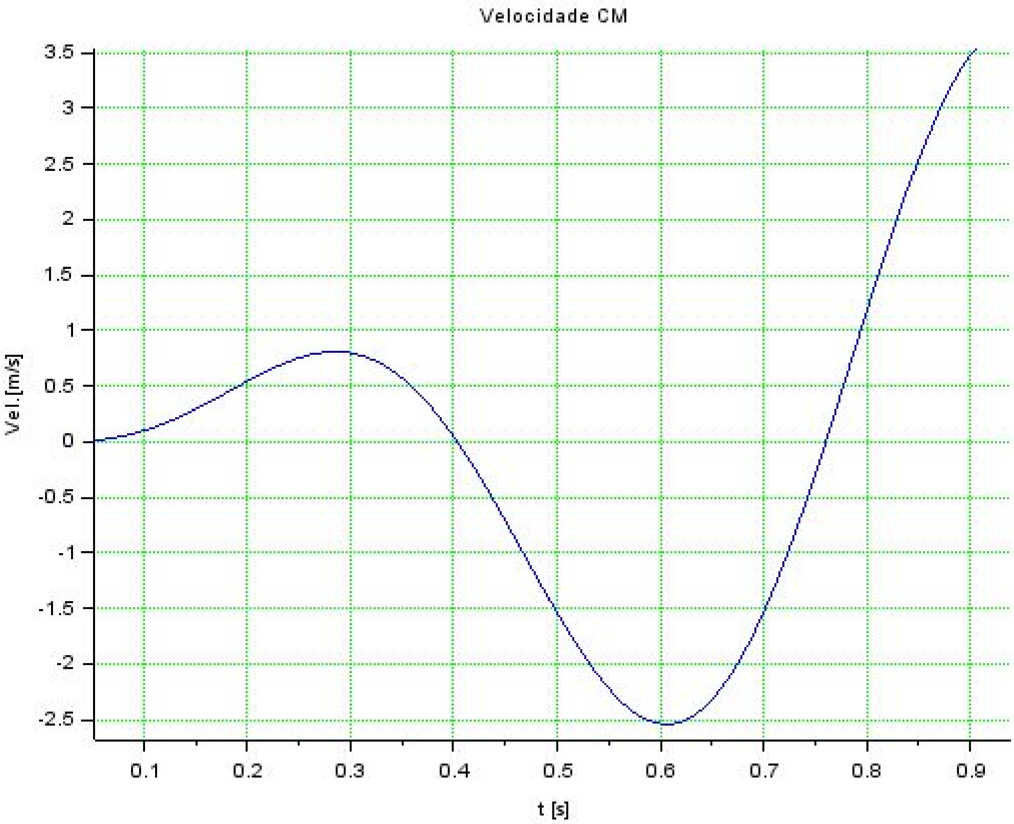
Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo seno. Considere condições iniciais nulas. Simule por tempo suficiente para mostrar cerca de 20 períodos.

Entradas (observe que são duas simulações diferentes): $v_C = v_D = \text{sen}(9{,}8995t)$
$v_C = -v_D = \text{sen}(4{,}9875t)$

Repita as simulações para valores maiores e menores de freqüência. Compare os resultados.
Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.
Calcule os coeficientes de amortecimento, as freqüências naturais, as freqüências naturais amortecidas e as freqüências de ressonância.

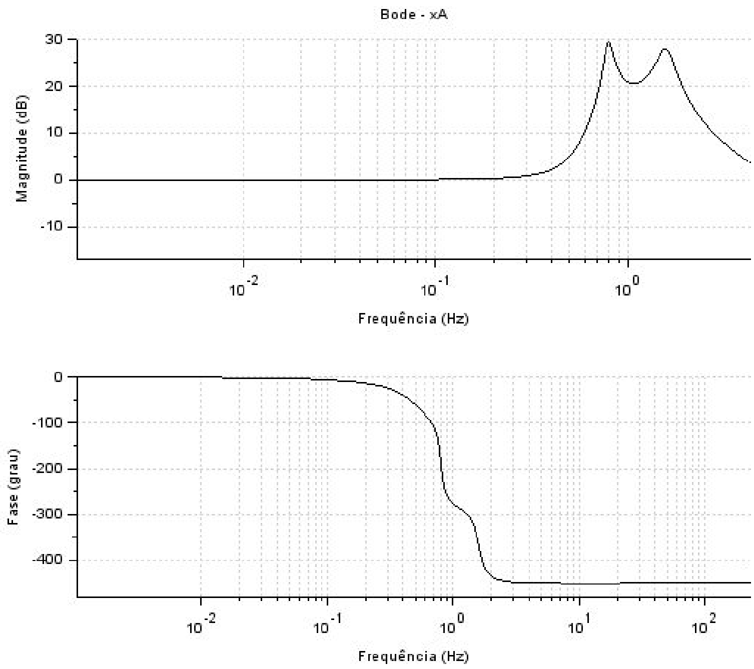
Obteve-se para vC = −vD = sen(4, 9875t):

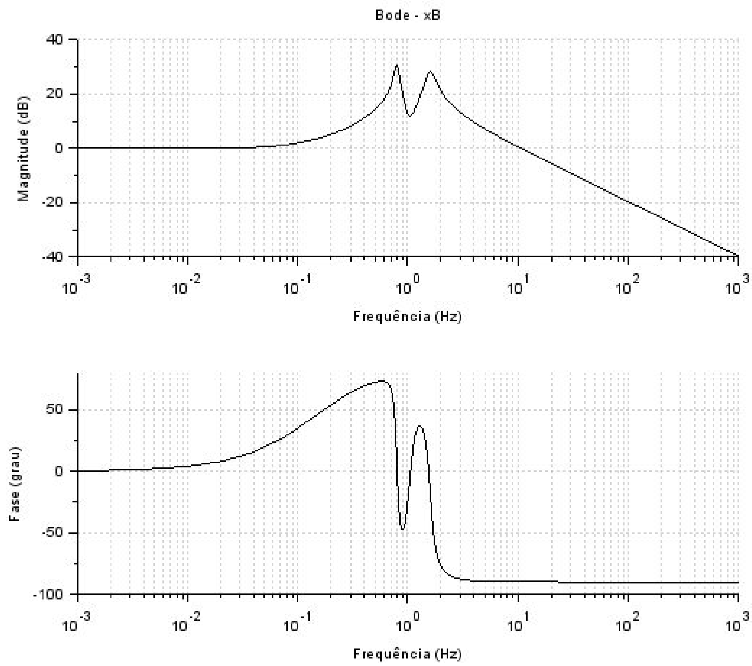


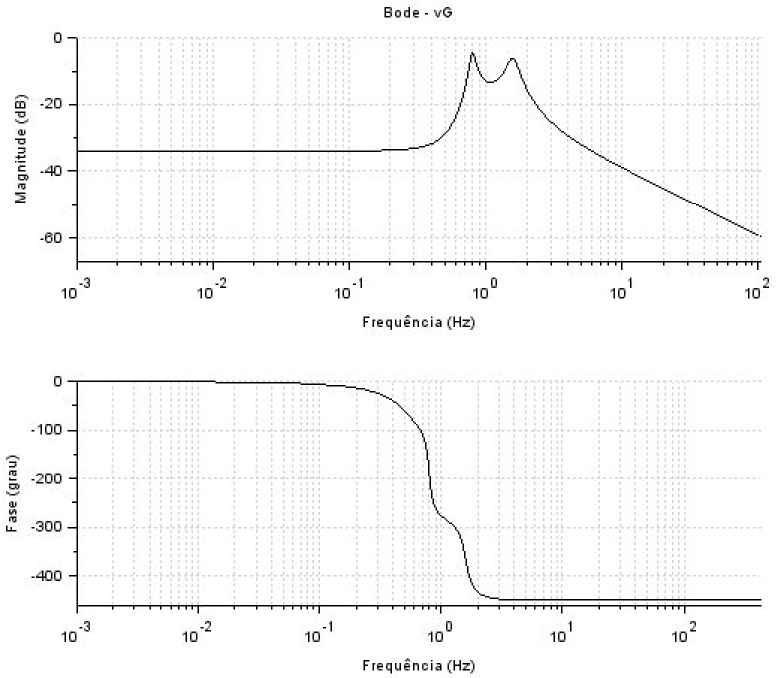
3. Análise de resposta em freqüência

Obtenha os diagramas de Bode do sistema de suspensão e interprete os resultados.

Os diagramas de Bode referentes aos sistema são:


Bode - xA
Magnitude (dB)
Frequência (Hz)
Fase (grau)
Frequência (Hz)


Bode - xB
Magnitude (dB)
Frequência (Hz)
Fase (grau)
Frequência (Hz)



Bode - vG
Magnitude (dB)
0
-20
-40
-60
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequência (Hz)
Fase (grau)
0
-100
-200
-300
-400
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequência (Hz)

CÓDIGOS UTILIZADOS:

// CÓDIGO - ITALO PAIVA - 10853310

```
clear all
clc
kA = 10000;
kB = 10000;
bA = 200;
bB = 200;
vH = 10;
M = 200;
J = 512;
IA = 0.8;
IB = 0.8;

B = [0,0,0,0;
    0,0,0,0;
    kA/M,kB/m,bA/M,bB/M;
    -IA*kA/J,IB*kB/J,-IA*bA/J,Ib*bB/J];

A = [0,0,1,1;
    0,1,1,IB;
    -kA/M,-k/M,-(bA+bB)/M,(bA*IA - bB*Ib)/M;
    IA*kA/J,-IB*kB/J,(IA*ba-IB*bB)/J,-(bA*IA^2 + bB*IB^2)/J];

xa0 = 0;
xB0 = 0;
vg0 = 0;
w0 = 0;
t_0 = 0;
t_f = 1;
t = linspace(t_0,t_f,1000);

function fun=u1(t)
    fun = -cos(9.8995*t)/4.9875;
endfunction

function fun=u2(t)
    fun =  cos(4.9875*t)/4.9875;
endfunction

function fun=u3(t)
```

```
    fun = sin(4.9875*t);
endfunction
function fun=u4(t)
    fun = -sin(4.9875*t);
endfunction

funcprot(0)
function dy=Fe(t, y)
 dy(1) = y(3) - lA*y(4);
 dy(2) = y(3) + lB*y(4);
 dy(3) = -(kA/M)*y(1) - (kB/M)*y(2)- ((bA + bB)/M)*y(3) + ((bA*lA
-bB*lB)/M)*y(4) + (kA/M)*u1(t) + (kB/M)*u2(t) + (bA/M)*u3(t) +(bB/M)*u4(t);
 dy(4) = (lA*kA/J)*y(1) - (lB*kB/J)*y(2) + ((lA*bA - lB*bB)/J)*y(3) -((bA*lA^2 -
bB*lB^2)/M)*y(4) - (lA*kA/J)*u1(t) + (lB*kB/J)*u2(t) -(lA*bA/J)*u3(t) +
(lB*bB/J)*u4(t);
endfunction

result = ode([xA0;xB0;vG0;w0],0,t,Fe);
w = result(4,:);
xA = result(1,:);
vG = result(3,:);
xB = result(2,:);

// GRAFICOS E BODE
set("current_figure",1)
plot2d(t,vG,[2 6])
xtitle("Velocidade CM","t [s]","Vel.[m/s]");
xgrid(3)

sl = syslin('c',A,B,[1,1,1,1]);
G = ss2tf(sl);
set("current_figure",4);
bode(G(1,2));
xtitle("Bode - xB");
set("current_figure",5);
bode(G(1,3));
xtitle("Bode - vG");
set("current_figure",3);
bode(G(1,1));
xtitle(" Bode - xA");
```