Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Relatório - Lista 07

Paulo Montijo Bandeira 9348449

São Paulo, novembro de 2020

Exercício:

Modele um sistema não linear de suspensão veicular do tipo $\frac{1}{4}$ de carro, incluindo a massa não suspensa (2 graus de liberdade), com três entradas, a velocidade v_G imposta pelo movimento do veículo, uma força de perturbação F e uma força de controle u. Implemente a simulação do sistema não linear (considerando as não linearidades do exemplo da suspensão de $\frac{1}{4}$ de carro sem massa suspensa, e adicionando a saturação da entrada u, etc.).

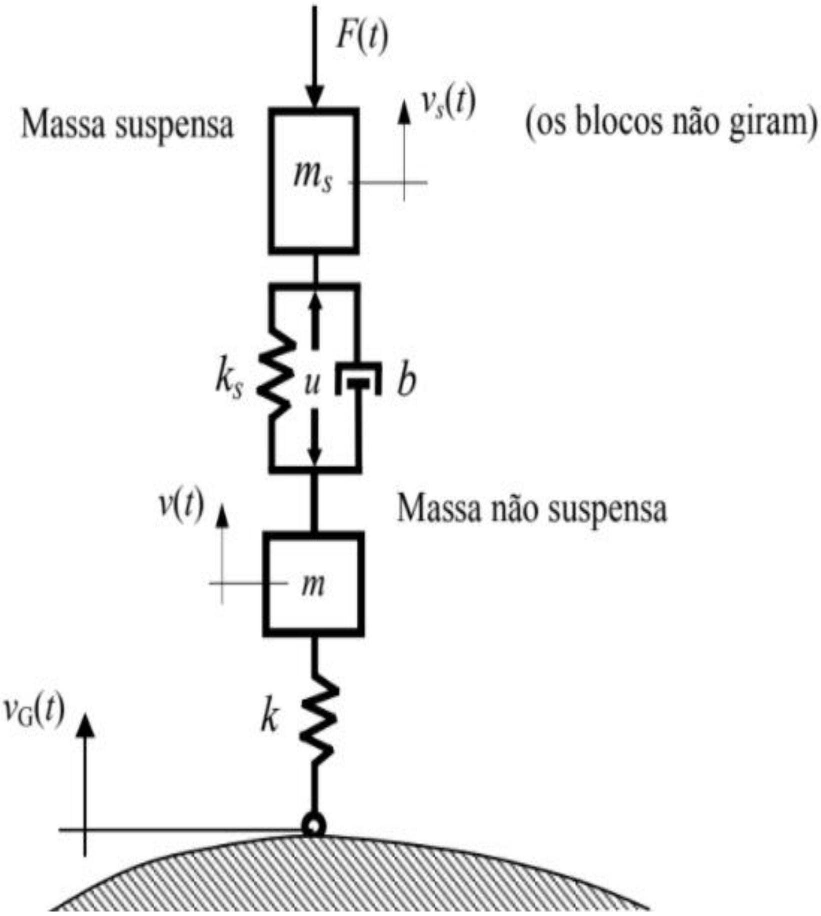

Figura 1 - Exercício 1/4 Carro

Montando as equações diferenciais do sistema temos:

$$m_S.\ddot{x_s} = u - F - k_s.(x_S - x) - b.(\dot{x_S} - \dot{x})$$

$$m.\ddot{x} = -u + k_S.(x_S - x) + b.(\dot{x_S} - \dot{x}) + k.(x_G - x)$$

Rearranjando os termos, ficamos com:

$$m_S.\ddot{x_s} + k_s.(x_S - x) + b.(\dot{x_S} - \dot{x}) = u - F$$

$$m.\ddot{x} - k_s.(x_S - x) - b.(\dot{x_S} - \dot{x}) + k.x = k.x_G$$

Isolando $\ddot{x_s}$ e $\ddot{x}$:

$$\ddot{x_s} = \frac{1}{m_S}u - \frac{1}{m_S}F - \frac{k_s}{m_S}.(x_S - x) - \frac{b}{m_S}.(\dot{x_S} - \dot{x})$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}u + \frac{k_s}{m}.(x_S - x) + \frac{b}{m}.(\dot{x_S} - \dot{x}) + \frac{k}{m}.(x_G - x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_S \\ x \\ \dot{x_S} \\ \dot{x} \end{bmatrix};\ \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x_S} \\ \dot{x} \\ \ddot{x_S} \\ \ddot{x} \end{bmatrix};\ u = \begin{bmatrix} F \\ u \\ \int v_G dt \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_S} & \frac{k_s}{m_S} & -\frac{b}{m_S} & \frac{b}{m_S} \\ \frac{k_s}{m} & -\frac{k_{s+k}}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_S} & \frac{1}{m_S} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

Assim chegamos na equação de forma matricial e no espaço de estados, agora é possível simular o movimento e analisar seus resultados.

Simulação:

Para simular o sistema era necessário primeiro passar para linguagem de programação as equações diferenciais escritas na modelagem do sistema, para isso foi utilizado o exemplo encontrado na própria lista:

```
//Definicao da funcao que implementa as equacoes diferenciais do sistema
function [xdot]=sistema(t,x,entrada)
    if (x(1)-x(2))<lc then xdot=[x(3);entrada(t);(-kB*(x(1)-x(2)-l)-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
    elseif (x(1)-x(2))>l then xdot=[x(3);entrada(t);-g];
    else xdot=[x(3);entrada(t);(-kM*(x(1)-x(2)-l)-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
    end

return
end
```

Figura 2 - Código que implementa as EDO's

No código foram feitas diversas condições devido a incerteza sobre a posição da mola, podendo ela estar relaxada, comprimida ou esticada, sendo assim as equações mudam conforme essa posição.

Após implementar as EDO's que regem o sistema, era necessário definir o tipo de entrada do sistema, conforme é solicitado no exercício a entrada deve compor uma força F, uma força de controle u e Vg(t) que será uma função senoidal. O código então tem a seguinte forma:

```
// Definicao da funcao que implementa a entrada vG:
function[ut]=entrada(t)

    if t<ti then ut=0;
    elseif t<(ti+lB/vc) then ut=(hB*2*%pi*vc/(2*lB))*sin((vc*2*%pi/lB)*(t-ti));
    else ut=0
    end

return
end
```

Figura 3 - Função de entrada

Depois de implementar tanto as Equações que regem o sistema, como também a função de entrada, foi possível escrever o código para obtenção do gráfico da resposta transitória da suspensão do exercício:

```
x0=[l-m*g/kM;0;0];  // condições iniciais
// O valor l-m*g/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão
// quando apenas o peso esta atuando.

t0=0;               // instante inicial
t=0:0.0001:2.8;      // vetor de tempo

x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));

// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada // do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-l);

// Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
// Se este valor eh positivo, o carro "descolou" do solo.
// Se este valor diminui ate lc-l metros (neste caso -0.3 m),
// o batente eh atingido.

// Plotando xG:
plot2d(t,x(2,:),2)

// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solução [m]","Deflexao","xG (perfil da via)");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legends([T(4),T(5)],[1,2],4);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```

Figura 4 - Código para obter o gráfico

No código acima a condição inicial reflete a posição de equilíbrio da suspensão (l-m*g/kM. O vetor de tempos foi projetado para plotar os gráficos até 2,8 segundos de movimento e foi utilizado o método ODE para a integração numérica.

Assim foi possível gerar o primeiro gráfico da resposta da suspensão:

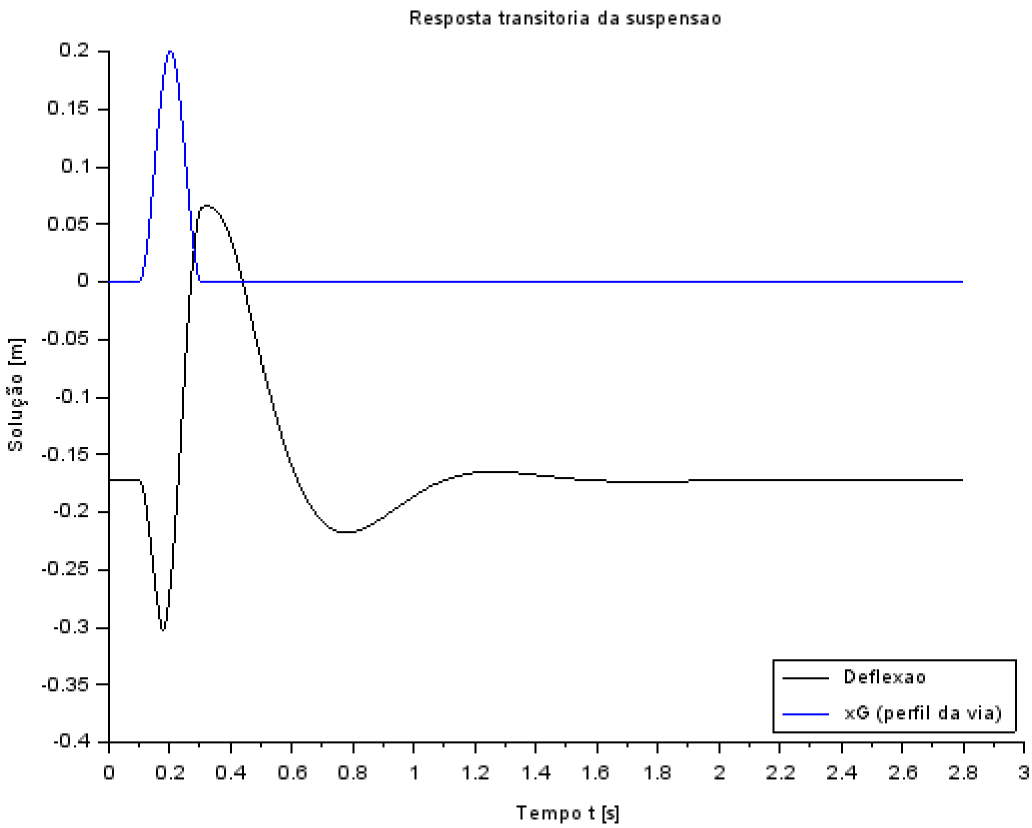

Figura 5 - Gráfico da solução trivial

É possível reparar que a suspensão cumpre bem seu papel atenuando o deslocamento vertical da roda causado pela pista irregular, e depois de aproximadamente 1 segundo o movimento vertical se estabiliza novamente fazendo a roda sofrer o deslocamento por pouco tempo.

Nos gráficos abaixo algumas constantes serão modificadas para possibilitar a comparação com a solução trivial acima.

Modificando a rigidez da mola para 8213 N/m:

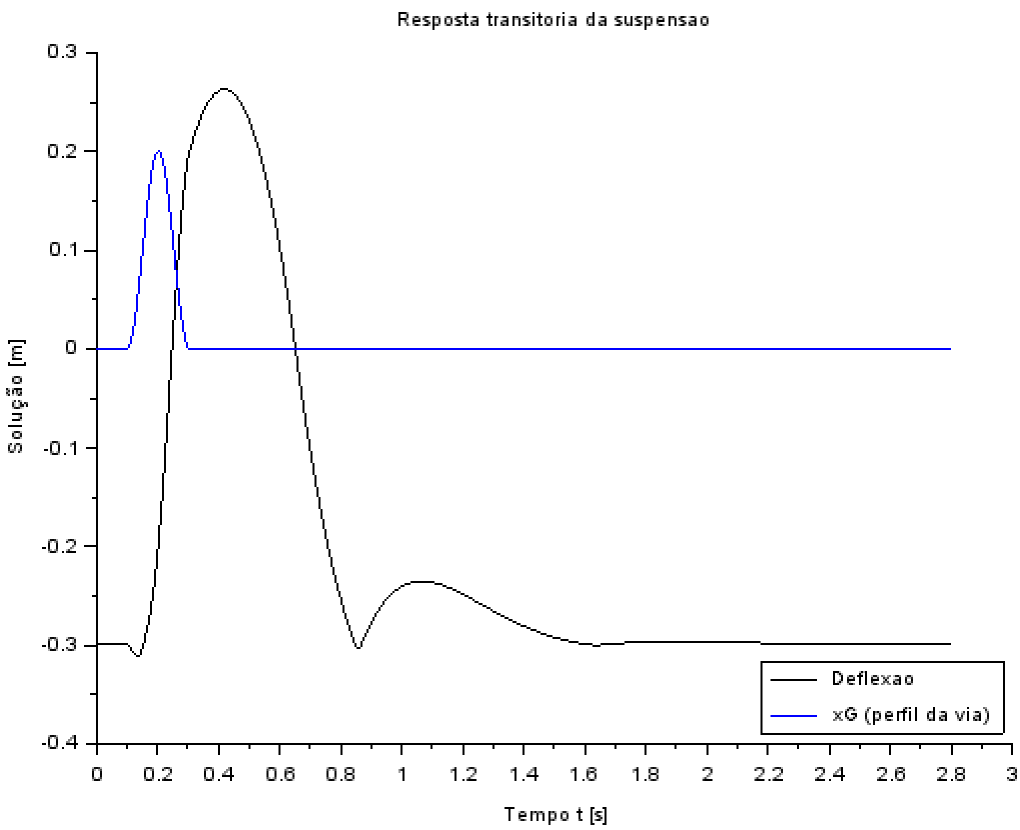

Figura 6 - Gráfico para K pequeno

É possível reparar que com um número baixo de rigidez da mola a suspensão deixa de cumprir bem seu papel, a roda sofre um deslocamento vertical mais acentuado e mais longo do que no primeiro caso, o tempo até o movimento se estabilizar novamente é de aproximadamente 1,6 segundos.

Dobrando a altura da lombada:

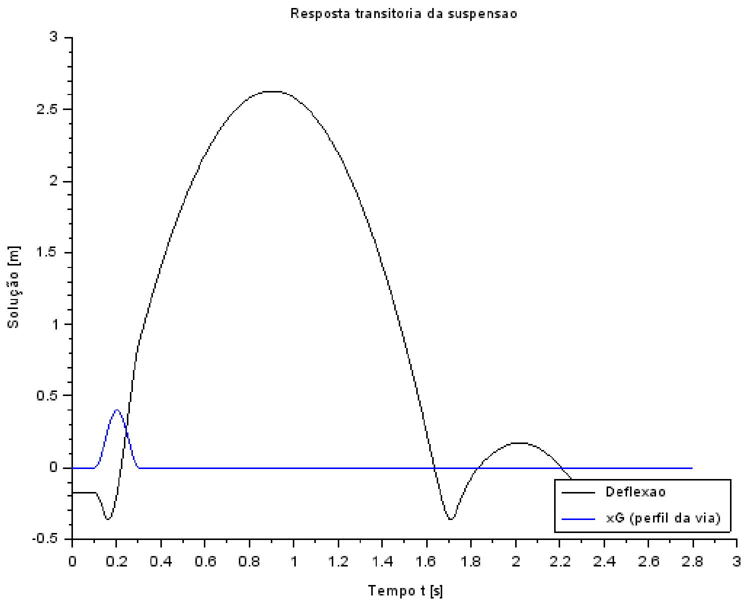

Figura 7 - Gráfico com lombada maior

O gráfico acima foi gerado com a altura da função senoidal modificada de 0,2m para 0,4m, é possível perceber como a mudança impactou bastante no deslocamento vertical da roda e no trabalho da suspensão, é legal analisar que se um projetista ruim construir lombadas com tamanho desproporcional em uma região em que passam muitos carros diariamente e com a mesma rotina, ele pode danificar a suspensão do automóvel em certo período de tempo.

Dobrando a velocidade do carro:

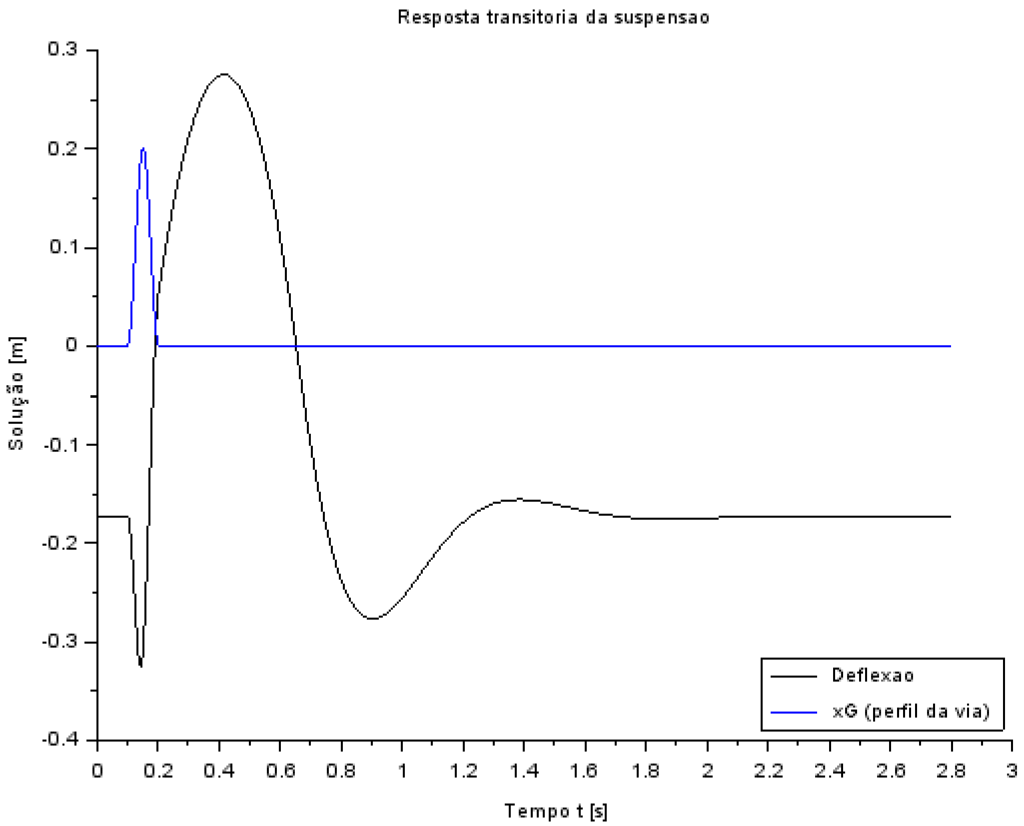

Figura 8 - Gráfico com velocidade dobrada

Agora o parâmetro modificado foi a velocidade que passou de 35 para 70 Km/h, é possível reparar que a consequência é parecida com dobrar a altura, o carro pode sobrer danos em um certo período de tempo se o motorista tem o costume de passar lombadas em uma velocidade elevada.