

João Pedro Dias Nunes 10705846

## **Suspensão Veicular**

**PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Lista 7**

Brasil

2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>MODELO DE <math>\frac{1}{2}</math> CARRO</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMA NÃO LINEAR</b> . . . . .	<b>10</b>

# 1 Modelo de $\frac{1}{2}$ carro

Considerando o modelo de meio carro abaixo:

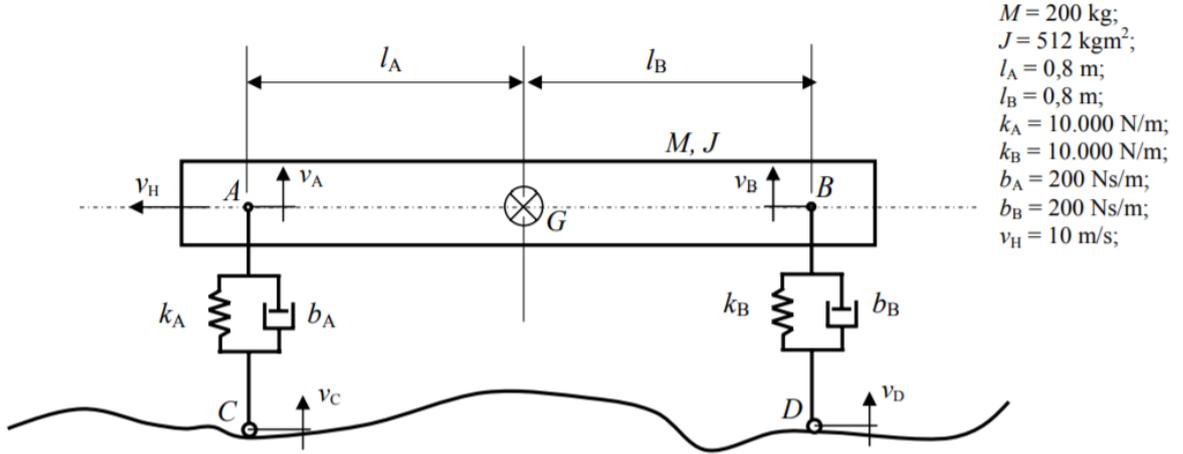


Figura 1 – Modelo físico de meio carro

com o vetor de entradas  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $v_g$  e  $\omega$ , pode-se modelar o seguinte espaço de estados com os teoremas da mecânica Lagrangeana:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_g \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -l_a \\ 0 & 0 & -1 & +l_b \\ \frac{k_a}{m} & -\frac{k_b}{m} & \frac{-b_a-b_b}{m} & \frac{-b_al_a+b_b l_b}{m} \\ \frac{k_al_a}{J} & -\frac{k_b l_b}{J} & \frac{-b_al_a+b_b l_b}{J} & -\frac{b_al_a^2+b_b l_b^2}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_g \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{b_a}{m} & \frac{b_b}{m} \\ \frac{b_al_a}{J} & -\frac{b_b l_b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ v_d \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

e

$$\begin{bmatrix} v_g \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_g \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Simulando o sistema para uma entrada degrau em  $v_c$  e, posteriormente, em  $v_d$ , dada uma velocidade horizontal  $v_h$ , temos:

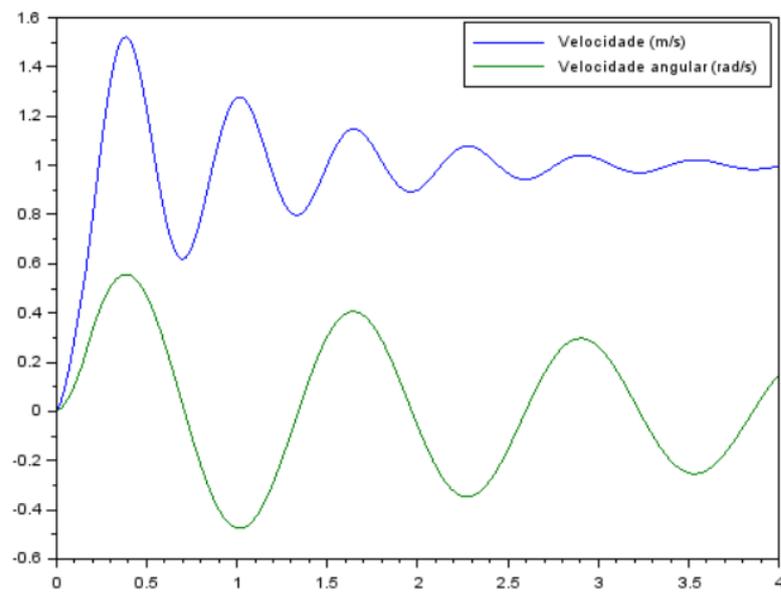


Figura 2 – Gráfico da velocidade vertical e angular

O obstáculo simulado seria uma entrada degrau de velocidade vertical, como uma subida. O tempo  $t_d$  é devido à diferença de atuação nas rodas, visto que uma está na frente e a outra atrás. Para isso, foi utilizado o seguinte código:

```

1 clf
2 clear
3 clc
4 close
5
6 M = 200 //kg;
7 J = 512 //kgm2
8 lA = 0.8 //m;
9 lB = 0.8 //m;
10 kA = 10000 //N/m;
11 kB = 10000 //N/m;
12 bA = 200 //Ns/m;
13 bB = 200 //Ns/m;
14 vH = 10 //m/s;
15
16 A=[0      0      -1      -lA;
17     0      0      -1      lB;
18     kA/M   kB/M   (-bA-bB)/M   (-bA*lA+bB*lB)/M;
19     kA*lA/J -kB*lB/J (-bA*lA+bB*lB)/J (-bA*lA^2-bB*lB^2)/J]
20
21 B=[1      0;
22     0      1;
23     bA/M   bB/M;
24     bA*lA/J bB*lB/J]
25

```

```
26
27
28
29 C=[0 0 1 0;
30     0 0 0 1]
31
32 D=[0 0;
33     0 0]
34
35 G=syslin('c',A,B,C,D)
36
37
38 t=0:0.001:4
39 td=(1A+1B)/vH
40
41 x0=[0
42     0
43     0
44     0]
45
46 u=zeros(2,length(t))
47
48 u(1,:)=1
49
50 for i=1:length(t)
51     if t(i)>= td then
52         u(2,i)=1
53     end
54 end
55
56
57
58 [y,x]=csim(u,t,G,x0)
59
60 scf(0)
61 plot(t,y)
62
63 legend(['Velocidade (m/s)', 'Velocidade angular (rad/s)'])
```

Analisando o sistema por uma entrada senoidal tal que  $v_c = v_d = u = \text{sen}(9,8995t)$  temos que:

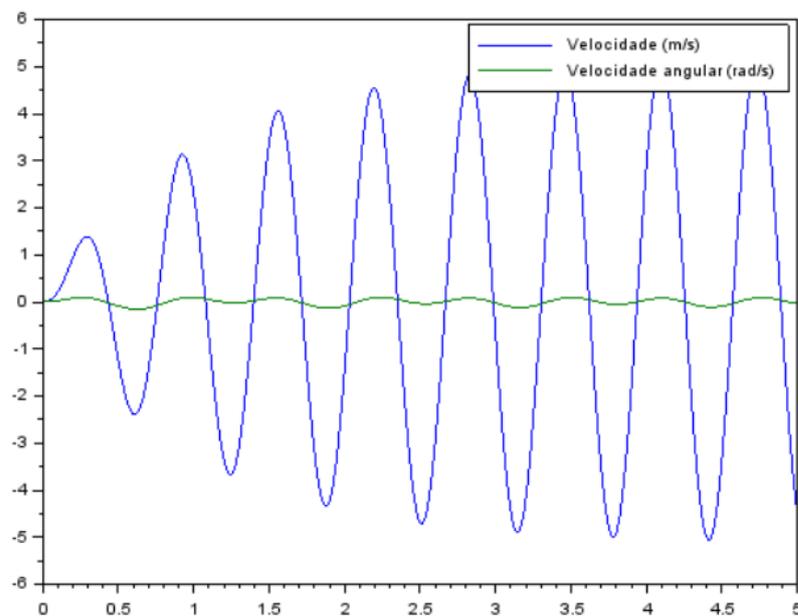


Figura 3 – Gráfico da velocidade vertical e angular para entrada senoidal

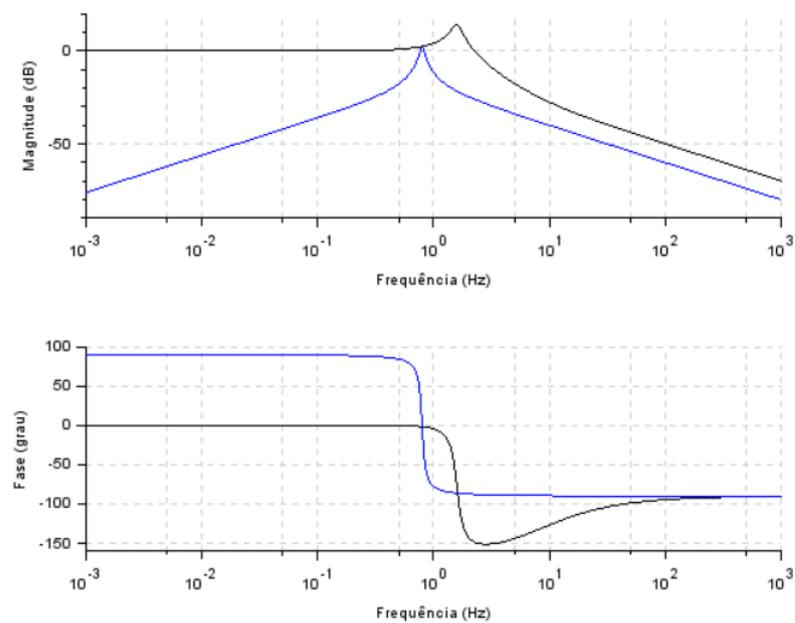


Figura 4 – Diagrama de Bode para entrada senoidal

Além disso, analisando os polos e zeros:

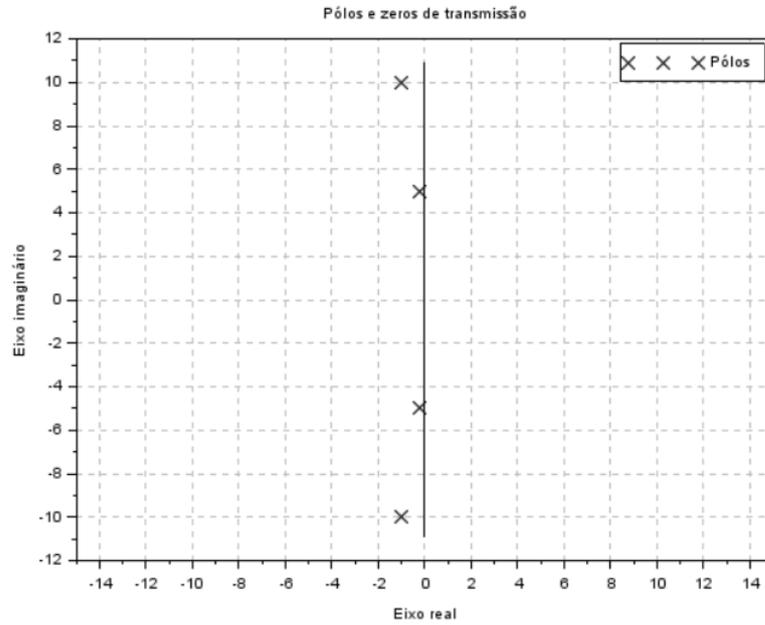


Figura 5 – Polos e zeros do problema

com os polos

$$p_1 = -0,01 \pm 0,0994987i \quad (1.3)$$

$$p_2 = -0,01 \pm 0,1997498i \quad (1.4)$$

para a frequência natural e o fator de amortecimento, temos que:

$$\omega_{n1} = \sqrt{0,01^2 + 0,099^2} = 0,1 \text{ rad/s} \quad (1.5)$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{0,01^2 + 0,1997^2} = 0,2 \text{ rad/s} \quad (1.6)$$

$$\zeta_1 = \cos\theta_1 = \frac{0,01}{0,1} = 0,1 \quad (1.7)$$

$$\zeta_2 = \cos\theta_2 = \frac{0,01}{0,2} = 0,05 \quad (1.8)$$

Agora, a frequência natural amortecida e a de ressonância:

$$\omega_{d1} = \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 0,995 \text{ rad/s} \quad (1.9)$$

$$\omega_{d2} = \sqrt{1 - \zeta_2^2} = 0,999 \text{ rad/s} \quad (1.10)$$

$$\omega_{r1} = \sqrt{1 - 2\zeta_1^2} = 0,990 \text{ rad/s} \quad (1.11)$$

$$\omega_{r2} = \sqrt{1 - 2\zeta_2^2} = 0,997 \text{ rad/s} \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

Para uma entrada senoidal defasada, ou seja  $v_c = -v_d = \text{sen}(4,9875t)$ , temos:

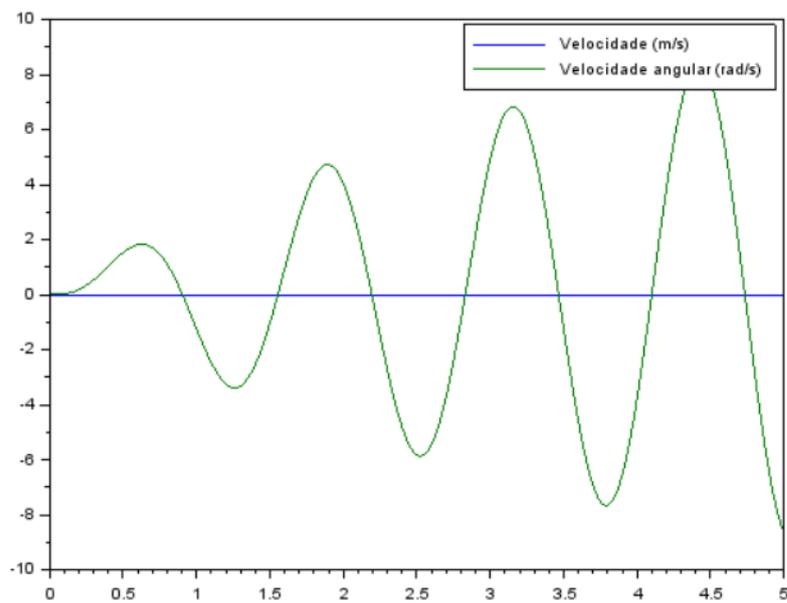


Figura 6 – Gráfico da velocidade vertical e angular para entrada senoidal defasada

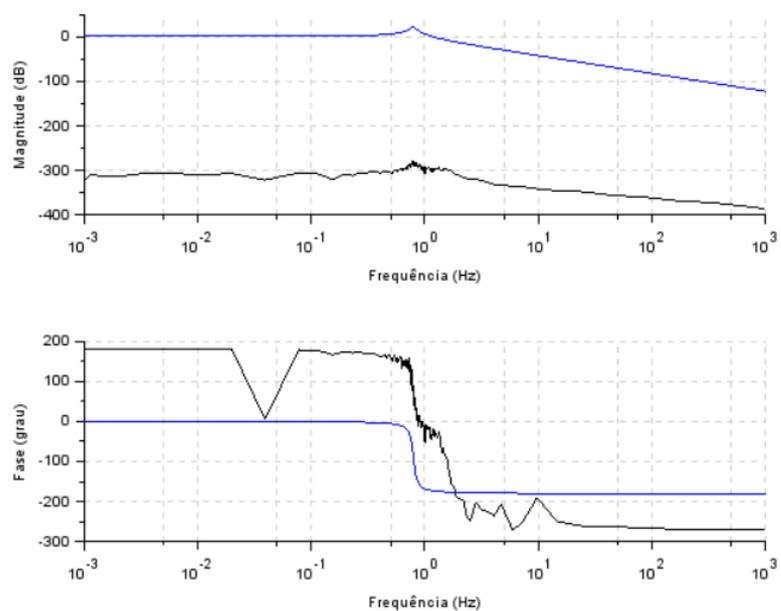


Figura 7 – Diagrama de Bode para entrada senoidal defasada

$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ v_a \\ v_b \end{bmatrix}$ 
 $u = \begin{bmatrix} v_c \\ v_d \end{bmatrix}$ 
 $y = \begin{bmatrix} v_g \\ u \end{bmatrix}$

Relações cinemáticas:  
 $\dot{x}_a = v_g - l\dot{\theta} + v_c$  (I)  
 $\dot{x}_b = v_g + l\dot{\theta} + v_d$  (II)

↳ As outras equações...

utiliza-se as equações da mecânica lagrangiana:

$T = \frac{Mv_g^2}{2} + \frac{J\dot{\theta}^2}{2} \rightarrow$  Energia cinética

$V = \frac{k_a x_a^2}{2} + \frac{k_b x_b^2}{2} \rightarrow$  Energia potencial

$L = T - V \Rightarrow L = \frac{Mv_g^2}{2} + \frac{J\dot{\theta}^2}{2} - \frac{k_a x_a^2}{2} - \frac{k_b x_b^2}{2}$

$x_a = x_g - l\theta$   
 $x_b = x_g + l\theta$

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = Q \Rightarrow$  R = função dissipativa de Rayleigh  $\Rightarrow$

$R = \frac{b_a \dot{x}_a^2}{2} + \frac{b_b \dot{x}_b^2}{2} \Rightarrow R = \frac{b_a}{2} (v_g - l\dot{\theta} + v_c)^2 + \frac{b_b}{2} (v_g + l\dot{\theta} + v_d)^2$

Para  $x_g$ :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_g} = \frac{\partial L}{\partial v_g} = Mv_g \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_g} \right) = M\dot{v}_g = M\ddot{x}_g //$

$\frac{\partial L}{\partial x_g} = -k_a(x_g - l\theta) - k_b(x_g + l\theta)$ ;  $\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_g} = b_a(\dot{x}_g - l\dot{\theta} + v_c) + b_b(\dot{x}_g + l\dot{\theta} + v_d)$

Figura 8 – Modelagem - Pagina 1

Daí xii:

$$\ddot{x}_g = \frac{1}{m} [-k_a x_a - b_a (\dot{x}_g - \dot{\theta}) - k_b x_b - b_b (\dot{x}_g + \dot{\theta}) - b_a \dot{x}_c - b_b \dot{x}_d] \quad (III)$$

Para  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \ddot{\theta} = \dot{\omega} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = k_a (x_g - l\theta) - k_b (x_g + l\theta)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -b_a (\dot{x}_g - \dot{\theta}) + b_b (\dot{x}_g + \dot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J} [k_a x_a + l a b_a (x_g - l\theta) - k_b x_b - l b_b b_b (x_g + l\theta) + (l a b_a v_c - l b_b b_b v_d)] \quad (IV)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -l a \\ 0 & 0 & -1 & l b \\ \frac{l k_a}{m} & \frac{l k_b}{m} & \frac{-b_a - b_b}{m} & \frac{-l b_a + l b_b}{m} \\ \frac{l k_a}{J} & \frac{l k_b}{J} & \frac{-l b_a + l b_b}{J} & \frac{-l b_a - l b_b}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l a}{m} & \frac{l b}{m} \\ \frac{l b_a}{J} & \frac{l b_b}{J} \end{bmatrix}$$

Com I, II, III, IV.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ v_g \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_g \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} v_c \\ v_d \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = CX$$

Figura 9 – Modelagem - Pagina 2

## 2 Sistema não linear

Considerando o sistema abaixo:

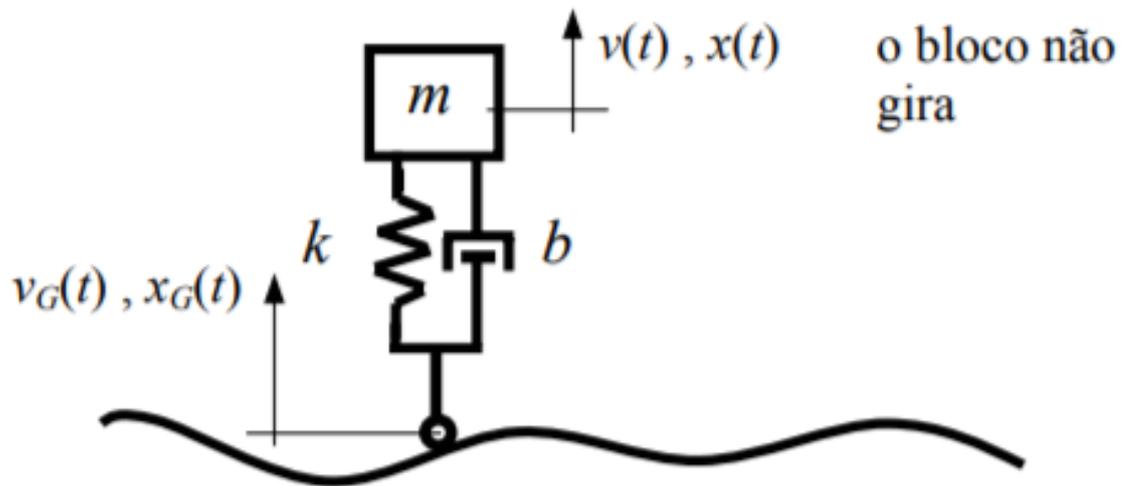


Figura 10 – Modelo físico de quarto de carro

e a entrada

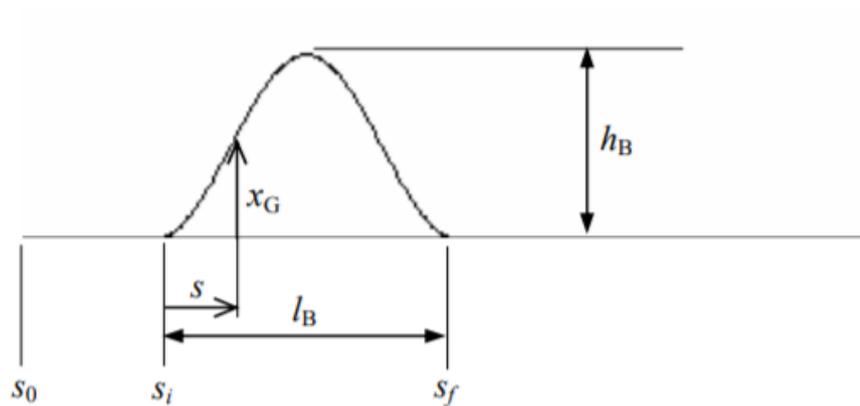


Figura 11 – Modelo físico de quarto de carro

foram obtidos os seguintes resultados

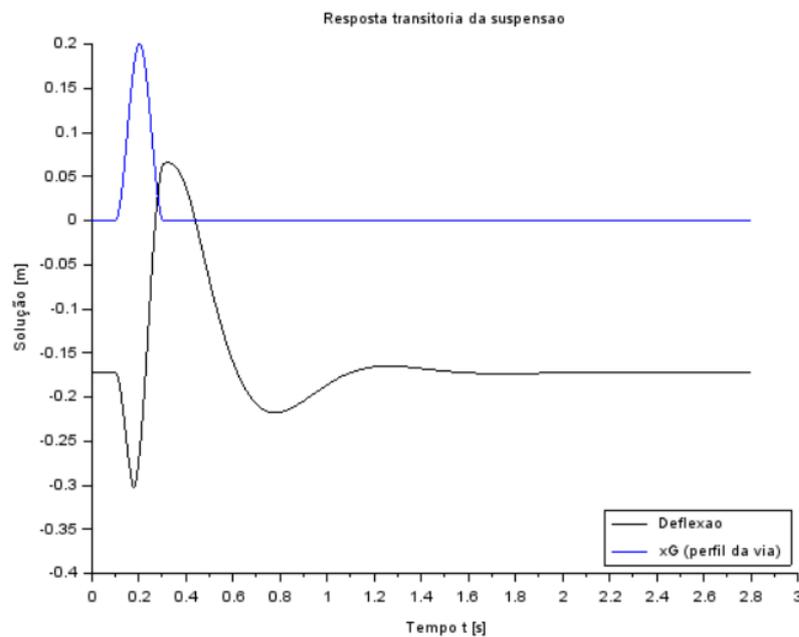


Figura 12 – Saídas do modelo de 1/4 de carro

com o seguinte código:

```

1 // Definicao do arquivo que implementa a simulacao:
2 clear all
3 clf
4 close
5 clc
6 // Use o caminho correto em seu computador:
7 // Carregar a funcao que implementa o modelo matematico do sistema
8 exec("C:\Users\j_pd\Desktop\POLI\6 SEMESTRE\MODELS\LG\4\sistema.sci");
9 // Carregar a função que implementa a entrada
10 exec("C:\Users\j_pd\Desktop\POLI\6 SEMESTRE\MODELS\LG\4\entrada.sci");
11 // Definir os valores dos parametros
12 m=250; // massa [kg]
13 b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]
14 g=9.8; // aceleracao da gravidade [m/s2]
15
16 kM=14213; // rigidez da mola [N/m]
17 kB=142130; // rigidez do batente [N/m]
18 l=0.4; // comprimento natural da mola [m]
19 lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
20 hB=0.2; // altura da lombada [m]
21 lB=2; // comprimento da lombada [m]
22 ti=0.1; // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
23 vch=35; // velocidade do carro [km/h]
24 vc=vch/3.6; // velocidade do carro [m/s]
25 x0=[1-m*g/kM;0;0]; // condições iniciais
26 // O valor 1-m*g/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão

```

```

27 // quando apenas o peso esta atuando.
28 t0=0; // instante inicial
29 t=0:0.0001:2.8; // vetor de tempo
30 x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));
31 // Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
32 // do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
33 plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-1)
34 // Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
35 // Se este valor eh positivo, o carro descolou do solo.
36 // Se este valor diminui ate lc-1 metros (neste caso -0.3 m),
37 // o batente eh atingido.
38 // Plotando xG:
39 plot2d(t,x(2,:),2)
40 // Usando a variavel do tipo 'lista':
41 T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solução [m]","
      Deflexao","xG (perfil da via)");
42 // Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4)
      :
43 legends([T(4),T(5)],[1,2],4);
44 // Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
45 xtitle(T(1),T(2),T(3));
46
47
48 // Definicao da funcao que implementa a entrada vG:
49 function [ut]=entrada(t)
50 if t<ti then
51 ut=0;
52 elseif t<(ti+lB/vc) then
53 ut=(hB*2*pi*vc/(2*lB))*sin((vc*2*pi/lB)*(t-ti));
54 else
55 ut=0
56 end,
57 return
58
59
60
61 // Definicao da funcao que implementa as equacoes diferenciais do sistema
62 function [xdot]=sistema(t,x,entrada)
63 if (x(1)-x(2))<lc then xdot=[x(3);entrada(t);(-kB*(x(1)-x(2)-1)-b*(x(3)-
      entrada(t))-m*g)/m];
64 elseif (x(1)-x(2))>l then xdot=[x(3);entrada(t);-g];
65 else xdot=[x(3);entrada(t);(-kM*(x(1)-x(2)-1)-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
66 end
67 return

```

Agora, o exercício, um sistema não linear de suspensão veicular do tipo  $\frac{1}{4}$  de carro, incluindo a massa não suspensa, com três entradas:

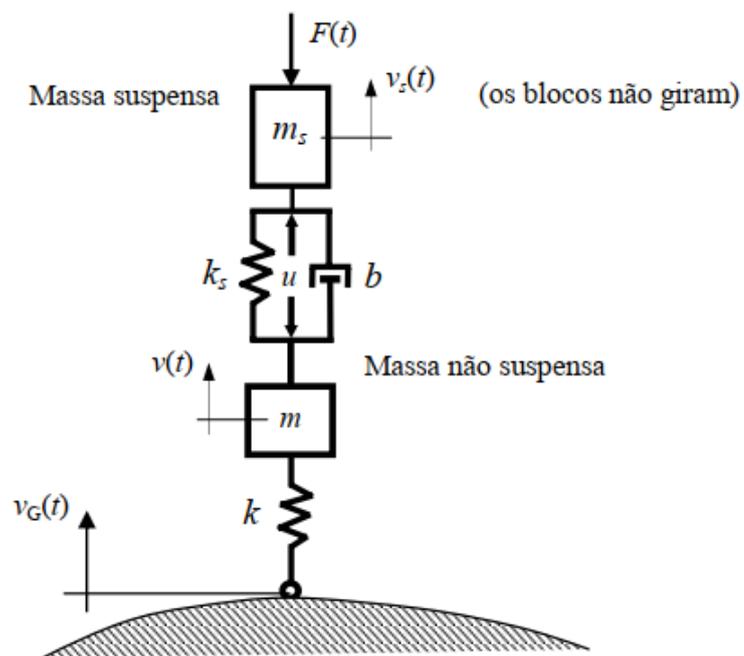


Figura 13 – Exercício

A modelagem matemática fica:

$$m_s \ddot{x}_s = -F + u - k(x_s - x) - b(\dot{x}_s - \dot{x}) \quad (2.1)$$

$$m \ddot{x} = -u - k(x - x_s) - b(\dot{x} - \dot{x}_s) - k(x - x_g) \quad (2.2)$$